

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS



INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y APLICADAS.
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

ESTUDIO DE LA ENERGÍA OSCURA POR MEDIO DE
OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS CON ÁREA TERMINAL EN FÍSICA.

PRESENTA:

VALERIA HERRERA TINOCO.

ASESOR:

DR. JOSÉ ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ.

Cuernavaca, Morelos 2024





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS



Cuernavaca, Mor., 01 de marzo del 2023
Asunto: Asignación de Comité Tutelar
CALC/105/2023

DR. JOSE ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS - UNAM
P R E S E N T E

Debido al prestigio académico con el que Ud. cuenta y a la relevancia de su trabajo como investigador en este campo específico, se le solicita su participación como **VOCAL** del Comité Tutelar asignado al estudiante **VALERIA HERRERA TINOCO**, quien realizará el proyecto de investigación **Estudio de la energía oscura a través de observaciones astrofísicas..** Esta función se extenderá tanto para el seminario de Pre-residencia, como para el seminario de Residencia de Investigación.

El Comité quedará conformado por los siguientes investigadores:

DR. JOAQUÍN ESCALONA SEGURA (Presidente).
DR. MARKUS FRANCISCUZ MÜLLER BENDER (Secretario).
DR. JOSE ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ (Vocal).
DR. MARCO ANTONIO RIVERA ISLAS (Suplente).
DR. GABRIEL GERMÁN VELARDE (Suplente).

La función del Comité Tutelar consiste en dar seguimiento al proceso de formación del estudiante en la realización de su investigación, misma que ha de concluirse en tiempo y forma en la presentación del proyecto en el caso de la Pre-residencia, y de la Tesis en el caso de la Residencia de Investigación.

De acuerdo al Plan de estudios de la Licenciatura en Ciencias la fecha límite para llevar a cabo la evaluación del Seminario de Pre-residencia es una semana hábil posterior a la aplicación de los exámenes departamentales del semestre actual, de lo contrario la calificación será NP y el estudiante deberá recurrar la materia

Sin más por el momento, aprovecho la oportunidad para enviarle un cordial saludo. (Adjunto programa de las unidades de aprendizaje Pre-residencia y Residencia de investigación para su conocimiento.)

Atentamente
Por una humanidad culta
Una universidad de excelencia

DRA. GABRIELA HINOJOSA PALAFOX
DIRECTORA - CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS

c.i.p.- Archivo
c.c.p.- Control Escolar de Licenciatura de IICBA



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Se expide el presente documento firmado electrónicamente de conformidad con el ACUERDO GENERAL PARA LA CONTINUIDAD DEL FUNCIONAMIENTO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS DURANTE LA EMERGENCIA SANITARIA PROVOCADA POR EL VIRUS SARS-COV2 (COVID-19) emitido el 27 de abril del 2020.

El presente documento cuenta con la firma electrónica UAEM del funcionario universitario competente, amparada por un certificado vigente a la fecha de su elaboración y es válido de conformidad con los LINEAMIENTOS EN MATERIA DE FIRMA ELECTRÓNICA PARA LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ESTADO DE MORELOS emitidos el 13 de noviembre del 2019 mediante circular No. 32.

Sello electrónico

GABRIELA GUADALUPE HINOJOSA PALAFOX | Fecha:2023-03-17 18:36:52 | Firmante

bCTsUXmyCOrEMSiZUbNEPKsW1sE764O4r+uewu1Y1u8Zwhd14sJ1UAbJd5EokRT6mng0oEUyQow0NahoSqKpOnLU371jNzjLgzvzTwY77PU4X/vOg9rDN27SI/8grLipd+HqFI
VnNT2mtM78T/Mv7HD81q3zLSVNsRskKzde4xA6cFZz9chDChrBC1JkVdJxP1mMLj8qzxVm+m4OCj4BOlxUYkYIoDf+bEjOQo6Z8mt7CpHSjKa9CNmSQzP6k0gZrprBrOF/xgU
FLcHvH1W3ha5/rNyak6sbp9KayVArhwRa9egacJkrYK7SeSp/elPc1fz7VKaRBrUpMv9/+C2gA==

Puede verificar la autenticidad del documento en la siguiente dirección electrónica o
escaneando el código QR ingresando la siguiente clave:



[QI57fhaxo](#)

<https://efirma.uaem.mx/noRepudio/t8mgkUVTTai2C1TA5FQmGrVqaZXfjo39>



Índice

1. Resumen.	4
2. Planteamiento	4
3. Objetivos.	5
4. Introducción.	6
4.1. ¿Qué estudia la cosmología?	6
4.1.1. El principio cosmológico.	7
4.1.2. Modelo Λ CDM.	9
4.1.3. Ecuaciones que describen el universo.	10
4.1.4. ¿Cuál es el contenido del universo?.	15
4.2. La materia oscura.	17
4.2.1. ¿Cómo se sabe que existe?	17
4.2.2. Candidatos	19
4.3. La energía oscura.	21
4.3.1. ¿Cómo se sabe que existe?	21
4.3.2. Candidatos	24
4.3.3. Λ CDM y modelos alternativos	25
4.4. Lentes gravitacionales.	28
4.4.1. Stronglensing.	29
4.4.2. Weaklensing.	31
4.4.3. Microlensing.	32
4.5. Geometría de la lente	34
4.6. Estadística bayesiana.	37
4.6.1. Método Monte Carlo.	38
5. Metodología.	39
5.1. Cadenas de Markov en Montecarlo (MCMC).	39
5.1.1. Funcionamiento.	39
5.2. Algoritmo Metropolis-Hastings.	40
5.2.1. Parámetros de una pendiente.	40
5.3. Criterios de información.	50
5.3.1. AIC.	50
5.3.2. BIC.	50
6. Resultados y discusión	51
6.1. Código MCMC propio.	53
6.1.1. Modelo wCDM	53
6.1.2. Modelo CPL.	58
6.1.3. Modelo JPB.	62
6.1.4. Modelo FSSL(I)	66

6.2. SimpleMC.	71
6.2.1. Modelo Λ CDM	71
6.2.2. Modelo wCDM	75
6.2.3. Modelo CPL	79
6.2.4. Modelo JBP.	83
6.2.5. Modelo FSL(I).	87
7. Conclusiones.	92
8. Referencias:	93

Dedicatoria.

A mis padres, por apoyarme a hacer realidad mis sueños y aconsejarme en cada momento difícil. Sin ellos no podría estar donde hoy.

Agradecimientos.

Este trabajo de investigación no habría sido posible sin la guía del Dr. Alberto Vázquez, que resolvió mis dudas y encaminó la investigación. También sin la valiosa ayuda de la Dra Gabriela García, cuyo apoyo al investigar y estudiar las lentes gravitacionales me permitió entender la teoría detrás.

También agradezco a mis padres por apoyarme con los recursos que necesitaba, además de a mis amigos por acompañarme y ayudarme cuando necesitaba resolver/entender diferentes situaciones.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN117723. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

1. Resumen.

En el área de la física que se dedica estudiar el universo en conjunto (sus estructuras, origen y demás fenómenos), la cosmología, hay muchas interrogantes y tensiones que aún no tienen respuesta. Estas cuestiones derivan en el desarrollo de las diversas líneas de investigación. Una de las más estudiadas actualmente es la de energía y materia oscura.

La energía oscura, al ser una de las principales componentes del universo en el que vivimos resulta muy intrigante, ya que no se sabe con certeza cuál es su composición. Puede tratarse de una energía constante asociada a una constante cosmológica, una energía fantasma, una energía evolucionante o incluso una quintaesencia.

Dependiendo de su naturaleza el universo podría tener un destino diferente. Es por ello que un punto de interés es estudiar un modelo, alternativo al estándar, que se adapte mejor a las observaciones de hoy en día. Para ello, uno de los datos observacionales que más ha cobrado fuerza en los últimos años han sido las observaciones de lentes gravitacionales.

Las lentes gravitacionales se asocian a otro gran fenómeno que es la materia oscura, otro de los grandes componentes de la materia-energía del universo. Es así que las lentes nos pueden proporcionar información de la energía oscura, que combinado con un modelo cosmológico también sirve para conocer más de la expansión acelerada del universo.

El modelo estándar es Λ CDM. Sin embargo el poder conocer con precisión los parámetros del modelo de energía oscura, además de la necesidad de resolver tensiones y problemas en el modelo actual pueden ser aminoradas con modelos alternativos.

En este trabajo lo que se realizó por medio de MCMC es la constricción de parámetros de distintos modelos de energía oscura, para poder comparar y analizar cuales se ajustan mejor a las observaciones de lentes fuertes. Esto fue posible también haciendo uso de las relaciones para las distancias diámetro angulares y de luminosidad, que permitieron conectar las observaciones de las lentes con cada modelo.

2. Planteamiento

Actualmente el modelo de energía oscura estándar, más aceptado, es el modelo Λ CDM. Esto debido a su concordancia con la Teoría del Big Bang (que explica como el universo nació de un estado de gran densidad a expandirse muy rápidamente), con la existencia de grandes estructuras y la expansión acelerada del universo, entre otros.

En este se consideran ciertos aspectos, como el uso de la Relatividad General como teoría correcta para el estudio del universo, también se estudian los halos de galaxias por medio de perfiles como el Navarro-Frenk-White, en donde el contenido del universo es de neutrinos, radiación, materia barionica, energía y materia oscura (las mayores componentes).

Sin embargo, debido a cuestiones que pueden ser debidas al modelo cosmológico, se tienen tensiones y cuestiones importantes. Una de ellas es la tensión de Hubble, la tensión s_8 , la

discrepancia de la energía de vacío, entre otras.

Es por ello que se considera que al modelar de distinta forma el comportamiento de la energía oscura, estas tensiones y conflictos se vayan resolviendo. De aquí la importancia de tener modelos alternativos de energía oscura y que se puedan comparar en la restricción de parámetros, como lo mencionamos enseguida.

Existen parametrización y extensiones de Λ CDM, como CPL, JPB, ω CDM, FSL, etc.. Que vale la pena estudiar con MCMC.

3. Objetivos.

Diferentes modelos de energía oscura han sido propuestos como modelos alternativos. Entre los que se encuentran ω CDM, CPL, JPB, FSL (los últimos 3 parametrizaciones).

En las parametrizaciones se consideran dos parámetros para la ecuación de estado: ω_0 y ω_1 . Además de los demás parámetros del modelo.

Actualmente existen datos observacionales de lentes fuertes, de distintos surveys. A medida que se obtienen datos más recientes se espera obtener una mejora en la restricción de parámetros, especialmente en los de la ecuación de estado: ω_0 y ω_1 .

Así que el objetivo principal al comparar estos modelos es utilizar las observaciones de lentes fuertes, es decir, las observaciones astronómicas, usando la prueba del likelihood. La conexión necesaria para los modelos de energía oscura con las observaciones de lentes fuertes también se puntualiza en el trabajo.

Adicionado a que durante la comparación de modelos se obtendrán gráficas de contorno, para los parámetros del parámetro de Hubble. En ellas se podrá observar la restricción de parámetros, cuáles son las regiones donde se tienen mejores parámetros.

Por otro lado, el procedimiento se llevará a cabo utilizando métodos de Montecarlo, en específico cadenas de Markov, llevadas a cabo con el algoritmo Metropolis- Hastings, primero programado en python.

4. Introducción.

4.1. ¿Qué estudia la cosmología?.

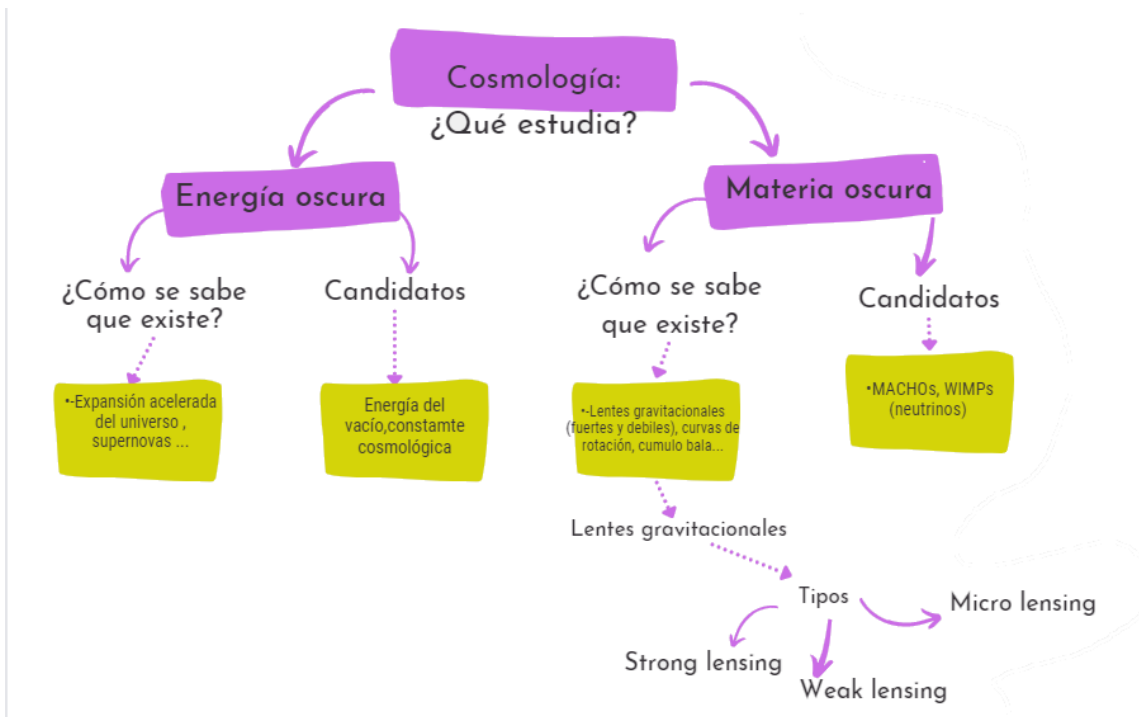


Figura 1: Ramificación de dos grandes temas de interés en cosmología

La palabra cosmología viene del griego *kósmos* y el latín *logia*. La cosmología se enfoca en estudiar todo el espacio, el universo, en conjunto. Más que las características que tengan los objetos astronómicos esta se interesa en el por qué de las propiedades de estos y sus estructuras.

Para estudiarlo se considera que el universo tiene ciertas características ideales. Vemos que a nivel local, los objetos como planetas y demás orbitan estrellas; las estrellas a su vez se encuentran orbitando los centros de sus galaxias; las galaxias por otro lado están agrupadas en cúmulos; los cúmulos a su vez están agrupados en súper cúmulos y finalmente los súper cúmulos se pueden agrupar en franjas, formando murallas.

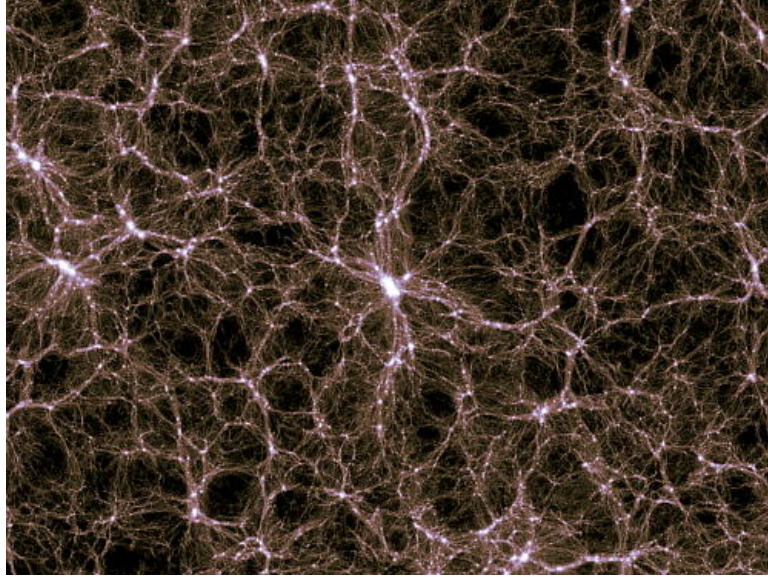


Figura 2: Franjas formadas por supercúmulos de estructuras. Al centro se ve la Gran muralla de Sloan.

En la figura 2 vemos como filamentos de supercúmulos parecen interconectarse y forman una muralla de aproximadamente 420 Mpc de largo. A esta escala todos estos grandes conjuntos de galaxias parecen verse distribuidos uniformemente...

4.1.1. El principio cosmológico.

A un nivel de estructuras de supercúmulos, aproximadamente $100 \times 10^6 \text{pc}$ ($1 \text{pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{m}$), se da por válido el llamado Principio cosmológico. Este principio establece que no hay un lugar especial en el universo, la Tierra y el sistema solar no se encuentran en un lugar privilegiado. Las estructuras se encuentran distribuidas de manera isótropa y homogénea.

La isotropía hace referencia a que, desde un punto fijo, no cambien las propiedades de un sistema vistas en cualquier dirección. La homogeneidad se refiere a que desde cualquier lugar del sistema se ven las mismas propiedades. Una no necesariamente implica la otra. Un patrón de esto puede ser un patrón, sería homogéneo pero no isotrópico. Un patrón de líneas en un círculo que van del centro hasta la circunferencia, sería isotrópico pero no homogéneo, como se ve en la figura 3.

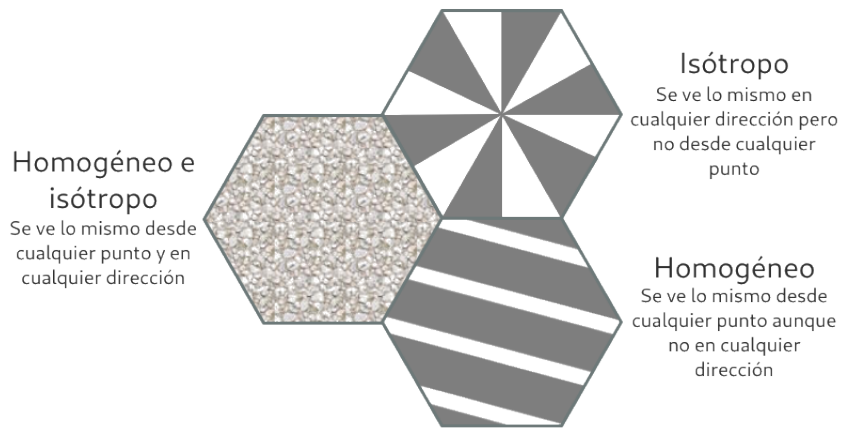


Figura 3: Isotropía y homogeneidad y ambas combinadas.

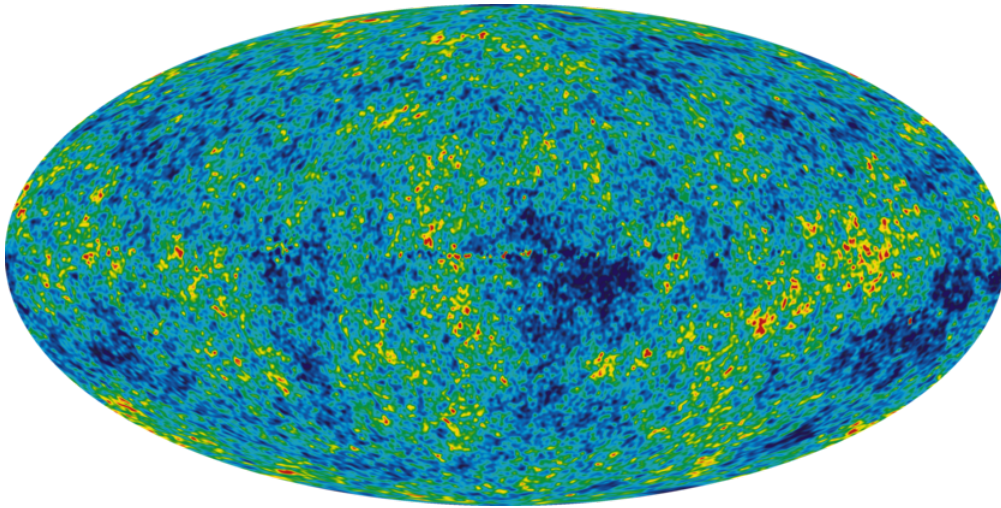


Figura 4: Cosmic Microwave Background o CMB producto de la radiación emitida cuando el universo era "joven".

En la figura 4 vemos la radiación de microondas que impregnan todo el espacio, producto de que de acuerdo al Big Bang, el universo una vez fue muy denso y compacto.

Cuando observamos a mayor detalle la temperatura de este fondo, que siguiendo la distribución de un cuerpo negro es de 2.728 K, vemos las fluctuaciones de temperatura (representadas por los colores, de escalas de μKelvin) de alrededor de $30\mu\text{K}$ de forma más evidente. Tal como predijeron Sachs Y Wolfe en 1967, poco después de su descubrimiento. Si observamos todo el CMB se ve isótropo (aunque con algunas anisotropías evidentes).

4.1.2. Modelo Λ CDM.

Las observaciones de materia oscura (se mencionarán en la sección 4.2) que se han recopilado en la actualidad son estudiadas a partir de modelos. Existen diversos modelos y el modelo que mejor se acopla a las observaciones y aspectos del Big Bang es el modelo Lambda Cold Dark Matter.

El modelo Lambda Cold Dark Matter, describe el comportamiento de galaxias a grandes escalas y los halos de materia oscura que se forman alrededor de ellas.

Para caracterizar los halos de galaxias se usa el perfil de densidades.

Estos perfiles describen como esta distribuida la masa en estos halos, en este modelo se utiliza el perfil Navarro-Frenk-White. En el la densidad está descrita por:

$$\rho(r) = \frac{4\rho_{-2}}{r/r_{-2} + (1 + r/r_{-2})}.$$

Donde r_{-2} es el radio característico a la que el logaritmo de la pendiente es -2.

Se asumen, en general los siguientes puntos:

-El universo contiene materia en la forma de radiación, materia bariónica, materia oscura fría (no relativista) y una constante cosmológica Λ que representa la energía oscura.

-Se considera la Teoría de la Relatividad de Einstein la correcta para estudiar los fenómenos cosmológicos.

-Se definen seis parámetros base importantes para ayudar a describir el modelo: $\omega_b = \Omega_{0b}h^2$ (de materia barionica), $\omega_c = \Omega_{0c}h^2$ (de materia oscura), θ (tamaño angular del horizonte sonoro), τ (ancho óptico de dispersión en la reionización), A_s (la amplitud de las fluctuaciones de densidad primordiales), n_s (espectro inicial de las fluctuaciones de densidad del universo temprano). Donde $h = H_0/100\text{km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ [1].

-Se considera la métrica FLRW, donde el parámetro de curvatura $k=0$, es decir un universo plano [2] [3] [4]

$$ds^2 = -c^2 dt + a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right).$$

4.1.3. Ecuaciones que describen el universo.

Ya que el universo se encuentra en expansión, para poder estudiar ciertas propiedades y fenómenos en el universo, hay que hacer uso de ecuaciones que modelen como se comportan las variables que nos interesan.

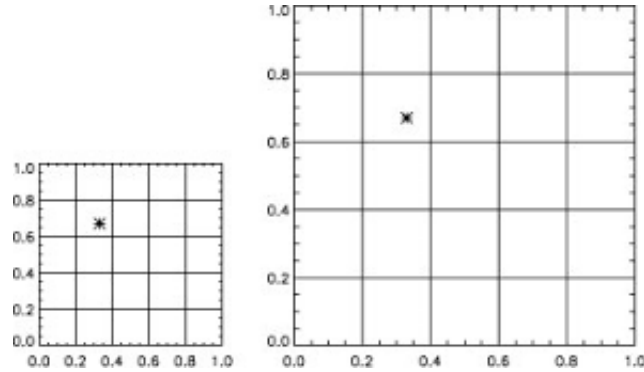


Figura 5: Al aumentar la distancia entre objetos o coordenadas en el espacio la distancia real va cambiando.

Consideramos que la expansión del universo se produce en un universo plano. En la figura 5 se ilustra la expansión en un espacio bidimensional y por utilidad se introducirá una coordenada comóvil para expresar esta nueva distancia real (correspondiente al espacio de la derecha) que sigue la expansión.

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}.$$

Donde \vec{r} es el vector en coordenadas físicas acordes a la expansión, \vec{x} el vector de coordenadas comóviles y a es el llamado factor de escala, que representa la tasa de expansión.

A partir de esta podemos definir

$$H = \frac{\dot{a}}{a}.$$

¿Pero qué representa H ? Representa el valor de la rapidez a la que crece el factor de escala a .

Actualmente, H se ha medido en varios proyectos, que no han llegado a un consenso definitivo. Pero normalmente su valor ronda de $H_0 = 67,4 \pm 2 \frac{km}{s} / Mpc$ hasta $H_0 = 76,8 \pm 2 \frac{km}{s} / Mpc$

Ecuación de Friedmann.

A partir de consideraciones más clásicas se puede obtener la ecuación de Friedmann.

Consideramos una masa puntual m , que está siendo atraída por un objeto de masa M . Con m a una distancia r del centro de esta distribución de masa.

Si obtenemos la energía total que posee la masa m , $U = T + V$: Primero con

$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$

Integrando obtenemos el potencial:

$$V = \int F dr = GMm \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{-GMm}{r}.$$

Tomando en cuenta que M es: $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ y la energía cinética: $T = \frac{mv^2}{2}$.

Remplazamos en la energía total:

$$U = \frac{mv^2}{2} - \frac{Gm}{r} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{mv^2}{2} - \frac{4}{3}Gm\pi r^2 \rho = \frac{1}{2}m\dot{a}^2 x^2 - \frac{4}{3}Gm\pi a^2 x^2 \rho. \quad (1)$$

(gaby:De donde viene esta definición? o porqué es válida?)

Definimos $kc^2 = -\frac{2U}{ma^2x^2}$, donde k es definida como una constante ($[k] = \frac{1}{m^2}$) y representa el parámetro de curvatura. Multiplicamos (4.2) por $\frac{2}{ma^2x^2}$:

$$\frac{2U}{ma^2x^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8}{3}\pi G\rho \rightarrow -\frac{kc^2}{a^2} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{8}{3}\pi G\rho.$$

Finalmente tenemos una ecuación que relaciona la tasa de expansión del universo con la densidad de energía de este:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (2)$$

Para poder resolver esta ecuación debemos introducir una ecuación que satisfaga el valor de la densidad, ρ .

Ecuación de fluido.

Para encontrar una ecuación que relacione ρ con el factor de escala a , estudiamos la energía que tendría este sistema: $dE + pdV = TdS$.

Como el sistema, el universo, no pierde ni gana energía (proceso reversible): $dS = 0$.

Derivamos la energía y el volumen, respectivamente:

$$E = mc^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2 \rightarrow dE = \frac{4}{3}\pi c^2 \left(a^3 \frac{d\rho}{dt} + 3\rho a^2 \frac{da}{dt} \right).$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \rightarrow dV = \frac{4}{3}\pi 3a^2 \frac{da}{dt}.$$

Ahora los reemplazamos en la 1era Ley:

$$\frac{4}{3}\pi c^2 \left(a^3 \frac{d\rho}{dt} + 3\rho a^2 \frac{da}{dt} \right) + p \frac{4}{3}\pi 3a^2 \frac{da}{dt} = c^2 a^3 \dot{\rho} + 3c^2 \rho a^2 \dot{a} + 3pa^2 \dot{a} = 0.$$

Multiplicamos por el factor $\frac{1}{c^2 a^3}$ y simplificamos:

$$\dot{\rho} + \frac{3c^2 \rho a^2 \dot{a}}{c^2 a^3} + \frac{3pa^2 \dot{a}}{c^2 a^3} = 0,$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Ecuación de estado.

Esta nos da información sobre el tipo de fluido que se encuentre en el universo. En este caso queremos que describa la energía oscura.

Considerando la homogeneidad e isotropía del universo, vemos que la densidad es dependiente del tiempo ($\rho = \rho(t)$). Por lo que para resolver la ecuación de continuidad se propone una ecuación de estado para saber como se comporta la presión.

El fluido de la DE puede ser uno perfecto descrito de forma barotrópica, esto significa que el fluido solo depende de la presión: $\rho = \rho(p)$. Así que relacionando con la densidad de energía de la DE:

$$p = w\varepsilon.$$

Donde la densidad de energía : $\varepsilon = \rho c^2$. Por tanto, con $c=1$ para simplificar:

$$p = w\rho. \quad (4)$$

En este caso la propuesta más simple para la DE fue una constante cosmológica Λ (independiente del redshift). Así que el parámetro de la ecuación de estado es $w = -1$, para tener una expansión en lugar de una compresión.

De esta forma la ecuación de estado para la DE como Λ :

$$p = -\rho.$$

Además de esta forma de la ecuación de estado uno puede proponer formas dependientes del redshift, como en la sección 4.3.3.

Ecuación de aceleración.

Se puede obtener una ecuación a partir de la de Friedmann y la de fluido. Derivando la ecuación de Friedmann :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a \frac{d\dot{a}}{dt} - \dot{a} \frac{da}{dt}}{a^2} = 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - a^2}{a^2},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{8\pi G\rho}{3} \right) + \frac{d}{dt} \left(-\frac{kc^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} + \frac{2\dot{a}kc^2}{a^3},$$

$$2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - a^2}{a^2} = \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} + \frac{2\dot{a}kc^2}{a^3}.$$

Y reemplazando la ecuación de fluido, $\dot{\rho}$:

$$2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\ddot{a} - a^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(-3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \right) + \frac{2\dot{a}kc^2}{a^3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}.$$

Sustituimos la ecuación de Friedmann en $\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2$ y simplificando:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho - \frac{4\pi Gp}{c^2} + \frac{8\pi G\rho}{3} = -\frac{4\pi Gp}{c^2} - \frac{4\pi G\rho}{3},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right).$$

Vemos que esta ecuación es dependiente de la de Friedmann y la de fluido.

Distancias.

¿Qué sucede cuando queremos medir la distancia de la Tierra a algún objeto celeste?

Podemos utilizar distintas técnicas o ecuaciones, todo dependerá de que tan lejos se encuentre dicho objeto o de algunas características que posea (como su luminosidad).

Cuando se trata de distancias "locales", digamos del orden del ancho de nuestra galaxia, se puede utilizar el llamada distancia diámetro angular.

Distancia diámetro angular.

El diámetro angular, δ , se define a partir de la distancia a la que se encuentra un objeto desde el punto de vista de un observador y el diámetro que el objeto tiene.

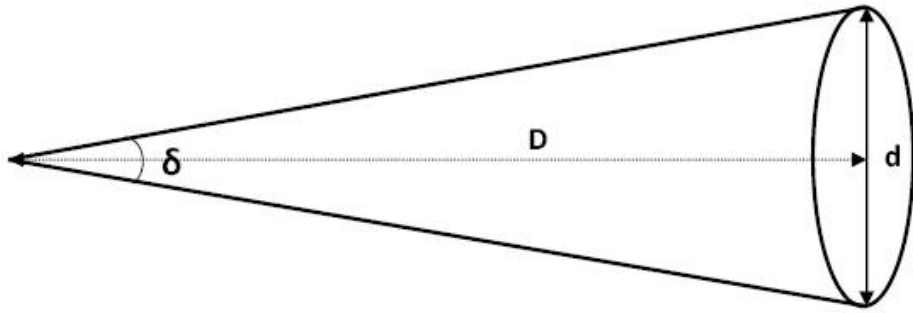


Figura 6: ángulo que subtiende un objeto a cierta distancia y con un cierto ancho.

A partir de la figura 6 podemos encontrar una relación, para el ángulo δ .

Para encontrar una relación para el ángulo, tomando la tangente que se forma en δ , tenemos:

$$\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{d}{2D_A}$$

Reescribiendo como la expansión en serie de Taylor (y aproximando solo hasta segundo término):

$$\tan(\delta) = \delta + \frac{2\delta^3}{6} + \dots = \delta.$$

Por lo que tenemos $\frac{\delta}{2} = \frac{d}{2D_A}$

$$\rightarrow D_A = \frac{d}{\delta}.$$

Sin embargo a distancias D_A mucho mayores se vuelve muy complicado obtener el ángulo δ que subtende un objeto lejano.

$$D_A = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz'.$$

Distancia de luminosidad.

Cuando se observa un objeto que emite luz en el espectro, es útil aprovechar sus características. Normalmente hay dos tipos de objetos que se pueden utilizar, por su luminosidad. Siendo la luminosidad la distancia a la que un objeto emite un flujo de energía (luz).

Se puede relacionar con el parámetro de Hubble, de manera que su expresión es de la forma:

$$D_L = \frac{c}{H_0}(1+z) \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz'.$$

Con la ecuación de Friedmann adimensional:

$$E_{\omega CDM}(z)^2 = \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega)}$$

Donde la distancia de luminosidad y la angular se relacionan por:

$$D_L = D_A(1+z)^2,$$

y

$$D_A = D_L(1+z)^{-2}$$

4.1.4. ¿Cuál es el contenido del universo?.

En cosmología se clasifica la materia del universo, de acuerdo a sus diferentes componentes, en general se considera que se divide en las siguientes ramas. Tenemos: Bariones, materia oscura, radiación y neutrinos; como se muestra en la figura siguiente esta es la composición de materia.

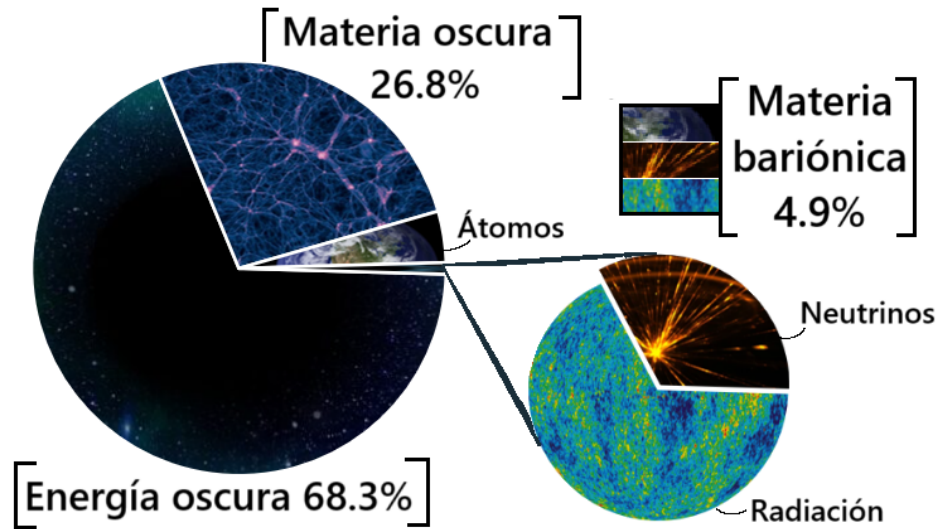


Figura 7: De acuerdo con las observaciones más recientes (por Planck) la mayor parte del universo esta compuesto por energía oscura (y en menor cantidad por materia oscura) de la que no se conoce su naturaleza. Solo un 4.9 % representa los átomos, estructuras y objetos que podemos ver.

De acuerdo al tipo de partículas, y sus interacciones, que se describen en el Modelo Estándar de Partículas, los bariones son partículas subatómicas de espín $1/2$. Se caracterizan por estar compuestas de tres quarks, los neutrones y protones son ejemplos de ellas. Normalmente se incluye al electrón dentro de esta categoría, aunque este no es un barión propiamente, es un leptón.

La radiación se refiere a las ondas electromagnéticas o fotones (desde un punto de vista cuántico). Esta interacciona con los bariones (también los electrones).

Los neutrinos son leptones, como los electrones, sin masa. Hay tres tipos: neutrino del electrón, tau neutrino y neutrino del muon. Se cree que puede haber un fondo de neutrinos (así como el fondo de microondas) pero las interacciones con estos son muy débiles.

Y estos últimos tres, en conjunto, se engloban en lo que se conoce comúnmente como materia bariónica. El sector de DM y DE corresponde al de materia exótica.

4.2. La materia oscura.

Se trata de uno de los dos componentes más enigmáticos del universo. Es materia exótica (no bariónica), que conforma el 26.8% de la materia total del universo. El origen de su descubrimiento viene desde mediados del siglo pasado, cuando se comenzó a estudiar la estructura de las galaxias

Se descubrió algo extraño... las galaxias debían contener mucha más materia que la visible.

4.2.1. ¿Cómo se sabe que existe?

Por medio de observaciones indirectas se ha dado cuenta de la existencia de esta materia exótica, que no está compuesta de partículas bariónicas.

A inicios del siglo pasado no había evidencia de que hubiera otros objetos fuera de nuestra galaxia. Al principio se creía que todas las estrellas que se observaban en el firmamento se encontraban dentro.

¿Cuándo cambio esto?

A inicios del siglo XX Edwin Hubble, un astrónomo estadounidense, realizó importantes aportes en la cosmología. En 1924 observó la galaxia Andrómeda, nuestra vecina más cercana, y partir de observar estrellas variables ceféidas en ella pudo determinar que se encontraba aproximadamente a 1.5 millones de años luz (o 460 kpc). (jav: ?)

Esto supuso que esta "nebulosa"(como eran llamadas las galaxias en ese entonces) se encontraba fuera de nuestra galaxia, y que todas las demás justamente también lo estaban.



Figura 8: Galaxia de Andrómeda, o espiral M31. Se encuentra en la constelación de Andrómeda a 780 kpc de la Tierra. Una distancia mayor que la que obtuvo Hubble.

En el año 1936 Jan Hendrick Oort, un físico holandés, comenzó a estudiar las estrellas

cercanas al centro de la Vía Láctea. Observando la influencia que el centro ejercía sobre las estrellas pudo hacer una estimación de la masa de este. Se dio cuenta de que la masa del centro no coincidía con la que estaba produciendo esta influencia en las estrellas aledañas.

También realizó numerosas observaciones sobre nuestra galaxia y sistema solar. Sugirió que, tal como los planetas más externos de nuestro sistema que se movían a velocidades más lentas que los más interiores (de acuerdo a la 3ra Ley de Kepler), así las estrellas más exteriores deberían moverse lentamente.

Fritz Zwicky, un astrónomo búlgaro sentó el primer precedente de que había materia faltante en las galaxias. En 1933 realizó observaciones de galaxias en el cúmulo Coma, sugirió que su velocidad de rotación no concordaba con la teoría, sin embargo no logró convencer a la comunidad científica.

Vera Rubin fue una astrónoma estadounidense, que posteriormente realizó aportaciones cruciales para el descubrimiento de la materia oscura. Se dedicó a estudiar las curvas de rotación de las galaxias.

Una curva de rotación es la relación entre la distancia de una estrella u objeto brillante en una galaxia, al centro de la misma, respecto de la velocidad a la que rotan respecto al bulbo o centro.

Lo que uno esperaría ver en una curva de rotación de una galaxia sería el análogo al comportamiento kepleriano; esto es una curva decreciente ($v \sim 1/r^{1/2}$): a medida que la distancia al centro aumenta la velocidad de rotación disminuye (comportamiento correspondiente a la curva punteada -A- de la figura 9).

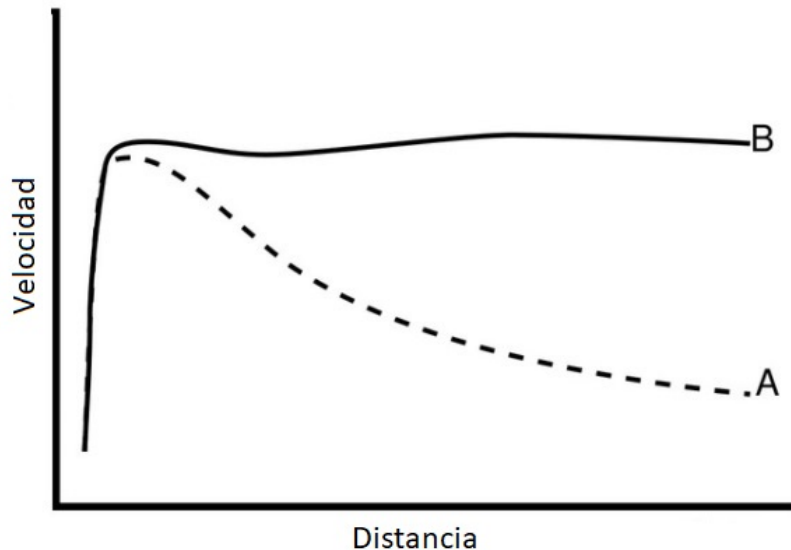


Figura 9: Curva de rotación característica observada de las galaxias (en la curva punteada A) y la curva esperada (B) según una relación tipo $v \sim 1/r^{1/2}$.

En cambio se observa un comportamiento como el de la curva B en 9. En la figura 10 se

observa la curva real, de M31, obtenida por Rubin y Ford, que sigue este comportamiento.

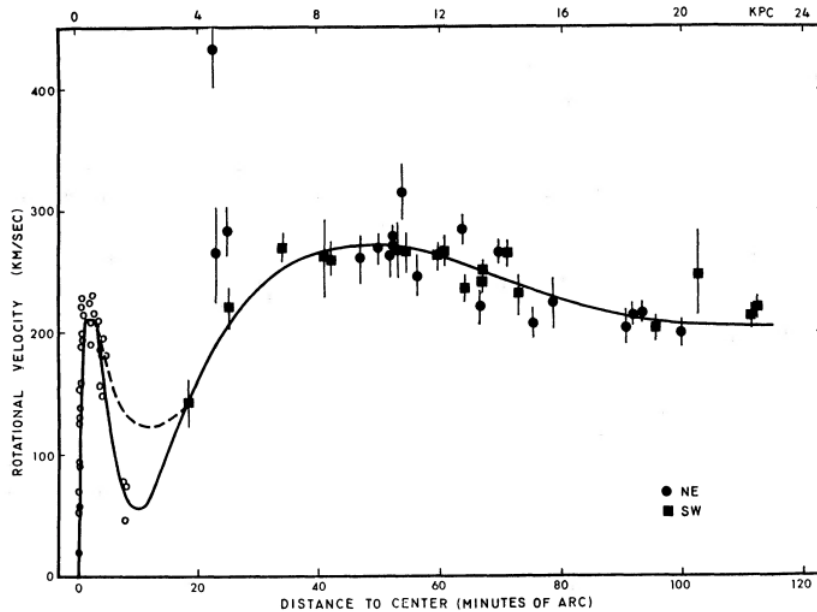


Figura 10: Curva de rotación de pequeños cúmulos de estrellas de tipo espectral O y B en M31 y estrellas cerca del núcleo galáctico.

Vera, junto con Kent Ford estudiaron las curvas de rotación no solo de M31, de la Vía Láctea y de diversas más. El patrón que encontraron en M31 es el que se muestra en la figura 10, completamente análogo al de la Vía Láctea.

Estos resultados fueron desconcertantes, ya que significaba que debía haber más cantidad de materia que la que se podía observar con los telescopios. Ellos calcularon que la masa faltante debía extenderse, como un halo, más allá del límite observable de las galaxias [5].

(vale:Me falta mencionar más aportes)(jav: por ejemplo, que es una curva de rotacion)
(vale:ya esta la explicación de curva)

4.2.2. Candidatos

MACHOS A lo largo de estas últimas décadas se ha comenzado una búsqueda de la materia faltante en las galaxias, para explicar su movimiento.

A finales de la década de los 90s se comenzó a postular que posibles candidatos a materia oscura podrían ser objetos compactos o bien alguna clase de partículas elementales.

Esto ya que la materia oscura no podía estar compuesta de las mismas partículas que la bariónica, de ser así sería detectable por medio de observaciones directas. De aquí se postuló que podrían ser objetos compactos denominados por sus siglas, Masive Compact Halo Objet o MACHOs.

Justamente a finales de esa década (90s) hubo observaciones dedicadas al estudio del microlensing de estrellas provocado por objetos compactos. Estas observaciones estuvieron a cargo del Proyecto MACHO, por científicos estadounidenses y australianos.

Al final de este proyecto, que tuvo una duración de 5 años de observación, se obtuvo que la masa de materia oscura con la que contribuían estos objetos era un 20 % de la esperada [6].

WIMPs Como la búsqueda de la naturaleza de la materia oscura continuo, después de que los MACHOs dejaran de ser candidatos más probables, cobró más fuerza la propuesta de una partícula como componente de la materia oscura.

Este tipo de partícula debería interaccionar solo gravitacionalmente con los bariones. Se les llama WIMPs, que quiere decir Weakly Interacting Massive Particles.

Se han propuesto varios tipos de WIMPs, el más conocido es el neutralino. Este se caracterizaría también por tener un tiempo de vida más estable que otras partículas llamadas supersimétricas [7].

La supersimetría de partículas como modelo ,MSSM, se trata de un ajuste al modelo de partículas. En este se supone que cada partícula elemental tiene una super-compañera, es decir cada fermión tiene una compañera bosónica y cada bosón tiene un compañero fermiónico.

Esto implicaría la existencia de más partículas que aún no se han detectado.

Existencia de más dimensiones. Otro grupo candidato que resuelve ciertos aspectos de la materia oscura podrían ser otras modificaciones a la teoría, de forma que la energía oscura es un efecto secundario de este, no existiría compuesta de partículas.

Si consideramos que la materia oscura es un efecto entonces tendríamos que explicar que pasa entonces con otros fenómenos [3].

Suponiendo la existencia de más dimensiones, de las que estamos acostumbrados esto implicaría que no podemos acceder a ellas. Para poder hacerlo se necesitaría de mayor energía.

(jav: aqui pondria la explicacion de energia oscura) (vale:Cambié la sección de lentes al final)

4.3. La energía oscura.

Esta es un tipo de energía que se caracteriza por ser gravitacionalmente repulsiva. Se cree que conforma aproximadamente el 69% de la materia-energía del universo.

Al igual que la materia oscura, no se sabe mucho de su naturaleza. Pero a diferencia de esta, se manifiesta como una especie de propiedad inherente del espacio.

4.3.1. ¿Cómo se sabe que existe?

De forma indirecta se supo que esta debía que estar presente en todo el espacio. Debido, principalmente, al descubrimiento de la expansión acelerada del universo.

Descubrimiento de la expansión del universo. Hasta inicios del siglo pasado, se creía cierto el modelo del universo donde este era estático, los cuerpos celestes se mantenían en la misma posición y por ende no había expansión ni contracción del universo. En base a esta idea, cuando Einstein formuló la Teoría General de la Relatividad supuso un universo estático.

Pero cuando se descubrió la expansión del universo esto cambió el paradigma.

Hasta ese entonces no se tenía la certeza de que hubiera objetos fuera de la Vía Láctea, aunque se sabía de la existencia de lo que llamaban nebulosas (en realidad eran galaxias) y se creía que todos ellos estaban dentro de ella.

En 1929, el astrónomo estadounidense Edwin Hubble observó la distancia a la que se encontraban las llamadas nebulosas de nosotros. Esto mediante la observación de estrellas variables cefeidas que se encontraban en estas.

Las cefeidas, como su nombre lo indica, varían o pulsan, haciendo que lo haga su brillo. Tienen la particularidad de tener un patrón definido de luminosidad, por lo que a partir de este se puede inferir la distancia a la que se encuentran.

Esto se hace a partir de la relación periodo-luminosidad. Esto es, a partir del periodo de las cefeidas, si tienen un periodo mayor tienen mayor brillo intrínseco que las de menor periodo.

Por la que a partir de esta curva que nos da el brillo podemos obtener la distancia a la que se encuentran de la Tierra. Usando la relación $m - M = 5 \log\left(\frac{d}{10}\right)$

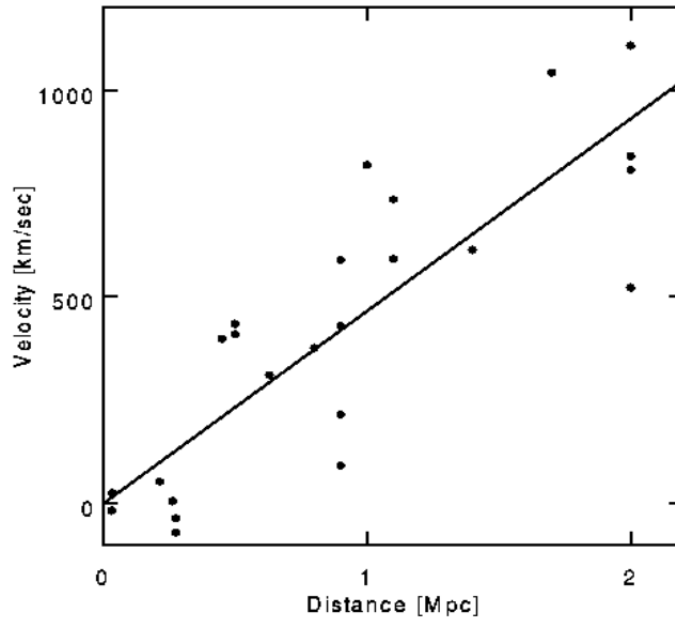


Figura 11: Velocidad a la que se mueven ciertas galaxias, de nosotros, respecto a su distancia en Mpc.

A partir de estas observaciones Lemaitre y Hubble dedujeron lo que hoy se conoce como la Ley de Hubble-Lemaitre. A Georges Lemaitre también se le atribuye el resultado de la expansión con un factor de escala, obtenido de manera independiente a Hubble.

En la figura 11 podemos ver como se sigue una relación para la velocidad:

$$v = HD$$

La expansión del universo hace que las galaxias y/o objeto aumenten más y más la distancia entre ellos, debido a su velocidad.

Se sabe que el valor de esta velocidad fue menor en el pasado, mientras más cerca del Big Bang.

Expansión acelerada del universo. De manera que todo lo que llevó al descubrimiento de que el universo se estaba acelerando fue crucial para poder dar cuenta, posteriormente, de que esto estaba pasando de manera acelerada. Esto debido a la energía oscura.

Posteriormente, un resultado fundamental para determinar la existencia de la energía oscura fueron observaciones hechas a supernovas de tipo Ia.

En 1998 un equipo liderado por Adam Riess, obtuvo resultados de la luminosidad esperada de 10 supernovas tipo Ia. A partir de esto se obtuvo la distancia (distancia luminosa) a estas supernovas.

Los resultados indicaron que estas distancias eran mucho mayores que las esperadas, en un universo compuesto solo por materia bariónica (es decir Ω_m dominante).

Importancia de supernovas Ia.

Sabemos que las estrellas en el universo existen ya que hay un equilibrio hidrostático entre la fuerza producto de las reacciones de fusión y la gravedad.

Cuando las estrellas llegan a ser tan masivas como 5 veces la masa solar (o mayor), al final de su vida útil, terminaran como supernovas.

Cuando se agoten los elementos para realizar la fusión la gravedad dominará, haciendo que la estrella colapse rápidamente. Como resultado la capa más exterior saldrá disparada y donde se encontraba el núcleo quedará una nube densa con un remanente de núcleo denso.

Esto es lo que se conoce como supernova, y su rastro deja lo que se conoce como nebulosa. Existen varios tipos de supernovas que se pueden clasificar de acuerdo a las características de su luminosidad, sus curvas de luz.

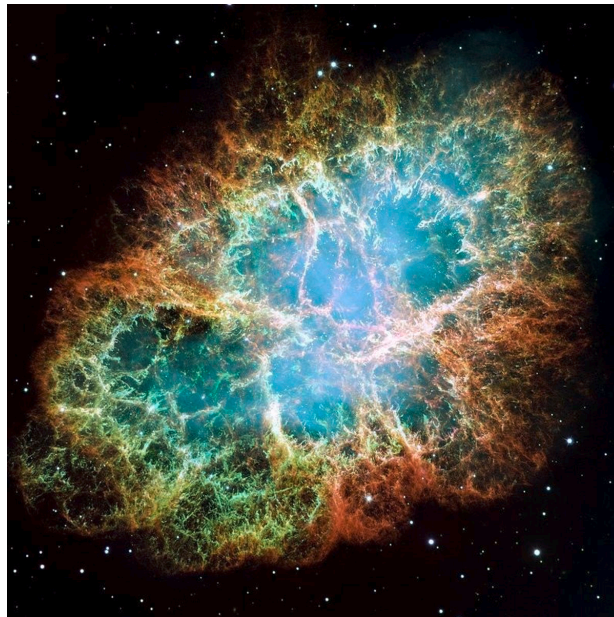


Figura 12: Nebulosa del Cangrejo producto de una supernova, de tipo plerión o viento púlsar, contiene un púlsar rotante en su interior. Se encuentra a aproximadamente 1992 pc de la Tierra.

Existen dos tipos principales de supernovas, las tipo I y II.

Las tipo II presentan líneas de hidrógeno cuando son observadas por medio de espectrometría, hay una fuerte presencia de este elemento en su composición. Sin embargo hay un gran rango de variación de este elemento para sus curvas de luz (son dispersas entre ellas).

Las tipo I se cree que son originadas por enanas blancas y se caracterizan por no presentar líneas de absorción de hidrógeno.

Dentro de esta clase, hay tres subclases. Las tipo Ia, que al principio sus líneas espectrales indican una fuerte presencia de Si II. Para las Ib, tienen más presencia de helio ionizado, He II (ha perdido uno de sus electrones). Y las Ic no tienen una presencia fuerte de ninguno de los dos.

Después de presentar líneas de Si II, las supernovas tipo Ia presentan un espectro de líneas de elementos del grupo 8 de la tabla periódica (Fe, Ru, Os, Hs). Esto hace que sus curvas de luz sean homogéneas y se pueden estandarizar para usarlas como candelas estándar.

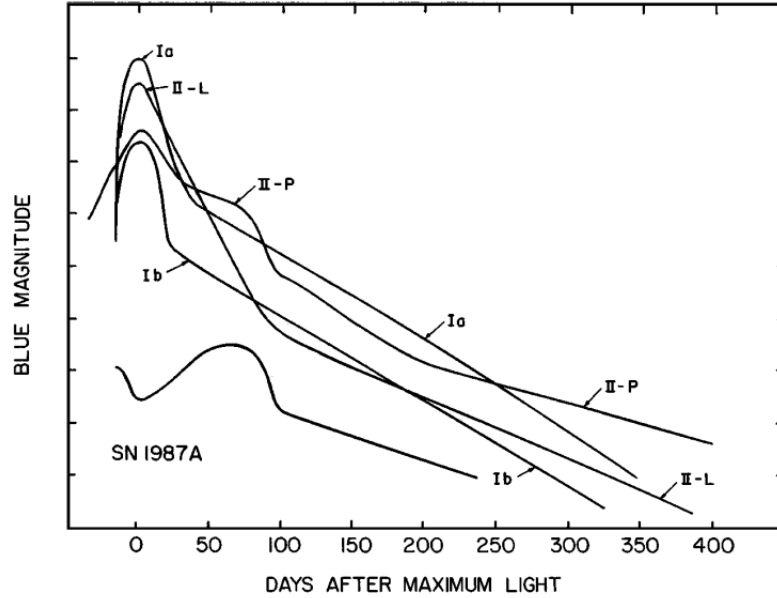


Figura 13: Curvas de luz de distintos tipos de supernova, la curva de luz de las tipo Ia son cruciales para poder utilizarlas como referencia para la candela estándar.

En la figura 13 se observan las curvas de luz de supernovas de tipo I y II. La curva de luz de la Ia es la que se utiliza para determinar la distancia a la que se encuentran de la tierra.

Como en el caso de las cefeidas, las supernovas Ia se pueden utilizar como candelas estándar.

A partir de la curva de luz de SN tipo Ia de la figura 13 se puede determinar la magnitud de su brillo. Sabiendo el tiempo que tarda en producir su máximo se puede deducir la magnitud del brillo, Cuando tenemos este se puede obtener la distancia r de la Tierra.

Como el factor a esta relacionado con el corrimiento al rojo, este nos da información de cuando el universo era más joven. Además con la tasa de expansión sabemos la aceleración del universo actual [8] [9] [10] [11].

4.3.2. Candidatos

En el caso de los candidatos para explicar la naturaleza de la energía oscura, no se trata de objetos o alguna clase de partículas, sino de algo quizá inherente al espacio. Esto puede manifestarse como una propiedad o una constante.

Se cree que la energía oscura puede asociarse a una manifestación de la energía del vacío o una constante cosmológica.

¿También una manifestación de la quintaescencia?

Constante cosmológica. En la física de la Relatividad General, un rasgo muy importante es que de la ecuación de Campo de Einstein (que en realidad son 10 ecuaciones compactadas) se puede ver que la geometría del espacio se relaciona con la distribución de energía-momento.

De manera que es como si la geometría del espacio le dijera a la materia como moverse a través de él.

Cuando Einstein formuló la Relatividad General pensó en un universo estático, acorde a la época.

Por lo que para que un universo estático coincidiera con la formulación de las ecuaciones de Campo había que agregar una constante. Esta es la llamada *constante cosmológica*.

Está denotada por la letra Λ .

Por otro lado en mecánica clásica, el movimiento de las partículas (análogo a la materia) esta caracterizado por los estados final e inicial de su energía.

A partir de esto, en cuántica, se puede pensar en la posibilidad de una energía del vacío, es decir una densidad de energía asociada al espacio vacío per se.

Los términos energía del vacío y constante cosmológica se refieren básicamente a lo mismo, ya que para definir la constante cosmológica se introduce un término de densidad de energía del vacío [12].

Quintaescencia. A inicios del siglo pasado, concretamente a finales de los 90s, se propuso una forma para esta energía oscura.

En 1998 Edward Cadwell, Steinhart y Dave propusieron lo siguiente.

Se considero la energía oscura como si fuera un campo escalar, presente en todo el espacio. De forma que esta sería una manifestación de la energía oscura por medio de un campo repulsivo, que haría que los objetos en el universo tiendan justamente a alejarse unos de otros.

Este campo estaría descrito por una ecuación de estado como la ecuación 4.

4.3.3. Λ CDM y modelos alternativos

Cuando a la energía oscura, en el modelo Λ se le asocia un valor constante de evolución, la forma que adopta la ecuación 4 es negativa (debido a que aquí $w = -1$)

La ecuación de Friedmann adimensional que sigue es:

$$E_{\Lambda CDM}(z)^2 = \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda} \text{ o } E_{\Lambda CDM}(z)^2 = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}$$

Donde $\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$ y Ω_k es 0 para curvatura plana.

Uno de los problemas que presenta considerar la energía oscura, como una constante cosmológica Λ que es inerte al espacio es la siguiente.

Si la energía oscura tiene su origen en el espacio mismo, en la energía del vacío ¿qué orden de magnitud tiene? Al ser una energía asociada al vacío debería ser un estado de mínima energía. Cuánticamente sabemos que un estado de mínima energía tiene una correspondiente energía ($E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega$).

Sin embargo las mediciones de la energía no coinciden en ordenes de magnitud (!22!) con el valor previsto teóricamente.

Por ello se buscan variaciones de este modelo, que se ajusten tan bien con las observaciones como este [13].

ω CDM.

Este modelo puede verse como una extensión de Λ CDM, ya que ω de la ecuación de estado puede tomar un rango de valores. De $w = -1$ a $w < -1/3$.

Es útil definir la ecuación de Friedmann adimensional: $E_{\omega CDM} = \frac{H_{\omega CDM}}{H_o}$

Entonces la ecuación completa:

$$E_{\omega CDM}(z)^2 = \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})a^{-3(1+\omega)},$$

$$E_{\omega CDM}(z)^2 = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega)}.$$

Chevallier-Polarski-Linder (CPL).

A diferencia del modelo Λ CDM y ω CDM con un parámetro de la ecuación constante, en este w es variable y adopta la forma de una parametrización: $\omega(z)$.

En esta se modela el comportamiento de la energía oscura dependiente del corrimiento al rojo, z . Tratando de ajustarla a las observaciones recientes del comportamiento de la constante cosmológica.

El parametro viene dado como: $\omega_{CPL}(z) = \omega_o + \omega_1(1 - a) = \omega_o + \omega_1 \frac{z}{z+1}$.

Donde ω_o es cuando tenemos $z = 0$ y evaluada $\omega_1 = \frac{d\omega}{dz}|_{z=0}$.

Con el factor adimensional $E_{CPL} = \frac{H_{CPL}}{H_o}$:

$$E_{CPL}(z)^2 = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_1)} \exp \left[\frac{-3\omega_1 z}{1+z} \right].$$

Jassal-Bagla-Padmanabhan (JBP).

El parámetro de la ecuación de estado sería: $\omega_{JPB}(z) = \omega_o + \omega_1 a(1 - a) = \omega_o + \omega_1 \frac{z}{(z+1)^2}$.

De igual manera a CPL, tenemos ω_o cuando $z = 0$ y $\omega_1 = \frac{d\omega}{dz}|_{z=0}$.

Con el factor adimensional $E_{JPB} = \frac{H_{JPB}}{H_0}$ tenemos :

$$E_{JPB}(z)^2 = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})(1+z)^{3(1+\omega_0)} \exp\left[\frac{-3\omega_1 z^2}{2(1+z)^2}\right].$$

Feng-Shen-Li-Li (propuesta tentativa)

Se trata de dos parametrizaciones, parecidas a las anteriores. Son las siguientes dos propuestas, I y II:

$$\omega_{FSSL(I)}(z) = \omega_o + \omega_1 \frac{z}{1+z^2}$$

$$\omega_{FSSL(II)}(z) = \omega_o + \omega_1 \frac{z^2}{1+z^2}$$

La ventaja frente a JPB por ejemplo, es que no hay divergencias para los diferentes redshift (por ejemplo en $z = -1$).

Así que en la ecuación adimensional de Friedmann:

$$E_{FSSL}(z)^2 = \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0})f_{de\pm}.$$

Donde

$$f_{de\pm}(z) = (1+z)^3(1+w_0) \exp\left(\pm \frac{3w_1}{2} \arctan(z)\right) (1+z^2)^{\frac{3}{4}w_1} (1+z)^{\mp \frac{3}{2}w_1}$$

[13].

4.4. Lentes gravitacionales.

Son objetos en el espacio con una cantidad de masa alta, tal que cuando la luz pasa cerca, es afectada por su interacción gravitatoria y se ve deflectada.

El fenómeno producido por una lente gravitacional fue registrado desde principios del siglo XX.

La teoría de la Relatividad General de Einstein predecía que la luz debía ser perturbada de su trayectoria en la presencia de campos gravitacionales. Así que por el año 1912 hubo una carrera por ver quién podía observar y comprobar esta deflexión de la luz (la teoría en si).

Diversos científicos trataron de medir el grado de desviación de la luz al pasar cerca de un astro como el sol. Sin embargo, fue Arthur Eddington (un astrónomo inglés) quien realizó un viaje a la isla Principe (en África) para observar el eclipse solar que daría lugar en mayo de 1919.

Se registró en placas el eclipse y se realizó el cálculo que daba una deflexión de entre $0.9''$ de ángulo a $1.8''$. Se pudo constatar que, tal como predecía la Relatividad General (un ángulo de $1.7''$), la luz curvaba su trayectoria al pasar cerca de un objeto masivo (en este caso el sol) [14].

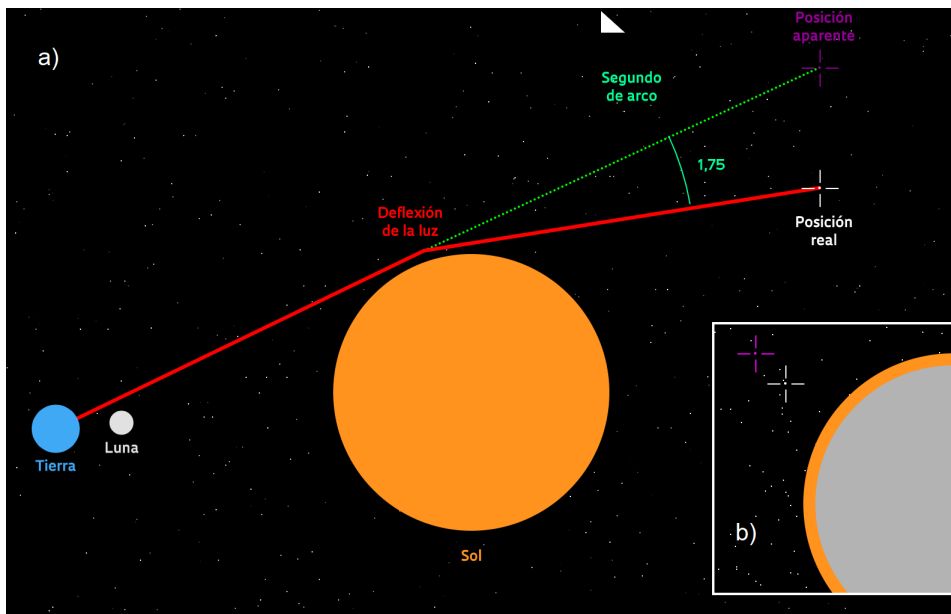


Figura 14: En a) podemos ver como la luz se desvía de su trayectoria recta, en b) podemos ver la vista desde la tierra.

En la figura 14 se retrata el fenómeno de lenseado que ocurrió en este eclipse. En a) se retrata la trayectoria que debería seguir la luz (línea verde) y la que sigue en realidad (línea roja). En b) podemos observar como se ve esta deflexión desde nuestra perspectiva, la posición aparente y los 1.52 segundos de arco correspondiente a la posición real.

El fenómeno que producen las lentes no sería detectado formalmente por otros objetos celestes, hasta casi finalizar la década de los 70s.

Notamos que a partir de estas trayectorias, aparente y real, a la fuente y el observador se puede estudiar el principio por el cual la luz se defleca, geoméricamente. Sin embargo se deben hacer ciertas consideraciones.

Se utiliza la *aproximación de lentes delgadas*. En esta la masa que esta produciendo la lente tiene un tamaño mucho más pequeño que las distancias entre los objetos del sistema. De forma que las trayectorias, de la luz en el sistema, se pueden trazar como líneas.

Cuando tengamos lentes del tamaño de cúmulos de galaxias esta consideración funciona bien. Pero cuando parecen tenerse una aglomeración de multitud de lentes, que en conjunto corresponden a una estructura de mayor tamaño, no se podrá aplicar [15].

También se considera que las distancias, en general, (a la lente y a la fuente en si) no cambian (aunque esto no es del todo cierto debido a la expansión) o su cambio es despreciable.

4.4.1. Stronglensing.

Fritz Zwicky fue un astrónomo suizo que en 1937 publicó artículos sugiriendo que galaxias lejanas podían ser candidatas para lentes, que produjeran este efecto.

Pero este tipo de lenseado no fue detectado, formalmente, hasta la década de los 70s. Y el culpable fue un cúasar. Actualmente también se tienen observaciones, para el caso de galaxias, que producen el efecto con estos objetos, los cuásares [16].

Un cuasar, que en inglés *quasar* hace referencia a quasi stellar radio source, son objetos que se encuentran en el centro de las galaxias. Estos emiten una muy fuerte cantidad de radiación electromagnética (luz visible, ultravioleta, rayos x, ondas de radio) y se cree que son causados por los agujeros negros que se encuentran al centro de las galaxias que lo presentan.

Un ejemplo de esto es la galaxia M87, en la figura 15, con un cuásar en su centro que produce un jet muy energético y por ende es muy luminoso, perfecto para ser la fuente de luz de una lente fuerte.

Típicamente se considera que el fenómeno se produce por objetos arriba de una densidad de masa crítica, de forma que la imagen proyectada en la lente esta magnificada y se pueden formar varias imágenes múltiples (arcos).

Justo como se muestra en la figura 16, donde se observa la imagen magnificada de galaxias y los arcos que se forman alrededor (color azul rodeando el centro) de la galaxia lente (color anaranjado al centro).

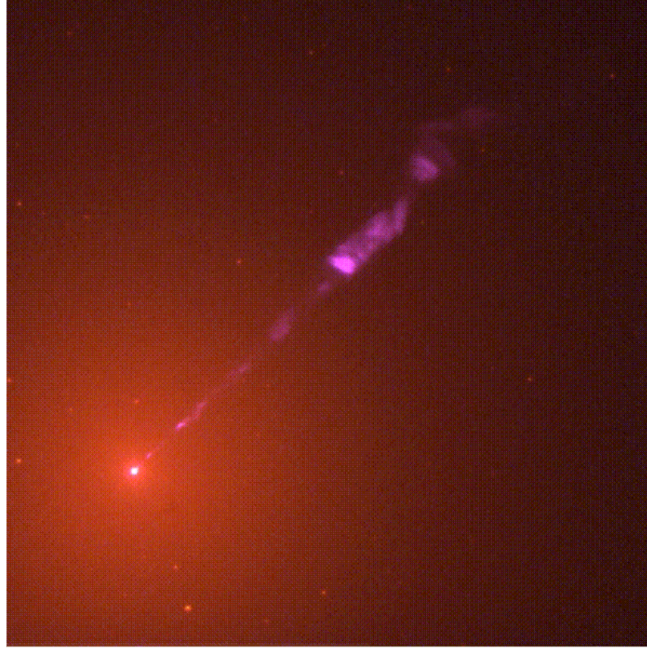


Figura 15: Galaxia M87 con un núcleo activo (AGN) que esta emitiendo un jet de ondas de radio (principalmente), tomada por el Telescopio Espacial Hubble.

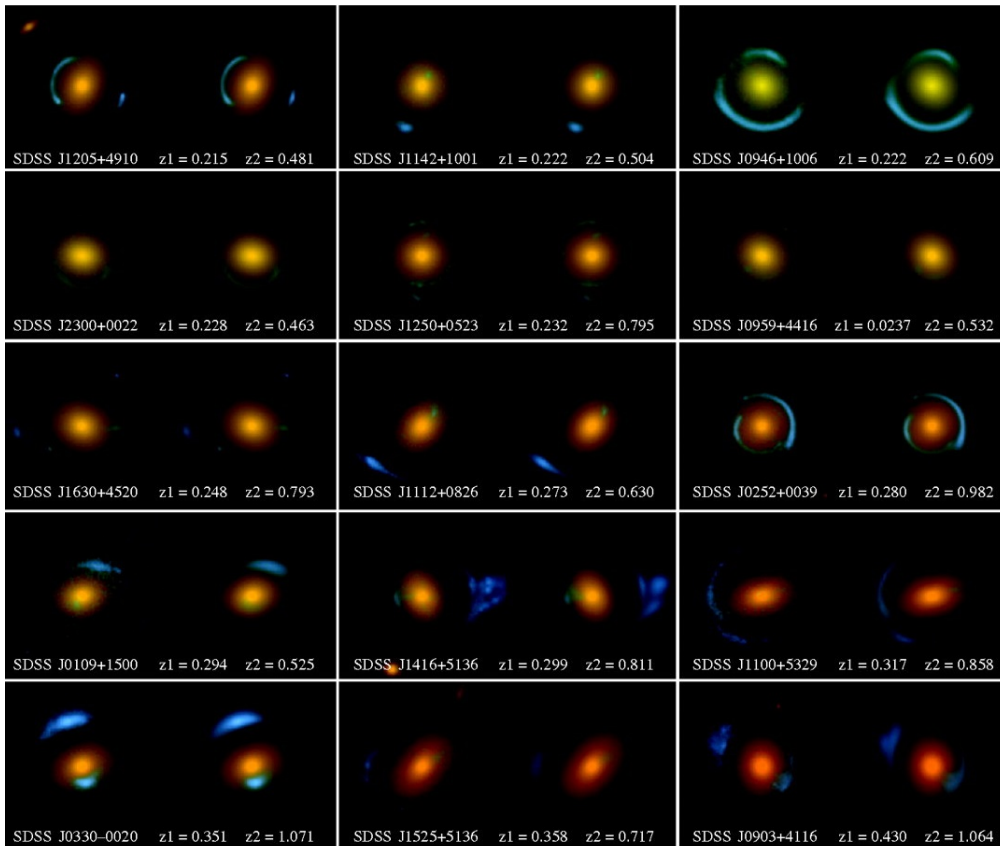


Figura 16: Lentes fuertes observadas por el Telescopio Espacial Hubble, del proyecto SLACS.

A partir de observaciones como la de la figura 17 y 21 (lenseado fuerte de galaxia- galaxia) se puede determinar la masa de la región central de la galaxia elíptica de fondo [17].

En la figura 17 una supernova tipo Ia, de $z = 0,409$, esta siendo magnificada y se observan cuatro imágenes múltiples alrededor de la lente causante, una galaxia. Se puede determinar la masa de esta galaxia, ya que las supernovas tipo Ia tienen curvas de luz que permiten obtener propiedades útiles [15].

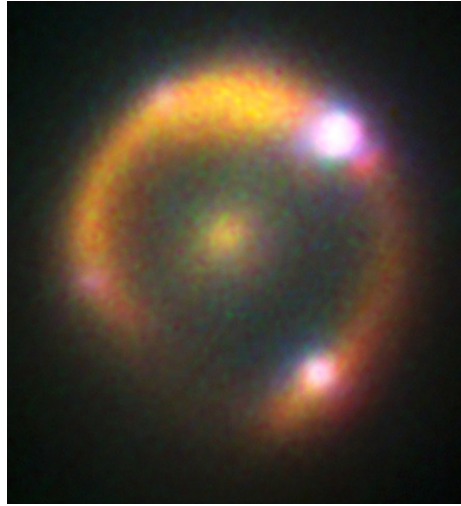


Figura 17: Imágenes múltiples de la supernova iPTF16geu, registrada por el observatorio Keck en Hawaii.

(gaby:Las ecuaciones de strong lensing se calculan asumiendo: Lentes por una esfera isotérmica singular)

4.4.2. Weaklensing.

Poco después de que Einstein confirmara que la deflexión de la luz, debida a la influencia gravitatoria del Sol, daba luz verde a su Teoría de la Relatividad, publicó el cálculo ahora para una estrella más lejana.

Fue influenciado por el ingeniero Checo Rudi Mandl para realizar el cálculo de esta deflexión, pero Einstein no tenía fe en que esta deflexión pudiera ser observada. Y curiosamente, Mandl también influenció a Fritz Zwicky para la idea que sugirió en 1937, de que las galaxias también podían ser lentes gravitacionales.

Los primeros análisis de lentes débiles se dieron entre la década de los 90s e inicios de los 2000.

Fue en un análisis conjunto, de Anthony Tyson, Valdes y Wenk, donde en 1990 hicieron un análisis de 20-60 galaxias, del cúmulo de Abell 1689 y el cúmulo CL 1409+524.

En ellos se logró medir la distribución de materia oscura de cúmulos de galaxias [18].

La masa de las lentes débiles está por debajo de una densidad crítica y no se llegan a formar imágenes múltiples ni arcos. En cambio se ve una pequeña distorsión en la forma del objeto detrás de la lente.

Por lo que, para poder estudiar la distorsión de la imagen, se debe tener un muestreo del tipo de objeto que sea la fuente. Posteriormente se compara estadísticamente con la lente que se observa, para reportar algún tipo de cambio.

Gracias a este tipo de análisis, como en la distorsión de la figura 18 se pueden recabar muchos datos.

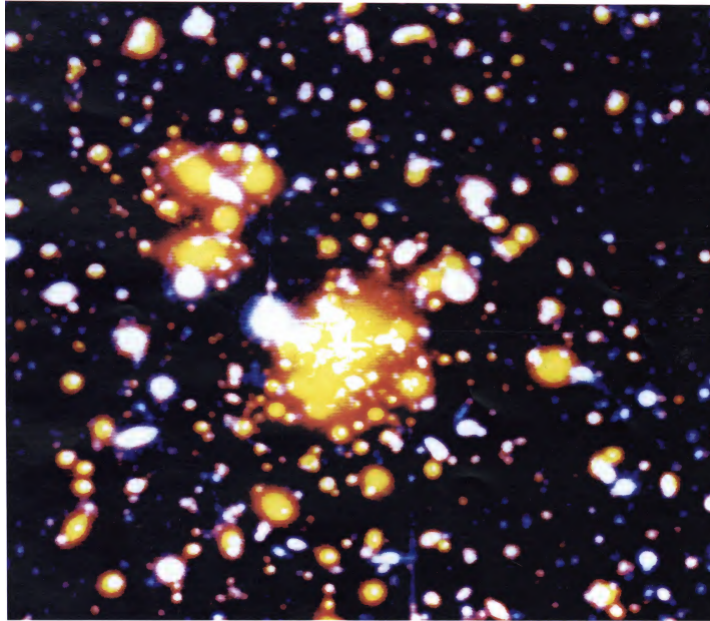


Figura 18: Lente débil producto de la luz del cúmulo Abell 1689. Las galaxias azules se curvan débilmente alrededor de la lente naranja central.

Este caso es del que se presenta más frecuentemente en el universo, de acuerdo a las observaciones que se han hecho hasta la fecha. Y justamente son útiles para poder estudiar la distribución, no solo de materia bariónica si no de materia oscura presente en la fuente. Adicionalmente también se puede estudiar la evolución en el tiempo de las estructuras del universo.

Ha habido varios estudios recopilatorios para estudiar la evolución de la aceleración del universo, uno de ellos fue el Dark Energy Force Report (en 2006) y en 2010 el llamado Decadal Survey.

4.4.3. Microlensing.

El ejemplo más característico es el que se dio en el eclipse solar de 1919, que se muestra en la imagen que sigue. Donde se pudo medir el ángulo de deflexión α , con $\alpha=1.7''$.

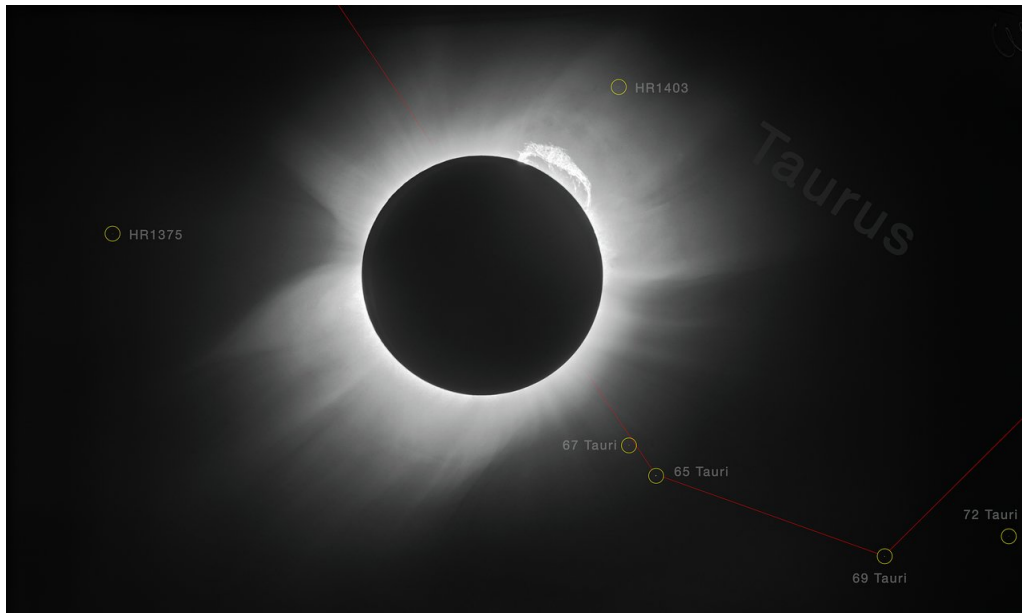


Figura 19: Foto tomada en África, del eclipse de 1919, donde se logró medir el ángulo de deflexión de la luz del sol.

El origen de los primeros avistamientos, en otros sistemas, vienen desde la década de los 80s. Fue con el descubrimiento de que las estrellas podían afectar el brillo producido en las imágenes de cuántares que se tuvo el primer antecedente.

El astrónomo noruego Sjur Resfdal participó notablemente en estas observaciones. Su nombre fue otorgado a una supernova estudiada, SN Resfdal. En esta se pudo observar una lente con el efecto llamado la cruz de Einstein.

Esta supernova fue la primera que se detecto por medio de la reconstrucción de varias imágenes (diversas lentes).

En estas lentes no se observa el efecto de imágenes múltiples ni arcos presentes y la distorsión esta mucho menos presente. Se caracteriza más por la magnificación de la luz del objeto detrás de la lentes.

Actualmente, con la búsqueda de exoplanetas lejanos a la Tierra, microlensing es una técnica útil que sirve para poder detectarlos, ya que no se basa en detectar la luz de estos. Aquí, cuando un planeta esta orbitando una estrella que actúa como lente de otra, este planeta produce una perturbación adicional que permite detectarlo [14]. ([vale:Leyendo sobre primeras observaciones en los 80s](#))

4.5. Geometría de la lente

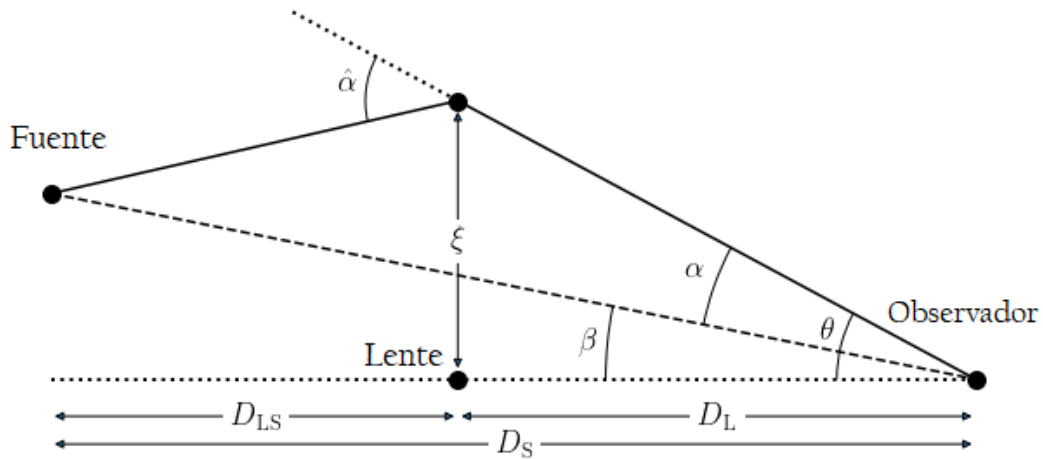


Figura 20: Diagrama de la fuente, la lente y el observador y los ángulos que forman entre ellos.

En la figura 20 se denotan los cuatro ángulos que se forman.

El ángulo θ : entre la línea horizontal de referencia del observador y la línea de la altura del observador a la lente (ξ); el ángulo α : de la línea formada del observador a ξ con la línea del observador a la fuente; el ángulo β formado con la línea horizontal de referencia y la línea que va del observador a la fuente y por último el ángulo $\hat{\alpha}$: formado por la línea recta extendida del punto del observador a la lente (ξ) y la que va de ξ a la fuente.

Esto para poder relacionarlos geoméricamente con las distancias, como sigue. (gaby:Explicar brevemente el papel de cada uno de los ángulos)

(vale:listo)

También se definen las distancias como distancias diámetro angulares; del observador a la lente D_L , del observador a la fuente D_S y de la lente a la fuente D_{LS} .

A partir de la figura 20 podemos encontrar una relación, una ecuación de la lente, para el ángulo θ .

Primero podemos encontrar una relación con el lado ξ , tomando la tangente que se forma en el ángulo θ tenemos:

$$\tan(\theta) = \frac{\xi}{D_L}.$$

Si reescribimos esto como la expansión en serie de Taylor (solo hasta el segundo término):

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{2\theta^3}{6} + \dots = \theta.$$

Por lo que tenemos

$$\theta = \frac{\xi}{D_L} \rightarrow \xi = \theta D_L.$$

También encontramos una relación para el lado opuesto a $\hat{\alpha}$ (que llamaremos c_1), que se forma extendiendo la línea desde el observador a ξ . Nuevamente tomando la tangente y reescribiendo:

$$\tan \hat{\alpha} = \frac{c_1}{D_{L_S}} \rightarrow c_1 = D_{L_S} \hat{\alpha}.$$

Adicionalmente, de la Relatividad General (PD), el ángulo de deflexión ($\hat{\alpha}$) está dado como:

$$\hat{\alpha} = \frac{4MG}{c^2 \xi}.$$

Y como $\theta - \beta = \alpha \rightarrow \beta = \theta - \alpha$,

$$\theta - \beta = \frac{c_1}{D_S}.$$

Obtenemos $c_1 = c_1$:

$$c_1 = \hat{\alpha} D_{L_S} = (\theta - \beta) D_S.$$

Con $\alpha = \frac{D_{L_S}}{D_S} \hat{\alpha}$.

Por lo que ahora, si multiplicamos la relación para θ con la de $(\theta - \beta)$:

$$\theta(\theta - \beta) = \frac{\xi}{D_L} \frac{\hat{\alpha} D_{L_S}}{D_S}.$$

Con $\xi \hat{\alpha} = \frac{4MG}{c^2}$:

$$\theta(\theta - \beta) = \frac{4MG}{c^2 D_L} \frac{D_{L_S}}{D_S}.$$

Donde la solución de esta ecuación esta dada por:

$$\theta^2 \pm = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \theta_E^2}.$$

Si $\beta = 0$:

$$\theta_E^2 = \frac{4MG}{c^2 D_L} \frac{D_{L_S}}{D_S},$$

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{L_S}}{D_S}.$$

Definiendo la distancia efectiva $D_{ef} = \frac{D_{L_S}}{D_S}$ y reemplazando:

$$\theta_E = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} D_{ef}.$$

Para llegar a esta ecuación consideramos que la lente se puede modelar como una esfera singular isotérmica (ISS).

En las lentes se pueden observar arcos formados por la luz de la fuente y los llamados anillos de Einstein (como en la figura 21). Este caso se da con $\alpha = 0$ cuando la fuente y la lente están muy bien alineadas centro a centro con el observador, sin embargo este último arreglo no es muy común.

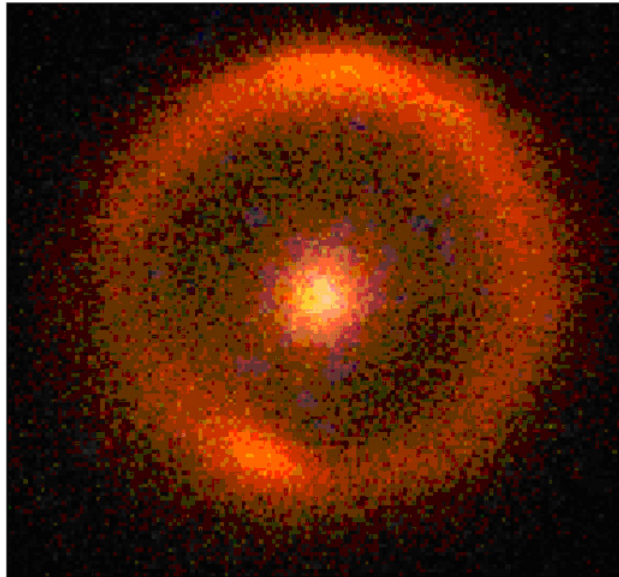


Figura 21: Galaxia B1938+666 alineada con su lente (una galaxia) que forma un anillo de Einstein perfecto.

Hay diferentes tipos de lentes, tres, que se pueden observar, dependiendo de las características de la imagen (o imágenes) de la fuente y la fuente de la lente (más o menos másiva).

Como referencia de los valores que toma θ_E , en un artículo de 2018 donde se recompila una muestra grande de lentes gravitacionales (??).

(jav: Este podría ser util:

<http://www.hep.shef.ac.uk/cartwright/phy323/GravLensBasics.pdf>

)

4.6. Estadística bayesiana.

ω_0, ω_1 La teoría de probabilidad es un área de estudio matemático que a partir de un determinado evento, por ejemplo en un experimento o un fenómeno, busca saber que tan posible es un resultado u otro.

Históricamente el estudio de la teoría se remonta a los juegos de apuestas o de azar, con Jakob Bernoulli haciendo una de las primeras importantes aportaciones a la teoría: describiendo la teoría débil de números grandes, postulando las probabilidades de un evento aleatorio dadas varias repeticiones.

Andrei Markov, en el siglo XIX, realizó otra gran aportación a la teoría. Introdujo variables dependientes para el estudio de la probabilidad de un cierto evento, suponiendo que este evento dependiera también del anterior [19].

Es de aquí que nació el concepto de cadenas, de probabilidades ligadas.

Dada la probabilidad de un evento A: $P(A)$ La probabilidad de un evento A dependiente de un evento B:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

La probabilidad de un evento A independiente de B:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Teorema de Bayes.

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Que se puede aplicar de forma general para un los datos de un modelo.

En cuyo caso nos dice la probabilidad de que dados los datos del modelo, A, se obtenga B (el vector parámetro propuesto).

Está definido por la información previa del modelo (prior), el posterior, que es la probabilidad de obtener los parámetros propuestos y el likelihood, que se detallará a continuación.

Adoptando los datos de nuestro modelo como D, los parámetros como B que están dados bajo una hipótesis propuesta H.

Chi cuadrada.

Una forma de medir la desviación de un conjunto de datos, observacionales y teóricos es mediante una prueba de chi. Muy utilizada en inferencia estadística. Esta definida como:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{D_o - D_t}{\sigma} \right)^2.$$

Donde σ es el ancho del error de nuestros datos observados.

Posteriori.

Donde el posteriori corresponde a $P(\theta|D, H)$ Y como su nombre lo indica representa la probabilidad posterior a obtener más información del proceso. Además es proporcional al likelihood.

Likelihood.

Definido como $P(D|\theta, H)$: y es indicativo de la posibilidad de ocurrencia considerando información experimental D.

A su vez el likelihood se relaciona con la chi-cuadrada por:

$$L = L_0 \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right).$$

Prior.

Corresponde a $P(\theta|H)$ y nos indica la probabilidad correspondiente a previo adquirir cualquier tipo de información. Si fijamos el prior como una constante c entonces cualquier parámetro tiene igual probabilidad. Es por ello que el prior y el likelihood son proporcionales [20].

4.6.1. Método Monte Carlo.

No se sabe a ciencia cierta cuando exactamente se da el origen del método. Podría remontarse al siglo XVIII, con el problema del cálculo de π , de probabilidad relacionada a la geometría del círculo (Problema de Buffon).

Lo que si se sabe es que la noción del método de Monte Carlo fue propuesta en 1946, por Stanislaw Ulam.

Fue planteado a partir de la observación de juegos de azar como el solitario. En donde Ulam se dio cuenta de que era más efectivo estudiar la probabilidad de tener un solitario por la experimentación repetida de cuántas veces se obtenía cuando se bajaban las cartas, que obtenerla sacando todas las combinaciones posibles de las cartas.

Es así que se nombro el método por Nicholas Metropolis, a partir del formalismo presentado por John Von Neumann y Stanislaw Ulam.

Posteriormente fue implementado, por medio de un algoritmo, en un problema de distribución estadística, en el proyecto MANIAC, en 1952.

Y finalmente Wilfred Keith Hastings, fundamento matemáticamente el algoritmo Metropolis, de aquí que sea algoritmo Metropolis-Hastings [19].

5. Metodología.

A continuación se explica el método MCMC, junto con el algoritmo Metropolis-Hastings.

5.1. Cadenas de Markov en Montecarlo (MCMC).

5.1.1. Funcionamiento.

¿Qué es un proceso estocástico?

Un proceso que hace referencia a los distintos estados que toman cierta observación. Donde estos varían con el tiempo y no se puede predecir el valor que tomara un estado, en cambio a cada uno se le especifica una probabilidad de ocurrencia.

Las cadenas se pueden pensar como una serie de estados que se pueden tomar en un cierto proceso estocástico. Pasar de un estado a otro está sujeto y ligado únicamente por estado inmediato anterior [21].

Para cada estado: $i \in I$, donde I es el espacio de los estados.

El espacio de probabilidades (Ω, F, P) , donde λ es una medición en I y también se puede pensar como una distribución si $\sum_I \lambda_i = 1$; Con F es un set de subsets de Ω . [22]

En donde la probabilidad de cada medición: $\lambda_i = P(i)$

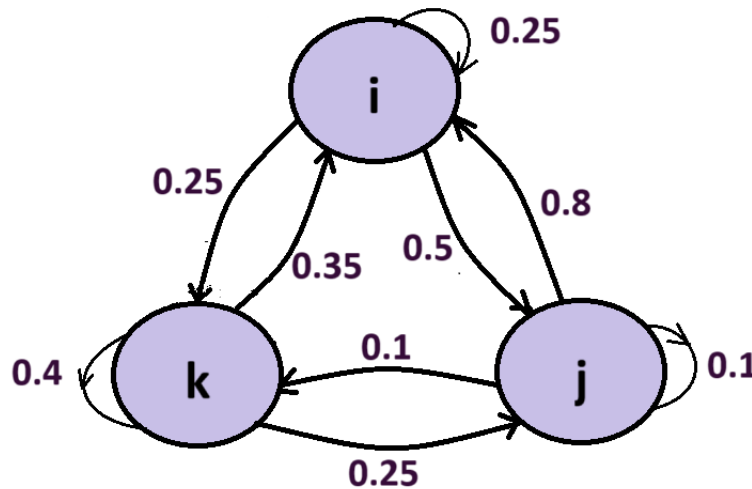


Figura 22: Ejemplo de diagrama de cadenas de Markov de tres estados: i, j y k. En donde cada línea une cada posible estado y está indicada la probabilidad de cada evento.

En la figura 21 podemos ver representado un proceso estocástico, con cadenas de Markov. Donde para cada posible estado, incluyendo la ocurrencia del mismo estado, está indicada su probabilidad. Por ejemplo, para el estado k, el siguiente que tiene más probabilidad de

ocurrencia es pasar al estado i .

Toda esta teoría de estadística bayesiana y por tanto el método de Monte Carlo pueden ser aplicados a modelos matemáticos y físicos.

No solo el algoritmo Metropolis-Hastings, si no cualquier otro pueden ser llevados a cabo usando distintos lenguajes de programación. En este caso será en Python [23].

Esto se basará fuertemente en un proceso de aceptación y rechazo de nuevos pasos, basados en la prueba de chi-cuadrada (también likelihood) que se explican a continuación.

5.2. Algoritmo Metropolis-Hastings.

Dado que estamos interesados en recrear una muestra para un modelo, asumimos que esta tiene una cierta distribución de probabilidad.

En el caso del algoritmo Metropolis-Hastings, propuesto primero como Metropolis (1953) y luego implementando Hastings (1970) es una forma de poder recrear una distribución con cadenas usando una distribución estacionaria uniforme.

La distribución en este caso es tal que todo el espacio de parámetros en un tiempo será alcanzada y esto se hace por medio de caminantes.

Para este algoritmo el principio es enviar un caminante a explorar el espacio fase. Esta exploración será por medio de aceptación y rechazo de un nuevo paso (inmediato al anterior). De forma que a medida que más espacio recorra el caminante se construirá la distribución de probabilidad de esta.

5.2.1. Parámetros de una pendiente.

Podemos ejemplificar el uso del algoritmo para el siguiente caso.

Tenemos la ecuación que describe una pendiente, $y = mx + b$. Donde m y b son los dos parámetros que pueden tomar valores en los reales.

Queremos obtener unos datos falsos o sintéticos, que sirvan como los datos observados. Y a partir de ellos, usando el algoritmo, inferir cuáles deben ser los valores de m y b .

Así que en python, nos encargamos de: 1. Escribir la ecuación de la pendiente, de donde generaremos los datos falsos (usando $m=3$ y $b=5$). Estos datos serán los observados.

2. Escribir la expresión para la chi-cuadrada y el likelihood, que nos ayudaran a evaluar que tan bien se ajustan los datos teóricos a los observados.

3. Utilizar el algoritmo para inferir los mejores parámetros, utilizando el criterio de chi-cuadrada.

4. También probamos como se comporta la chi-cuadrada a medida que aumentamos o disminuimos el número de pasos de los caminantes y también al disminuir o aumentar el tamaño de paso.

Aquí la ecuación de la pendiente, es nuestra función modelo. Cuando le damos ciertos valores a los parámetros evaluamos que tan bien se ajustan y son rechazados o aceptados como un nuevo paso.

1. Generamos los datos sintéticos.

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

##Datos con funcion modelo
x_ave= np.arange(0, 30, 1)
def eq_recta (m, b):
    y=[m*i +b for i in x_ave]
    return y
y_teo=eq_recta(3, 5)

#Los hacemos pasar por experimentales, agregando errores
posible_errores=np.arange(-15,15)

random.seed(35) #Usamos una semilla para que la selección random de
                #errores no cambie

Errores=random.choices(posible_errores, k=len(x_ave)) #Generamos los
                                                       #errores para cada valor de "y"
Errores_abs = list(map(abs, Errores))

#Sumamos los errores y los valores en "y" obtenidos de la función para
#obtener nuestros datos experimentales u observados.
y_obs=list(map(lambda D, e :D+e , y_teo, Errores))

#Gráficamos
plt.errorbar(x_ave, y_obs, yerr=Errores_abs, fmt='o',label="Pendiente",
color="darkblue")
plt.title("Ecuación de pendiente: Datos experimentales", fontsize=15)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
```

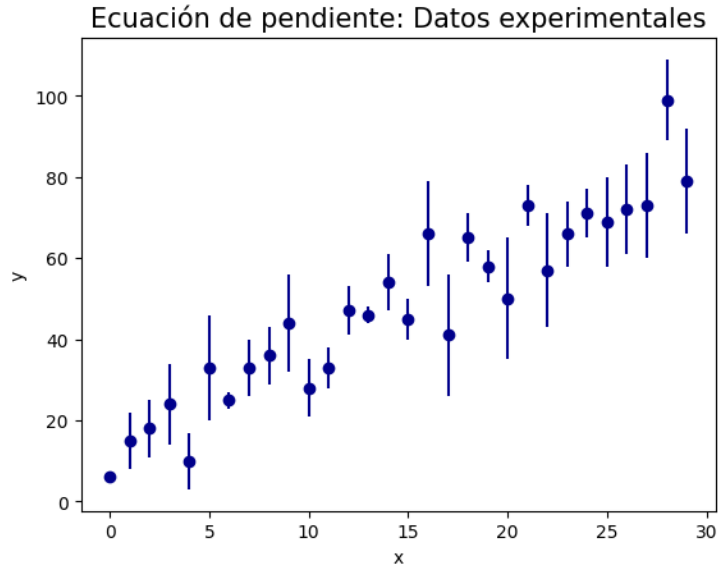



Figura 23: Gráfica de datos observables de pendiente.

2. Definimos la chi-cuadrada y el likelihood, respectivamente.

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{D_o - D_t}{\sigma} \right)^2.$$

$$L = L_0 \exp \left(-\frac{\chi^2}{2} \right).$$

```
#Chi-cuadrada
def chi_squared(par1,par2):
    y_each=eq_recta(par1,par2)
    chi= list(map(lambda x_obs, x_teo,error:(x_obs-x_teo)**2/(error)**2,
    y_obs, y_each, Errores))
    suma= np.sum(chi)
    return (suma)

#Likelihood
def likelihood(Dobs, Dteo, sigma ):
    L= np.exp(-chi_squared(Dobs, Dteo, sigma)/2)
    return L
```

Además del logaritmo del likelihood: $\log(L) = \frac{-\chi^2}{2}$

```

def log_likelihood(par1,par2):
    y_each=eq_recta(par1,par2)
    chi= list(map(lambda x_obs, x_teo,error:(x_obs-x_teo)**2/(error)**2,
    y_obs, y_each, Errores))
    log_like= - np.sum(chi) /2
    return log_like

```

3. Ahora el algoritmo en marcha.

```

#Definimos una función para encontrar el mejor set de parámetros
def best_parameters(par1,par2,chis):
    index_min=chis.index(min(chis))
    print ("Valor de chi minimo:", min(chis))
    print ("Mejores valores de m y b:",par1[index_min], par2[index_min])

# Caminantes
def walker(walks, initial_par, walk_size):
    chi_s=[]
    global x
    global y
    x=np.zeros(walks)
    y=np.zeros(walks)
    x[0]=initial_par[0]
    y[0]=initial_par[1]
    accepted=0

    for i in range (0, walks-1):
        rand_walk= walk_size*np.random.normal(0,1,2)
        x_nuevo= x[i] + rand_walk[0]
        y_nuevo= y[i] + rand_walk[1] #Pasos nuevos aleatorios

        chi1=chi_squared(x[i], y[i]) #Chi-squared para el paso anterior
        chi2=chi_squared(x_nuevo, y_nuevo)#Chi-squared para el nuevo
                                #paso

        if chi2<chi1: #Si la nueva chi-squared es menor
            x[i+1]= x_nuevo
            y[i+1]=y_nuevo #Que el paso nuevo sea los nuevos parámetros
            chi_s.append(chi2)

```

```

        accepted +=1

    elif chi2>chi1: #Si la nueva chi_squared es mayor
        chi_rand= random.uniform(0, (8/7)*chi2) #El val. random
        puede tomar valores por encima o por debajo de chi2
        if chi2 < chi_rand: #Le damos oportunidad de que pase si es
            #menor que el val. random de chi_squared
            x[i+1]= x_nuevo
            y[i+1] =y_nuevo
            chi_s.append(chi2)
            accepted +=1

    elif chi2 > chi_rand:
        (x[i+1], y[i+1])=(x[i], y[i]) #En caso contrario se
            #queda con los parámetros que inicio
        chi_s.append(chi1)

    best_parameters(x, y, chi_s)
    print ("Acceptance rate:", accepted/walks)

#Condiciones iniciales
initial_par=[-12,10]
walker (500, initial_par, walk_size=1)
plt.plot(x, y, label="walker 1", color="c")

initial_par=[10,12]
walker (500, initial_par, walk_size=1.3)
plt.plot(x, y, label="walker 2", color="y")

initial_par=[-13, 0]
walker (500, initial_par, walk_size=1.5)
plt.plot(x, y, label="walker 3", color="dimgray")
plt.xlabel("Parameter:m")
plt.ylabel("Parameter:b")
plt.legend()

```

Donde este es el output de la función, para cada correspondiente cadena:

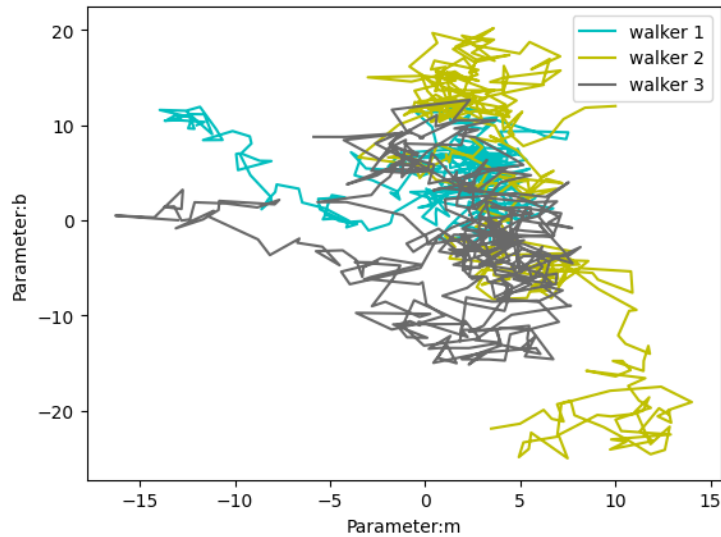


Figura 24: Caminantes en es el espacio de parámetros de m y b.

Valor de chi minimo: 26.860920437065023

Mejores valores de m y b: 2.535558209174777, 6.501683830066526

Acceptance rate: 0.714

Valor de chi minimo: 34.752859062187355

Mejores valores de m y b: 2.3399626522983707, 8.768281651869652

Acceptance rate: 0.686

Valor de chi minimo: 30.523467859641244

Mejores valores de m y b: 2.6275079747836516, 5.012961335652319

Acceptance rate: 0.732

Ahora aumentamos más pasos.

```
#Condiciones iniciales
initial_par=[-12,10]
walker (2000, initial_par, walk_size=0.75)
plt.plot(x, y, label="walker 1", color="c")

initial_par=[10,12]
walker (2000, initial_par, walk_size=1)
plt.plot(x, y, label="walker 2", color="y")

initial_par=[-13, 0]
walker (2000, initial_par, walk_size=1.2)
plt.plot(x, y, label="walker 3", color="dimgray")
```

```
plt.xlabel("Parameter:m")
plt.ylabel("Parameter:b")
plt.legend()
```

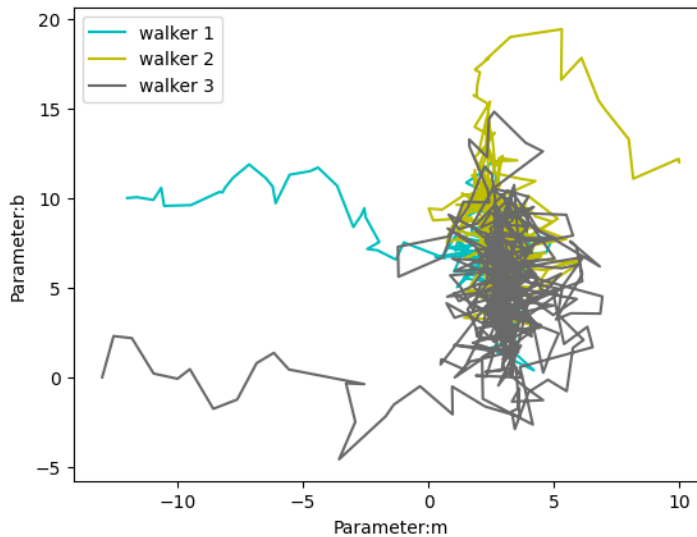


Figura 25: Caminantes en el espacio de parámetros, aumentando número de pasos.

Valor de chi minimo: 26.300369971923793

Mejores valores de m y b: 3.0157473410821884, 5.82703278925277

Acceptance rate: 0.3195

Valor de chi minimo: 26.4522231825121

Mejores valores de m y b: 2.716959240891522, 8.672646015853115

Acceptance rate: 0.3305

Valor de chi minimo: 26.33627503194982

Mejores valores de m y b: 2.689396467187646, 5.647607824900238

Acceptance rate: 0.3065

En este último caso se modificaron los tamaños de paso para cada caminante y se restringe más el rango que puede tomar la chi aleatoria. Esto ya que haciendo varias pruebas se puede ver que convergen más rápido y mejor mientras más se restrinja este rango.

Si obtenemos las gráficas de contorno de chi y log likelihood.

```
par1_list= np.arange(-9, 14, 0.5)
par2_list=par1_list

X, Y = np.meshgrid(par1_list, par2_list)
Z= [[chi_squared(x, y)/30 for x in par1_list] for y in par2_list ]

fig,ax=plt.subplots(1,1)
#Dividimos en 10 regiones
cp = ax.contourf(X, Y, Z, np.linspace(1,20, 10), cmap="cividis")
fig.colorbar(cp) # Agregamos colores a gráfico
ax.set_title(' Chi values')
ax.set_xlabel('m')
ax.set_ylabel('b')
plt.show()
```

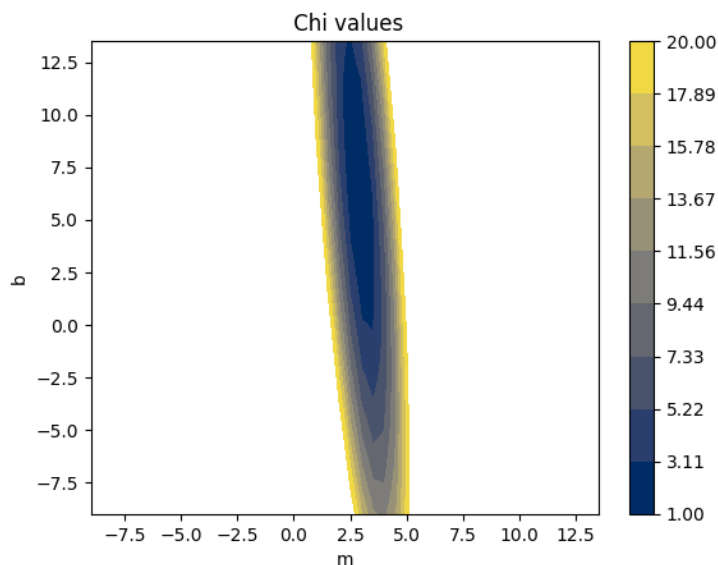


Figura 26: Gráfica de contorno de los valores de chi para cada par de parámetros.

```
par1_list= np.arange(-9, 14, 0.5)
par2_list=par1_list

X, Y = np.meshgrid(par1_list, par2_list)
Z= [[log_likelihood(x,y)/15 for x in par1_list] for y in par2_list ]
fig,ax=plt.subplots(1,1)
cp = ax.contourf(X, Y, Z, np.linspace(-20,-1, 10)) #Dividimos en 10 regiones
fig.colorbar(cp)
```

```

ax.set_title(' Log Likelihood')
ax.set_xlabel('m')
ax.set_ylabel('b')
plt.show()

```

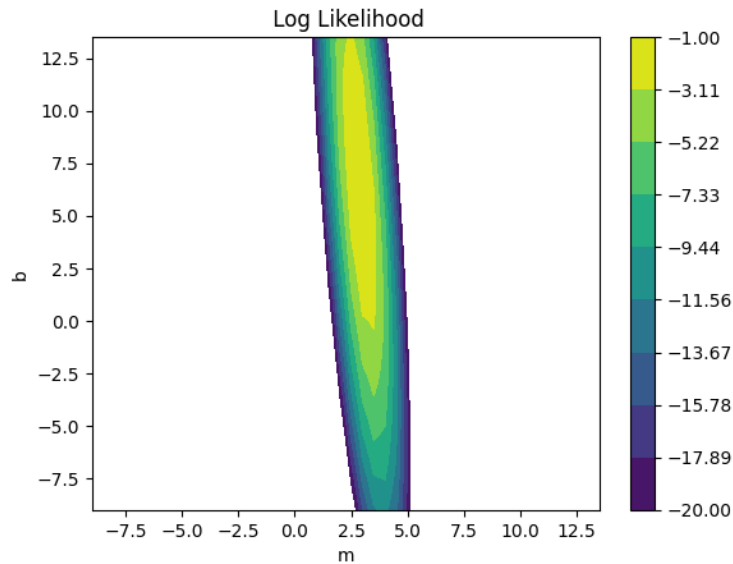


Figura 27: Gráfica de contorno de los valores del log likelihood para cada par de parámetros.

Podemos ver la distribución a posteriori en la siguiente gráfica, en un rango de valores de "m".

```

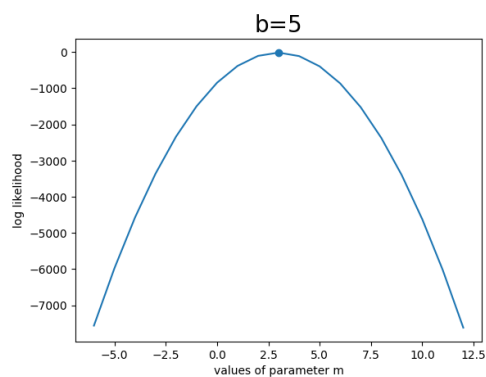
par1_list= np.arange(-9, 14, 0.5)
par2_list=par1_list

X, Y = np.meshgrid(par1_list, par2_list)
Z= [[chi_squared(x, y)/30 for x in par1_list] for y in par2_list ]

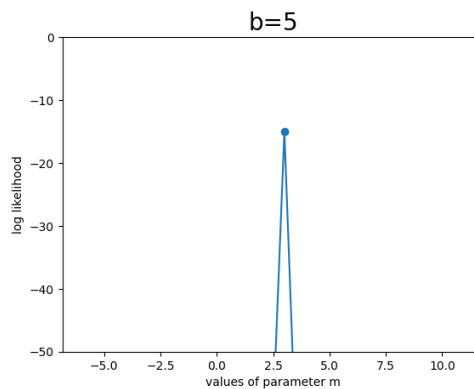
fig,ax=plt.subplots(1,1)
#Dividimos en 10 regiones
cp = ax.contourf(X, Y, Z, np.linspace(1,20, 10), cmap="cividis")

fig.colorbar(cp) # Agregamos colores a gráfico
ax.set_title(' Chi values')
ax.set_xlabel('m')
ax.set_ylabel('b')
plt.show()

```



(a) posteriori de $b=5$ y m cambiando en un rango .



(b) Zoom a posteriori de recta, con $b=5$ y m variando en un rango .

Figura 28: Distribución a posteriori de la ecuación de la recta utilizando $b=5$ y variando valores de m .

Vemos que a medida que se aumentan los pasos se mejora la inferencia del par de parámetros, además de que cada caminante tiene valores de aceptación distintos dependiendo del tamaño de paso usado.

5.3. Criterios de información.

Para poder contrastar y analizar el ajuste un modelo propuesto es común utilizar criterios como AIC y BIC. En donde por supuesto, se hace visible su necesidad al tener distintos modelos de los que se busque un mejor ajuste a los datos experimentales.

Los siguientes criterios de información tienen su origen en la Teoría de la Información y están basados en la probabilidad y número de parámetros de estos.

5.3.1. AIC.

El Criterio de Información Akaike, fue propuesto por Hirotogu Akaike, en 1974, debido al auge en el uso de modelos y herramientas de la estadística para describir un número finito de observaciones, en las áreas de Ingeniería y Ciencias.

Akaike creyó que era necesario un método eficiente, como el Likelihood, que fuera sensible ante los cambios de los parámetros del modelo.

Esta definido como:

$$AIC = 2k - 2 \ln L$$

O de la siguiente forma:

$$AIC = 2 \ln \frac{\exp k}{L}$$

En donde k es el número de parámetros del modelo y L es el mejor Likelihood, obtenido de la mejor combinación de parámetros [24].

5.3.2. BIC.

El Criterio de Información Bayesiano, se basa en un argumento de este estilo para obtener el likelihood. Fue propuesto por Hideon Schwarz en 1978, como una alternativa para analizar modelos, al ya propuesto por Akaike.

En el, se plantea que se puede maximizar el likelihood de los modelos, usándolos como límites de estimadores bayesianos.

$$BIC = k \ln(n) - 2 \ln(L)$$

Donde k es el número de parámetros y n el tamaño de la muestra o número de observaciones. En este criterio se penaliza más a los modelos con más de 7 parámetros, a comparación de AIC [25].

6. Resultados y discusión

1. La primera parte se realizó haciendo un código en python que hiciera que diversos caminantes aleatorios exploraran el espacio de parámetros, para encontrar el mejor valor de chi-cuadrada. Los datos observacionales utilizados son: datos de $H(z)$ con z .
2. Después se pondrá en marcha SimpleMC, de igual manera para cada modelo. Usando datos de HD, SN Y SL, donde muchos de los datos observacionales utilizados de lentes fuertes son recopilación de distintos surveys. De los que se utilizarán son: el redshift (z) de la lente, de la fuente, el ángulo de Einstein reportado de la fuente y también el valor de la velocidad de dispersión del halo de DM.

Para la parte 2, vemos como la teoría de las lentes se conecta con los datos observaciones, para cada modelo de DE como indica la siguiente figura 29.

Para cada modelo de DM:

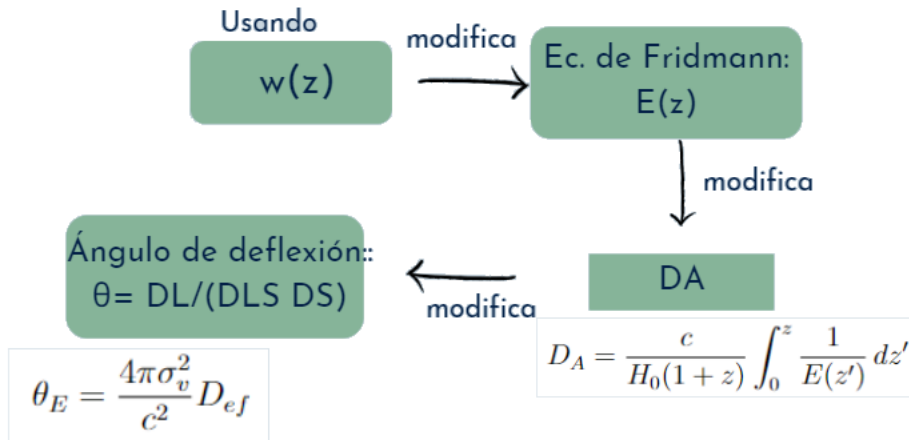


Figura 29: Diagrama de las modificaciones que se hace al parámetro de la ecuación de estado y como éste modifica el ángulo de deflexión.

Donde los datos observacionales a ser utilizados, para obtener las distancias diámetro angulares (D_A), provendrán de los tres sets de datos presentados en la tabla 1 siguiente.

$$\chi_{SL}^2 = \sum \frac{[D_{teo} - D_{obs}]^2}{(\sigma_{error})^2}$$

Así como los datos de HD y SN utilizados, los de SL provienen de distintos surveys y los valores utilizados de z_l y z_s para obtener D_A varían en los rangos de la siguiente tabla 2.

Y en la siguiente figura (30) se presenta una parte de la recopilación de datos de lentes fuertes.

Datos observacionales			
	Cronómetros cósmicos (HD)	Supernovas Ia (SN)	Strong Lensing (SL)
Origen	Modelado de $H(z)$ usando galaxias poco evolucionantes	Puntos agrupados de SN Ia, de la compilación Pantheon	Sistemas de Lentes fuertes de diversos surveys
Año de recopilación	2018	2018	2018
Número de datos	31	31	196

Cuadro 1: Los tres sets de datos principales usados para SimpleMC.

Sistemas de Lentes fuertes (SL)				
Survey	Cantidad de sistemas	Rango de redshift (z_l)	Rango de redshift (z_s)	Rango de σ
SLACS	107	De 0.0625 a 0.958	De 0.196 a 3.595	De 98 km/s a 342 km/s
BELLS	38			
SL2S	35			
CASTLES	11			
LSD	4			
DES	1			

Cuadro 2: Los seis surveys de donde se obtuvieron todos los sistemas de Lentes fuertes además de los rangos de los redshift y la velocidad de dispersión.

System Name	Survey	z_l	z_s	$\theta_E (")$	σ_0 (Km s $^{-1}$)	Reference
SDSSJ0819+4534	SLACS	0.194	0.446	0.85	225 \pm 15	Auger et al. (2009)
SDSSJ0959+4416	SLACS	0.237	0.531	0.96	244 \pm 19	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1029+0420	SLACS	0.104	0.615	1.01	210 \pm 11	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1103+5322	SLACS	0.158	0.735	1.02	196 \pm 12	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1306+0600	SLACS	0.173	0.472	1.32	237 \pm 17	Auger et al. (2009)
SDSSJ1313+4615	SLACS	0.185	0.514	1.37	221 \pm 17	Auger et al. (2009)
SDSSJ1318-0313	SLACS	0.240	1.300	1.58	213 \pm 18	Auger et al. (2009)
SDSSJ1420+6019	SLACS	0.063	0.535	1.04	205 \pm 10	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1443+0304	SLACS	0.134	0.419	0.81	209 \pm 11	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1614+4522	SLACS	0.178	0.811	0.84	182 \pm 13	Bolton et al. (2008)
SDSSJ1644+2625	SLACS	0.137	0.610	1.27	229 \pm 12	Auger et al. (2009)
SDSSJ1719+2939	SLACS	0.181	0.578	1.28	286 \pm 15	Auger et al. (2009)
HE0047-1756	CASTLES	0.408	1.670	0.80	190 \pm 27*	Ofek et al. (2006)
HE0230-2130	CASTLES	0.522	2.162	0.87	240 \pm 34*	Ofek et al. (2006)
J0246-0825	CASTLES	0.723	1.686	0.53	265 \pm 37*	Inada et al. (2005)
HE0435-1223	CASTLES	0.454	1.689	1.22	257 \pm 36*	Morgan et al. (2005)
SDSSJ092455.87+021924.9	CASTLES	0.393	1.523	0.88	230 \pm 32*	Inada et al. (2003)
LBQS1009-0252	CASTLES	0.871	2.739	0.77	245 \pm 34*	Hewett et al. (1994)
J1004+1229	CASTLES	0.950	2.640	0.83	240 \pm 34*	Lacy et al. (2002)

Figura 30: Recopilación de datos tomada para calcular D_A y a su vez θ_E .

6.1. Código MCMC propio.

6.1.1. Modelo w CDM

Al igual que en el ejemplo presentado de la recta (En la sección 5.2), seguimos los mismos pasos:

1. Escribir la ecuación de Friedmann y graficar nuestro set de datos observados.
2. Escribir la expresión para la chi-cuadrada y el likelihood, que nos ayudaran a evaluar que tan bien se ajustan los datos teóricos a los observados.
3. Utilizar el algoritmo para inferir los mejores parámetros, utilizando el criterio de chi-cuadrada.
4. También probamos como se comporta la chi-cuadrada a medida que aumentamos o disminuimos el número de pasos de los caminantes y también al disminuir o aumentar el tamaño de paso.

Utilizando el algoritmo siguiente (equivalente al de la sección 5.2), para los caminantes aleatorios, se tiene la siguiente inferencia:

```
#Datos observacionales
Hubble_data=open("Hz_all.dat", "r")

#Leemos el archivo de datos
z = Hubble_data[:, 0]
H_z = Hubble_data[:, 1]
errores = Hubble_data[:, 2]

#Gráficamos
plt.errorbar(z, H_z, yerr=errores, fmt='o', label= "H data",
color="darkblue")
plt.title("H(z) data", fontsize=20)
```

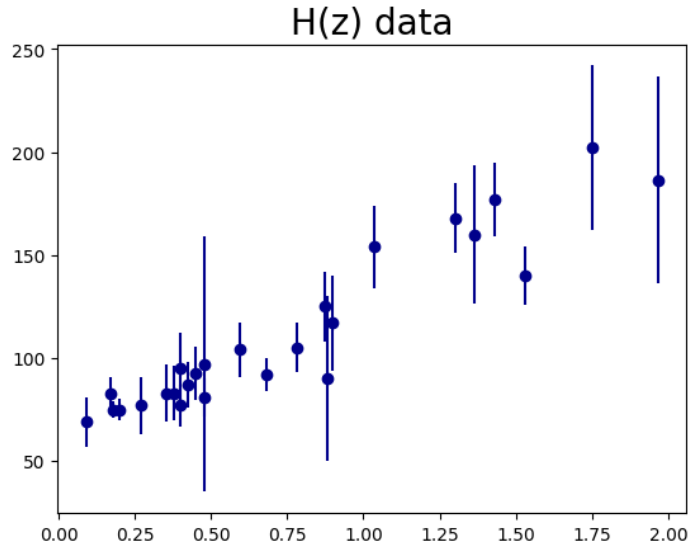


Figura 31: Gráfica de los datos observados de z y $H(z)$ de HD (cronómetros cósmicos).

Ahora utilizando ω CDM escribimos el respectivo código, junto con la chi-cuadrada y el likelihood.

```

# Datos teoricos
#####Ec. Friedman#####
def Hz(z, w , Omega_m0, Omega_r0, Ho):
    Hubble_z = Ho*np.sqrt(Omega_r0*(1+z)**4+(Omega_m0)*(1+z)**3
    +(1-Omega_m0-Omega_r0)*(lista_H=Hubble_z.tolist())
    return lista_H

#Chi-squared
def chi(w):
    y_teo=Hz(z, w, 0.31 , 9*10**(-5) , 67)
    chi= list(map(lambda x_obs, x_teo, error:(x_obs-x_teo)**2/(error)**2
    , H_z, y_teo
    suma= np.sum(chi)
    return (suma)

#Log Likelihood
def log_likelihood(w):
    return -chi(w)/2

##Función para checar cuales fueron los mejores parámetros
def best_parameters(par1,chis):
    index_min=chis.index(min(chis))
    print ("Valor de chi minimo:", min(chis))

```

```
print ("Mejores valores del parámetro:",par1[index_min])
```

Ahora si ponemos en marcha los caminantes.

```
def walker(walks, initial_par, walk_size):
    global x_par
    global y_par
    chi_s=[]
    x_par=np.arange(1,walks+1)
    y_par=np.zeros(walks)
    y_par[0]=initial_par[0]

    for i in range (0, walks-1):
        y_nuevo= y_par[i] + walk_size*np.random.normal(0,1) #paso nuevo
                                                    #aleatorio

        chi2=chi(y_nuevo)
        chi1=chi(y_par[i])

        if chi2<chi1:
            y_par[i+1]=y_nuevo #que se le asigne el valor del paso nuevo
            chi_s.append(chi2)

        elif chi2>chi1: #si el nuevo es mayor
            chi_rand= random.uniform(0, 2*chi2) #puede tomar un valor
                #debajo o por encima
            if chi2 < chi_rand: #y le damos oportunidad de que pase si
                #es menor
                y_par[i+1] =y_nuevo
                chi_s.append(chi2)
            elif chi2 > chi_rand:
                y_par[i+1]=y_par[i] #se queda con el param. que inicio
                chi_s.append(chi1)
    best_parameters(y_par, chi_s)

walker (800, initial_par=[10], walk_size=0.7)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 1", color="c")
walker (800, initial_par=[-10], walk_size=0.7)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 2", color="y")
walker (800, initial_par=[15],walk_size=0.7)

plt.plot(x_par, y_par, label="walker 3", color="dimgray")
plt.xlabel("Walks")
plt.ylabel("Parameter: w")
plt.legend()
```

```
plt.show()
```

Siendo el output el siguiente:

Valor de chi minimo: 14.569122548474377

Mejores valores del parámetro: -0.966160991982502

Valor de chi minimo: 14.569707427293897

Mejores valores del parámetro: -0.8664904441790413

Valor de chi minimo: 14.569101925653687

Mejores valores del parámetro: -0.8722434691356019

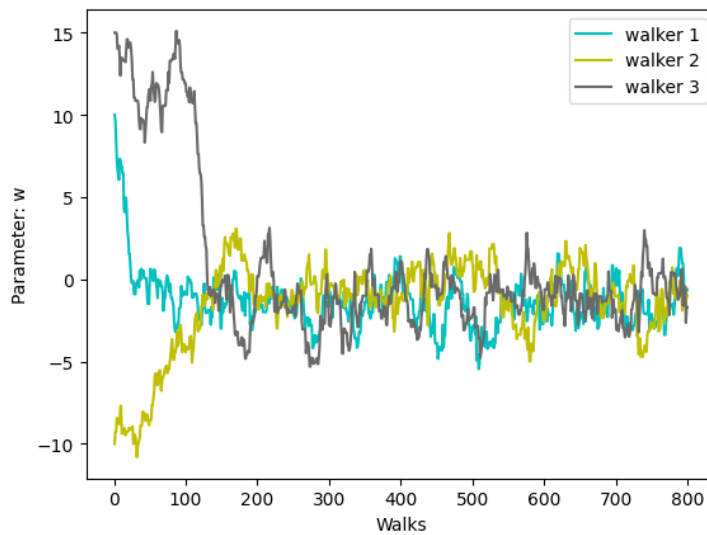


Figura 32: Caminantes en el espacio de los parámetros del modelo.

Vemos que el paso mayor (caminante verde) se acerca más rápido a un valor del parámetro de -0.9 (al que también llegan los demás). En este caso 900 pasos, para todos los caminantes, parecen suficientes para que los tres converjan.

El logaritmo del likelihood para un rango de parámetros se ve de esta forma.

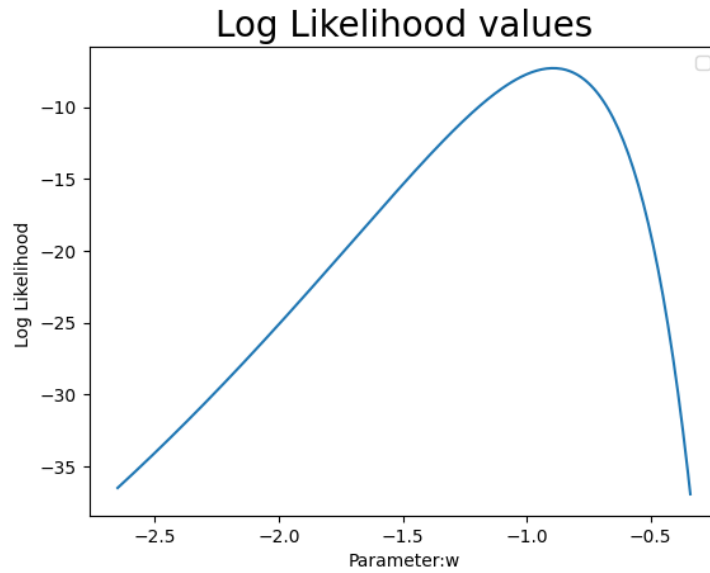


Figura 33: Con un tamaño de ancho de 0.01 para el parámetro en el rango elegido, se realiza el cálculo del logaritmo del likelihood.

En la figura 33 podemos ver como el máximo del likelihood se ve cuando el parámetro toma casi el valor de -1 y después decrece rápidamente.

6.1.2. Modelo CPL.

Escribimos el modelo junto con chi-cuadrada y el likelihood, usando el mismo conjunto de datos que el anterior. Solo cambiamos la ecuación de Friedmann.

```
#####Ec. Hubble#####  
def Hz(z, w0, w1 , Omega_m0, Omega_r0, Ho):  
    Hubble_z = Ho*np.sqrt(Omega_r0*(1+z)**4+(Omega_m0)*(1+z)**3 +  
        [(1-Omega_m0-Omega_r0)*  
        lista_H=Hubble_z.tolist()  
    return lista_H
```

Imponemos 3000 pasos y las condiciones iniciales siguientes:

```
walker (3000, initial_par=[10, -2], walk_size=1)  
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 1", color="c")  
  
walker (3000, initial_par=[-5,5], walk_size=0.5)  
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 2", color="y")  
  
walker (3000, initial_par=[0,0],walk_size=0.1)  
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 3", color="dimgray")  
  
walker (3000, initial_par=[3, -3],walk_size=0.1)  
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 4", color="m")
```

Ahora si ponemos en marcha los caminantes, obtenemos:

Valor de chi minimo: 14.55076342841301
Mejores valores de m y b: -0.9223639173307615, 0.9891224623431204
Acceptance rate: 0.31466666666666665

Valor de chi minimo: 14.535852075656077
Mejores valores de m y b: -0.8803033982809368 0.21012716275304727
Acceptance rate: 0.30266666666666664

Valor de chi minimo: 14.528068793634075
Mejores valores de m y b: -0.8500487655868372, 0.04395452844391112
Acceptance rate: 0.30266666666666664

Valor de chi minimo: 14.528206210790621

Mejores valores de m y b: -0.8978133285820753 0.10437042810706319
Acceptance rate: 0.30933333333333335

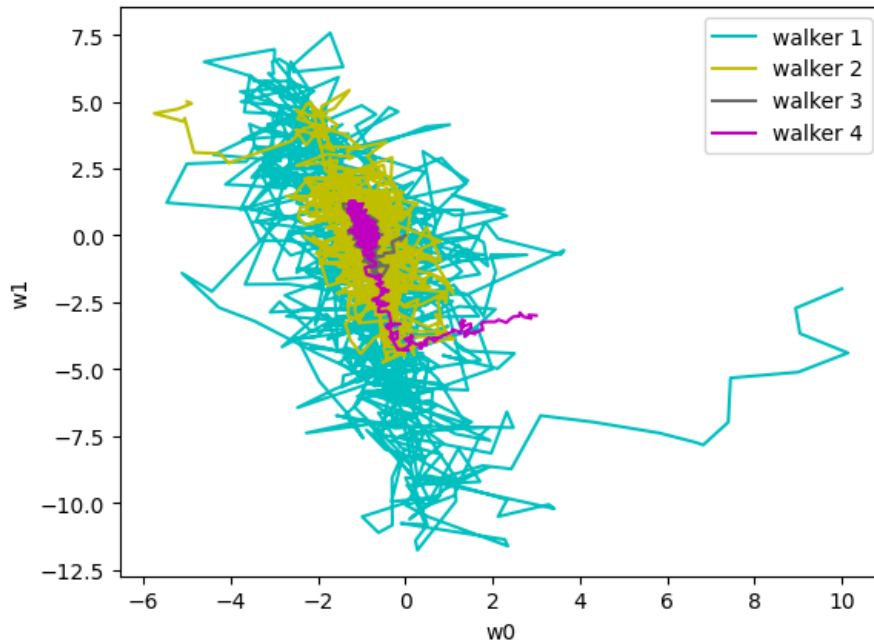


Figura 34: Caminantes en el espacio de ω_0 y ω_1 .

Como en el caso de los parámetros de la recta, en el modelo CPL también se obtenían caminantes más dispersos (con pasos mayores), pero cuando el rango que podía tomar la chi aleatoria era reducido (a su vez el ratio de aceptación) estos si parecían converger más.

Cada vez que el tamaño de paso aumentaba, en este caso donde se restringía más el paso, el caminante se dispersaba más por el espacio de parámetros.

Graficamos para obtener la gráfica de contorno de chi-cuadrada.

```
#Dividimos en nueve regiones y graficamos  
cp = ax.contourf(X, Y, Z_chi ,np.linspace(6.5,50, 9), cmap=plt.cm.YlGn_r)
```

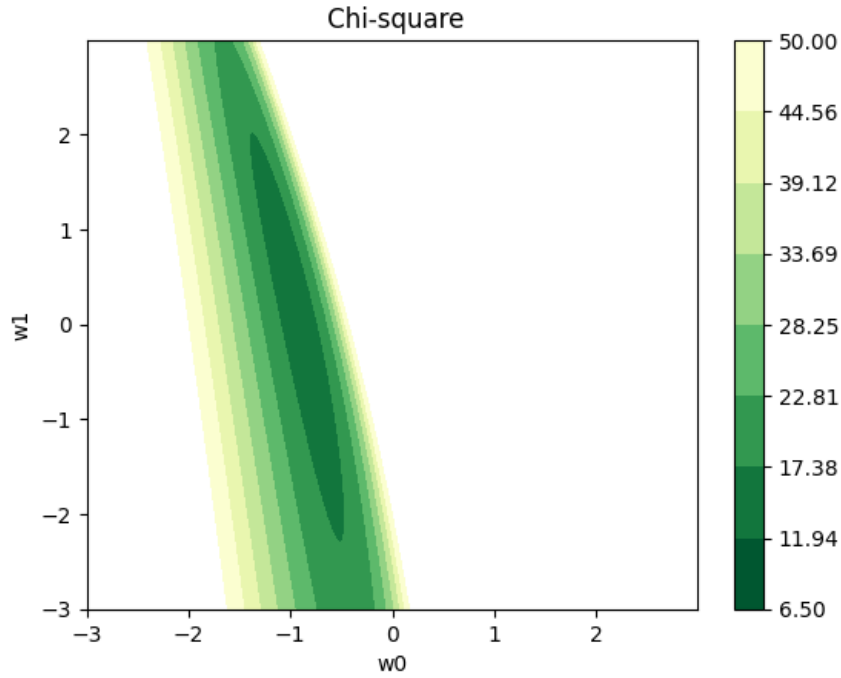


Figura 35: Valores de chi para combinación de ω_0 y ω_1 .

Graficamos para obtener la gráfica de contorno del likelihood.

```
#Dividimos en ocho regiones y graficamos.
cp = ax.contourf(X, Y, Z_lik ,np.linspace(-31, 0, 8), cmap="Reds")
```

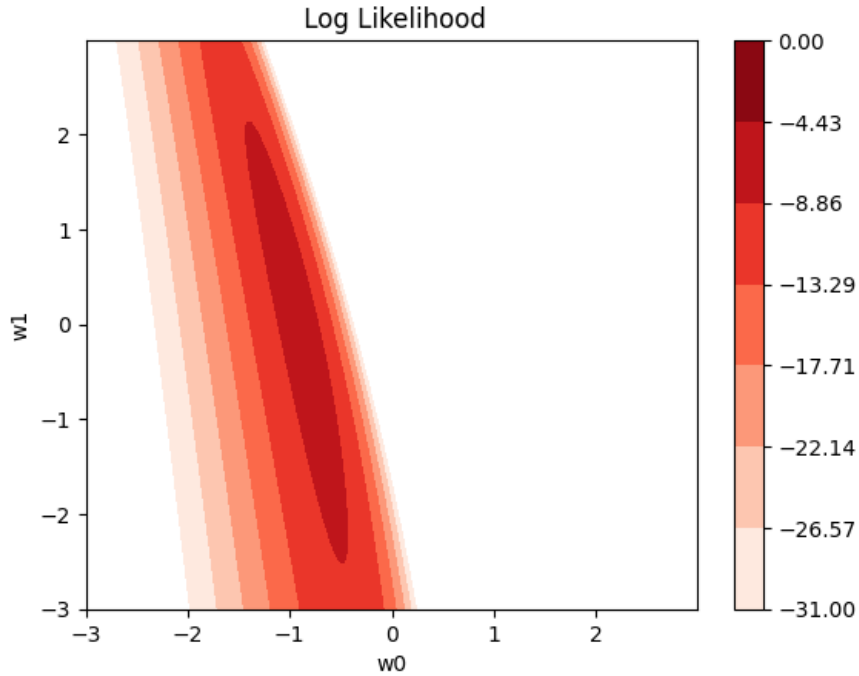


Figura 36: Valores del log de likelihood para combinación de ω_0 y ω_1 .

Al ser el caminante 3 el que mejor chi-cuadrada obtuvo, si gráficamos como se ven este set de parámetros en la función $H(z)$ contra z y comparando con los datos observacionales, tenemos:

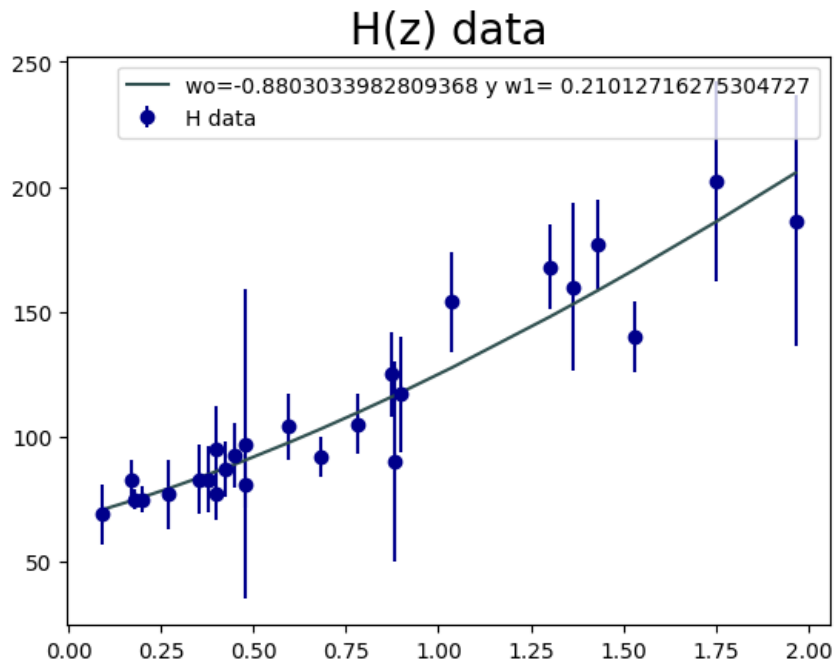


Figura 37: La curva de los parámetros que mejor se ajustan a los datos observados de $H(z)$ contra z .

6.1.3. Modelo JPB.

Ahora utilizando JBP escribimos el respectivo código, junto con la chi-cuadrada y el likelihood.

```
#####Ec. Hubble#####  
def Hz(z, w0, w1 , Omega_m0, Omega_r0, Ho):  
    Hubble_z = Ho*np.sqrt(Omega_r0*(1+z)**4+(Omega_m0)*(1+z)**3  
    + ((1-Omega_m0-Omega_r0)*(1+z)**(3*(1+w0))))  
    *np.exp((-3*w1*z**2)/3*(1+z)**2))  
    return Hubble_z
```

Ahora si ponemos en marcha los caminantes, tenemos los siguientes resultados.

Valor de chi minimo: 14.69394962503668

Mejores valores de w0 y w1: -0.8454708348926218 y 0.17265179499337083

Acceptance rate: 0.38166666666666665

Valor de chi minimo: 14.861765945834437

Mejores valores de w0 y w1: -1.1878953248688193, -0.1051373077583374

Acceptance rate: 0.389

Valor de chi minimo: 14.60989381749398

Mejores valores de w0 y w1: -0.560939475081294 y 0.28859258717983105

Acceptance rate: 0.375

Valor de chi minimo: 14.558667315710963

Mejores valores de w0 y w1: -0.9614001903693479 y -0.021233365447830603

Acceptance rate: 0.385

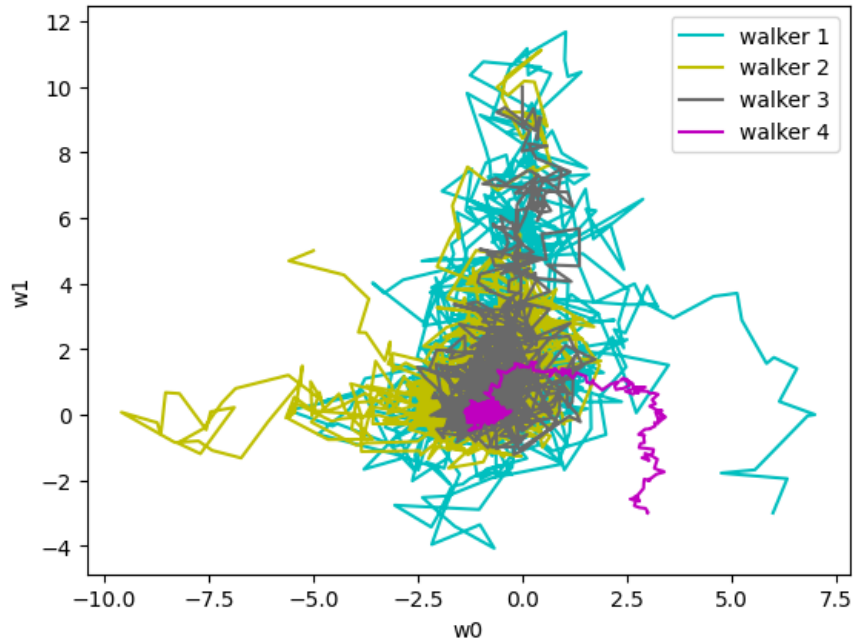


Figura 38: Caminantes en el espacio de de ω_0 y ω_1 .

Para los cuatro caminantes se les redujo el rango que podía tomar la chi aleatoria, justo como en el caso de CPL. Se pudo ver que estos parecían converger más, de igual manera, sin embargo los valores de chi obtenidos siguieron siendo altos.

Gráficamos la chi-cuadrada dividiendo en doce partes.

```
#Dividimos en 12 regiones y gráficamos.
cp = ax.contourf(X, Y, Z_chi ,np.linspace(12, 55, 12),
cmap=plt.cm.YlGn_r)
```

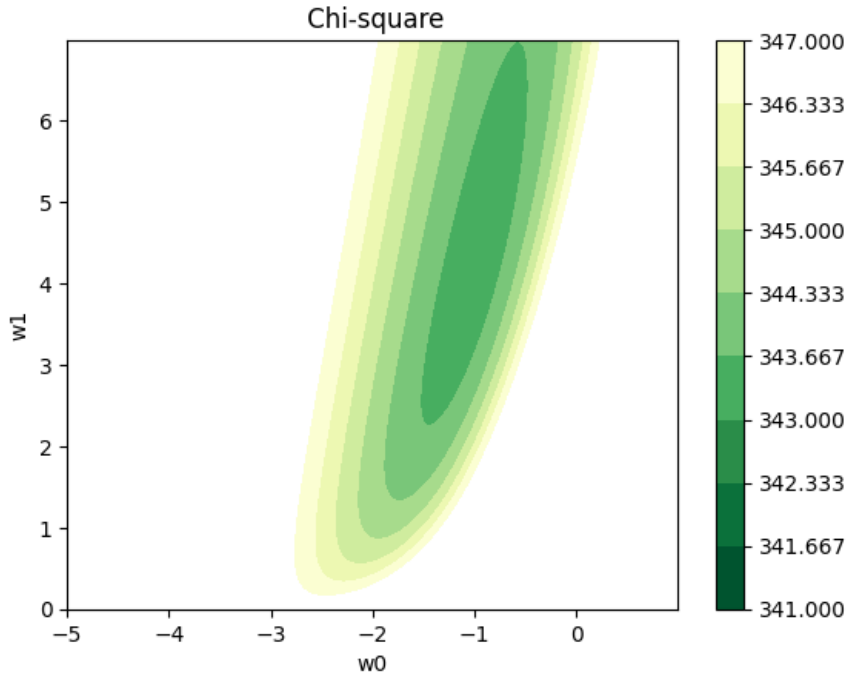


Figura 39: Chi para un rango de ω_0 y ω_1 .

```
#Dividimos en 10 regiones y gráficamos.
cp = ax.contourf(X, Y, Z_lik ,np.linspace(-30, -5, 10), cmap="Reds")
```

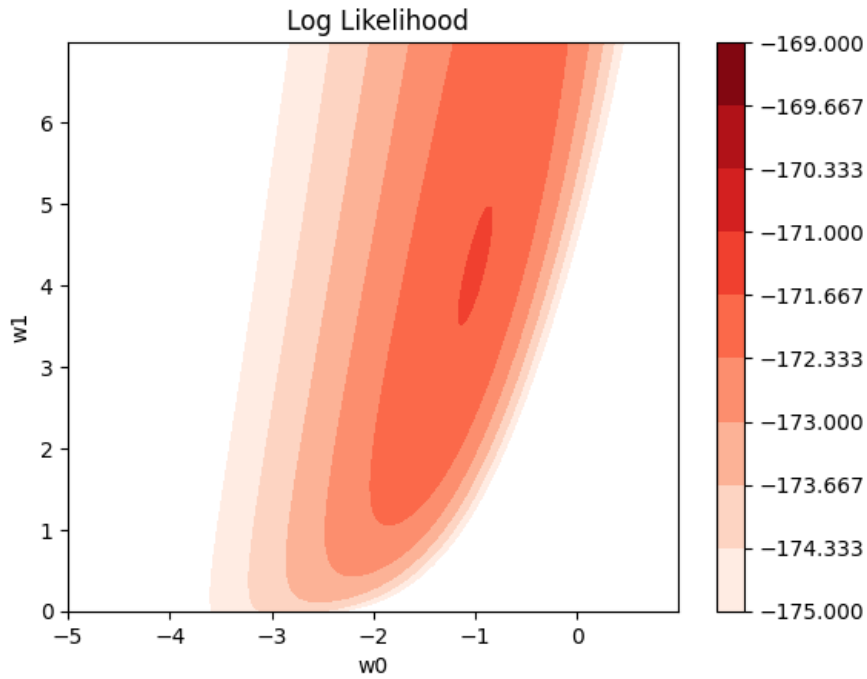


Figura 40: Log likelihood para un rango de ω_0 y ω_1 .

En este caso se gráfico el mejor par de parámetros obtenidos en base a la chi-cuadrada mínima, junto con los datos observados para la ecuación de $H(z)$:

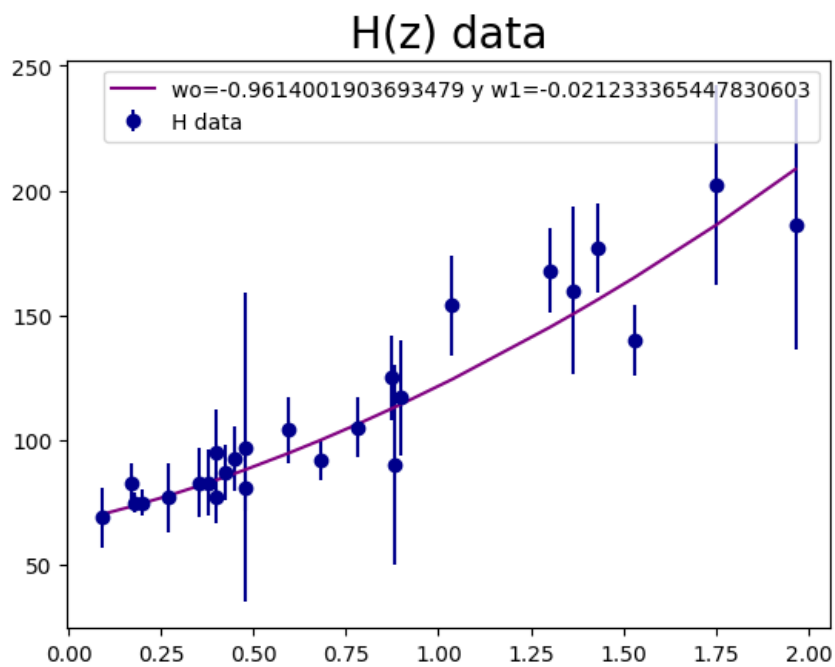


Figura 41: Los mejores parámetros de chi-cuadrada para el modelo JPB junto con los datos observados.

6.1.4. Modelo FSLL(I)

Ahora utilizando el modelo FSLL(I) escribimos el respectivo código, junto con la chi-cuadrada y el likelihood. Cabe resaltar que los datos observacionales son los mismos que en los otros modelos de DE, de la figura ??.

```
#####Ec. Hubble#####
def Hz(z, w0, w1 , Omega_m0, Omega_r0, Ho):
    Hubble_z = Ho*np.sqrt(Omega_r0*(1+z)**4+(Omega_m0)*(1+z)**3 +
        ((1-Omega_m0-Omega_r0)*(1+z)**(3*(1+w0)))*
        np.exp(3*w1*np.arctan(z)/2)*((1+z**2)**(3*w1/4))*(1+z)**(-3*w1/2))
    return Hubble_z
```

Ahora si ponemos en marcha los caminantes, obtenemos los siguientes datos:

```
walker (4000, initial_par=[6, -3], walk_size=1)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 1", color="c")

walker (4000,initial_par=[-5,5 ],walk_size=0.5)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 2", color="y")

walker (4000, initial_par=[0,10],walk_size=0.3)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 3", color="dimgray")

walker (4000, initial_par=[3,-3],walk_size=0.1)
plt.plot(x_par, y_par, label="walker 4", color="m")
```

Valor de chi minimo: 14.543989785906794

Mejores valores de w0 y w1: -1.1468462819418788 ,0.5967787348727602.

Valor de chi minimo: 14.53288533357161

Mejores valores de w0 y w1: -1.1347821010202388, 0.41480072577301746.

Valor de chi minimo: 14.53283845474255 Mejores valores de w0 y w1: -0.8833212913688362, -0.03719080362004304

Valor de chi minimo: 14.532918141540502

Mejores valores de w0 y w1: -0.8891884261836888 ,0.10260475366039662

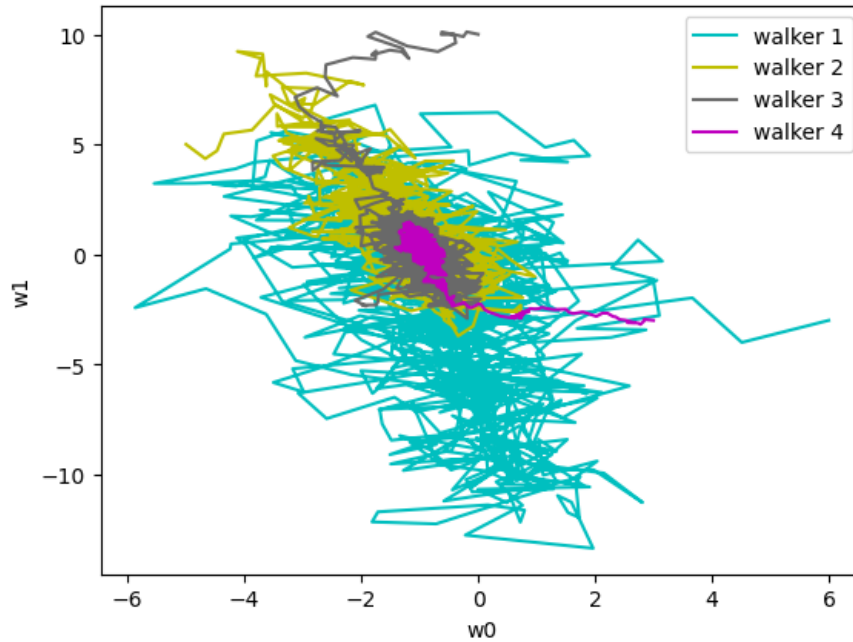


Figura 42: Caminantes en el espacio de w_0 y w_1 ahora para FSLI(I).

Para los cuatro caminantes se les redujo el rango que podía tomar la chi aleatoria, justo como en el caso de CPL y JPB. En este caso los valores de chi fueron considerablemente menores a los obtenidos en CPL. De igual manera a medida que el tamaño de paso era mayor los caminantes convergían más rápidamente al área de menor valor de chi.

Gráficamos contorno de chi-cuadrada

```
Ahora graficamos el contorno de chi-cuadrada.
cp = ax.contourf(X, Y, Z_chi, np.linspace(13,80, 10), cmap=plt.cm.YlGn_r)
```

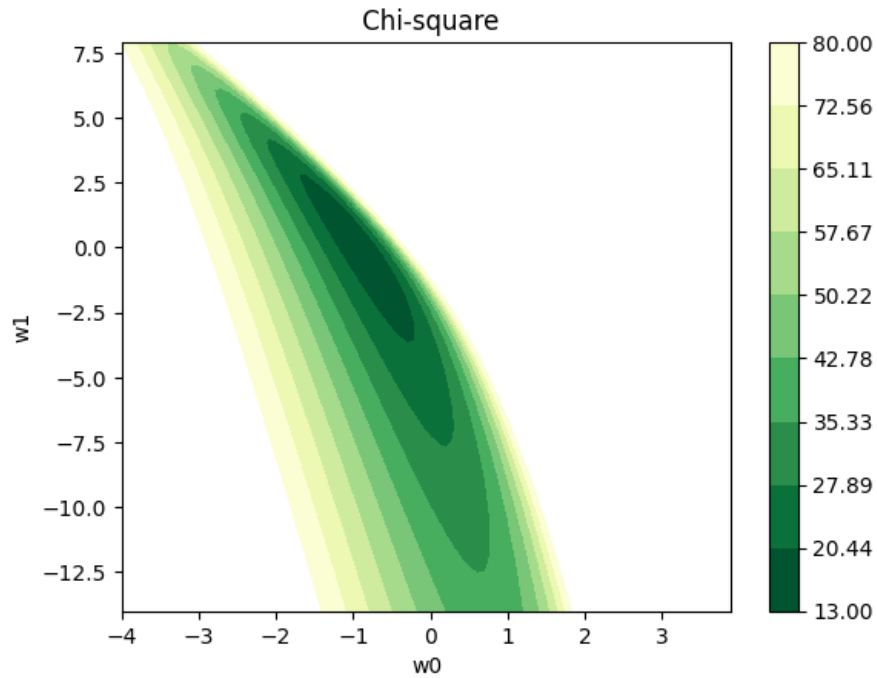


Figura 43: Chi para un rango de ω_0 y ω_1 .

Ahora gráficamos el likelihood:

```
cp = ax.contourf(X, Y, Z_lik ,np.linspace(-50, -1, 12), cmap="Reds")
```

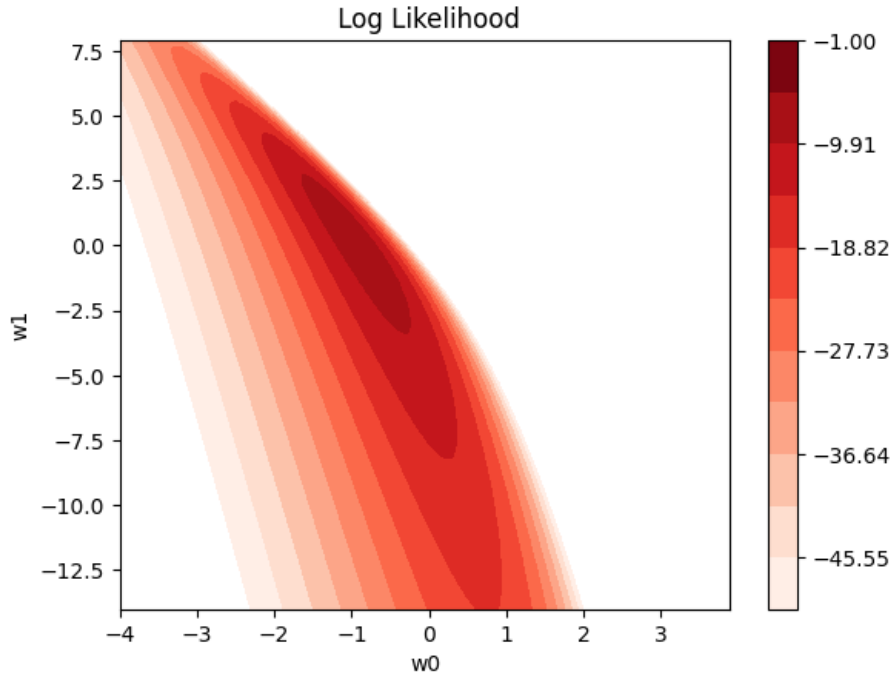


Figura 44: Log likelihood para un rango de ω_0 y ω_1 .

En este caso se gráfico el mejor par de parámetros (ω_0 y ω_1) obtenidos en base a la chi-cuadrada mínima. Fue de 14.53283, con $\omega_0=-0.8833$ y $\omega_1=-0.0037$ (figura 43).

Además junto se incluyen los datos observados para la $H(z)$:

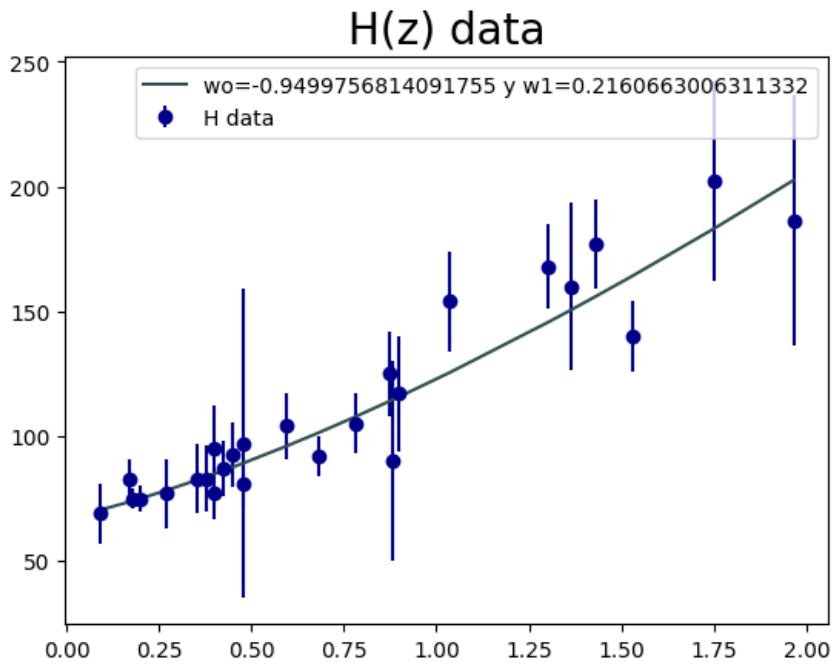


Figura 45: Los mejores parámetros de chi-cuadrada para el modelo FSLI(I) junto con los datos observados.

Además de poner a prueba los caminantes con un código desde cero, también se utiliza SimpleMC. Esto para incluir los datos de lentes fuertes como datos observados y así poder obtener el mejor set de parámetros para cada modelo de DE.

Ahora presentamos para cada modelo, el mejor likelihood, junto con su correspondiente set de parámetros.

Todos los modelos de energía oscura.					
	Likelihood máximo	none	ω_m	ω_1	none
HD	7.2553	0.1821	0.3571 \pm 0.0632	0.0221 \pm 0.0005	0.6632 \pm 0.0415
SN	16.6071	0.1629	0.2993 \pm 0.0341	0.0220 \pm 0.0005	0.6442 \pm 0.1446
SL(37)	34.2688	0.1564	0.3399 \pm 0.1064	0.0220 \pm 0.0005	0.6483 \pm 0.1463
HD +SL(196)	303.582	0.1456	0.3811 \pm 0.0197	0.0220 \pm 0.0005	0.6512 \pm 0.1235
SN +SL(196)	313.7377	0.1632	0.3235 \pm 0.0331	0.0220 \pm 0.0005	0.6142 \pm 0.1396
HD+SN +SL(37)	58.5418	0.1827	0.3067 \pm 0.0292	0.0220 \pm 0.0005	0.6893 \pm 0.0317
HD+SN +SL(196)	320.9926	0.1826	0.3234 \pm 0.0293	0.0220 \pm 0.0005	0.6798 \pm 0.0302

Cuadro 3: Parámetros de Λ CDM, ω CDM, CPL, JBP y FSL.

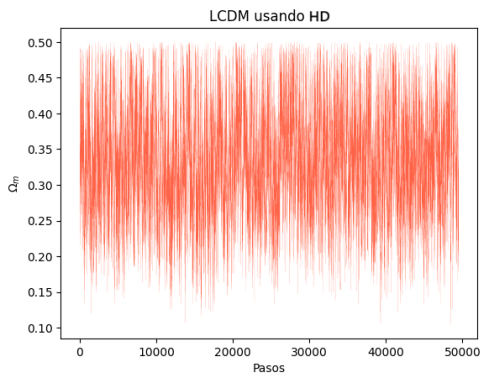
6.2. SimpleMC.

Se realizan pruebas con una cadena, con un número de pasos totales de 50000 (para todos los modelos). El programa se detiene hasta cumplir este número de pasos o hasta que el criterio de convergencia Gelman-Rubín alcance un valor impuesto, en este caso de 0.01.

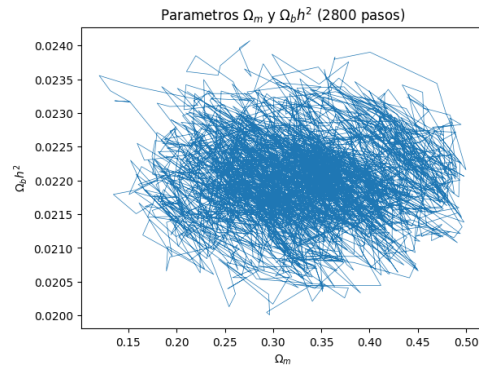
Se utilizarán tres sets de datos: HD, SN y SL. Hay que recalcar que los primeros datos de SL (para todos los modelos) corresponden a una muestra no completa de los 37 sistemas de lentes, de ahora en adelante la llamaremos SL(37) y a la muestra completa SL(196).

6.2.1. Modelo Λ CDM

Podemos ver como se comportan los caminantes en el espacio de parámetros completo de Ω_m con $\Omega_b h^2$ siguientes figura. Para cada combinación de sets de los tres datos.

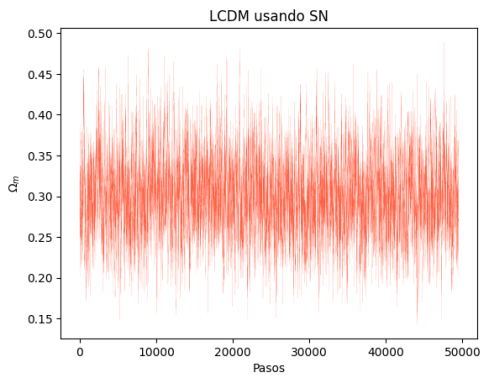


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

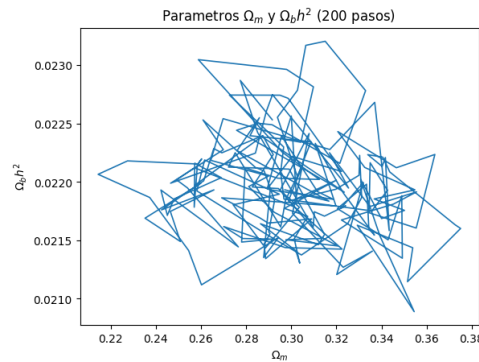


(b) 2800 cadenas para pares parámetros.

Figura 46: Modelo LCDM con datos HD.

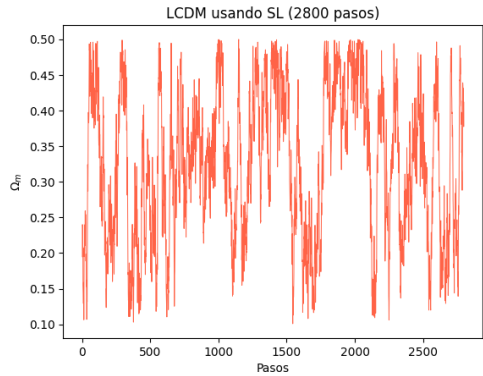


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

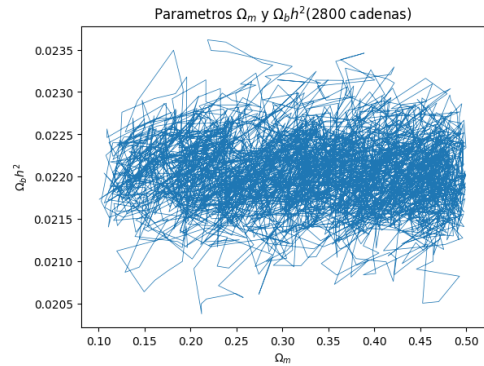


(b) 200 cadenas para pares de parámetros.

Figura 47: Modelo LCDM con datos SN.

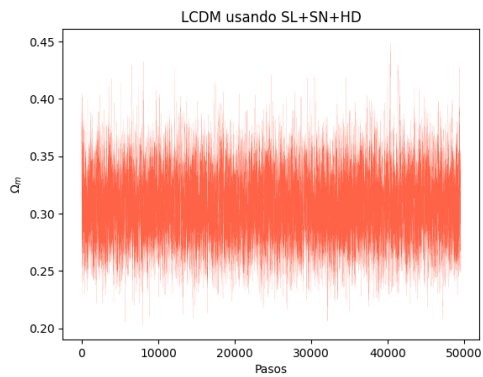


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

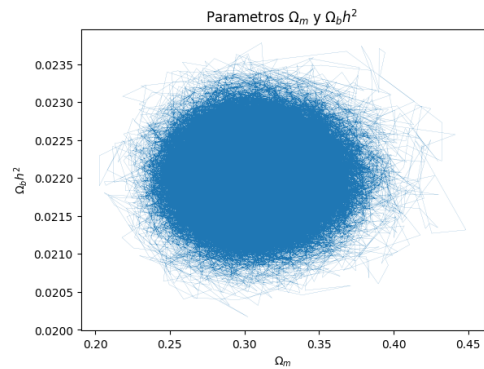


(b) 2800 cadenas para pares de parámetros.

Figura 48: LCDM con datos SL(37).

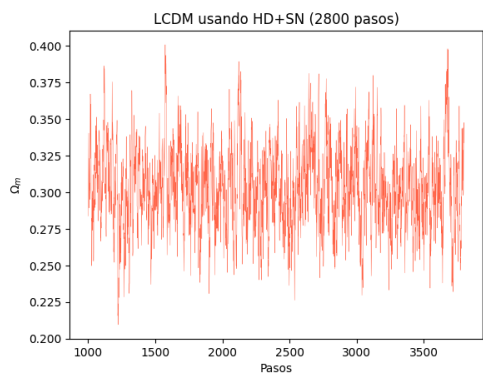


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

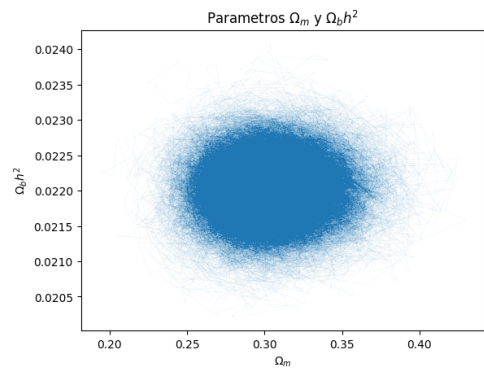


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 49: LCDM con HD+SN+ SL(37).

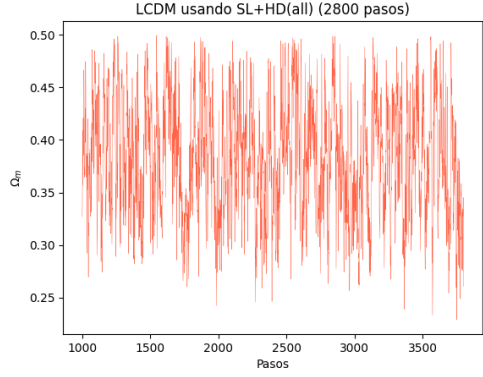


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

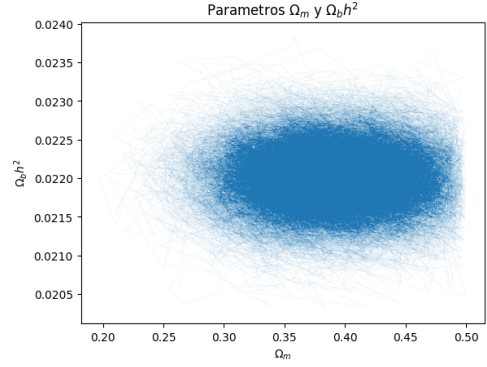


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 50: LCDM con SN+HD.



(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.



(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 51: LCDM con SL(196)+HD.

Resumimos los datos obtenidos para cada modelo, en especial los de los parámetros obtenidos:

Λ CDM					
	Likelihood máximo	Gelman-Rubín	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h
HD	7.2553	0.1821	0.3571 ± 0.0632	0.0221 ± 0.0005	0.6632 ± 0.0415
SN	16.6071	0.1629	0.2993 ± 0.0341	0.0220 ± 0.0005	0.6442 ± 0.1446
SL(37)	34.2688	0.1564	0.3399 ± 0.1064	0.0220 ± 0.0005	0.6483 ± 0.1463
HD +SL(196)	303.582	0.1456	0.3811 ± 0.0197	0.0220 ± 0.0005	0.6512 ± 0.1235
SN +SL(196)	313.7377	0.1632	0.3235 ± 0.0331	0.0220 ± 0.0005	0.6142 ± 0.1396
HD+SN +SL(37)	58.5418	0.1827	0.3067 ± 0.0292	0.0220 ± 0.0005	0.6893 ± 0.0317
HD+SN +SL(196)	320.9926	0.1826	0.3234 ± 0.0293	0.0220 ± 0.0005	0.6798 ± 0.0302

Cuadro 4: Parámetros de Λ CDM

Ahora los contornos del modelo LCDM:

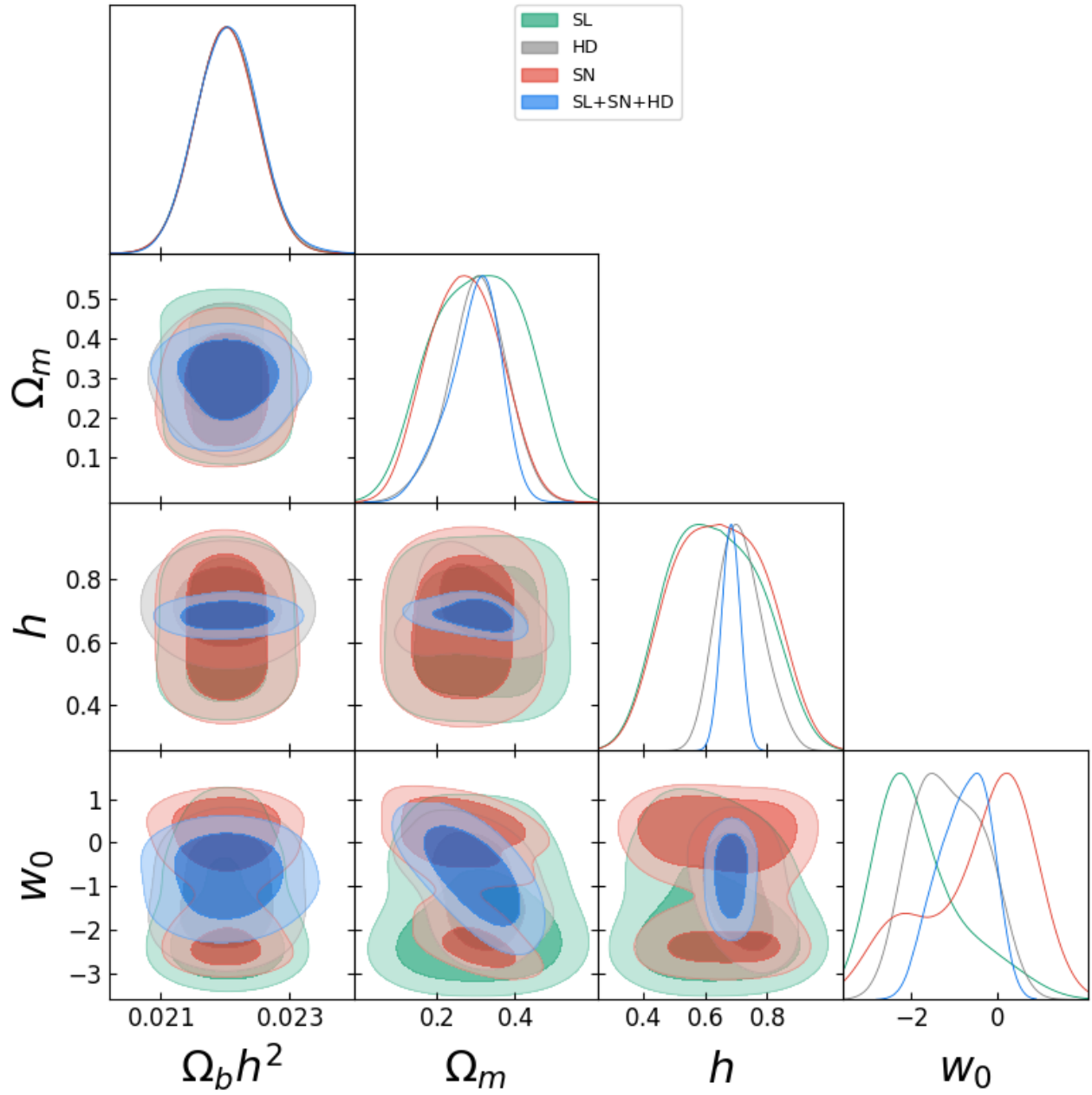
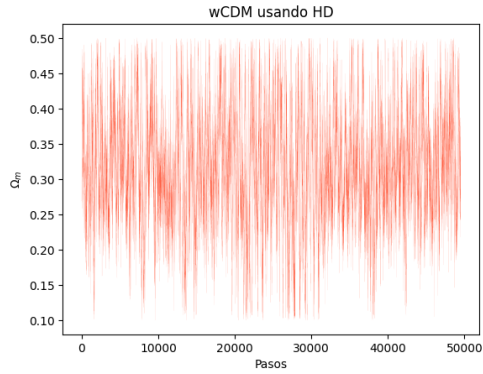


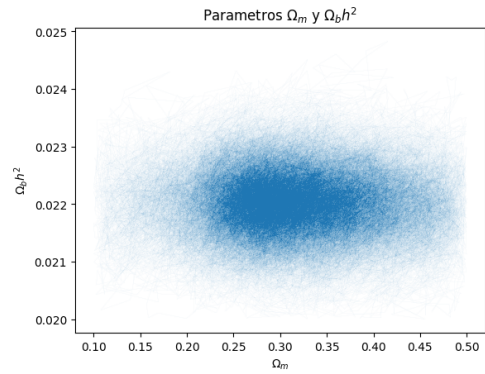
Figura 52: Contornos de los parámetros de LCDM.

6.2.2. Modelo wCDM

Para cada set de datos individual y la combinación de ellos.

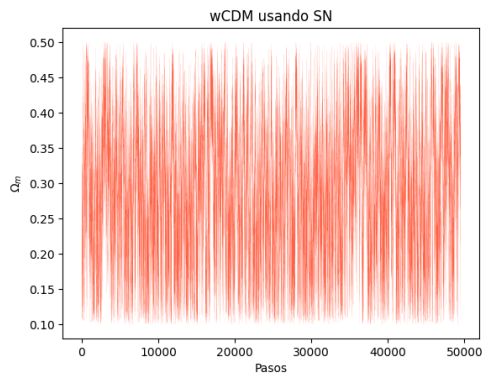


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

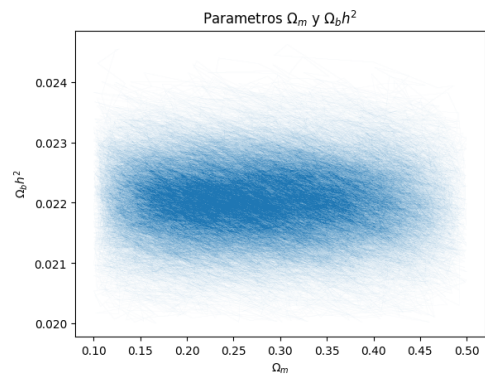


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 53: wCDM con HD.



(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

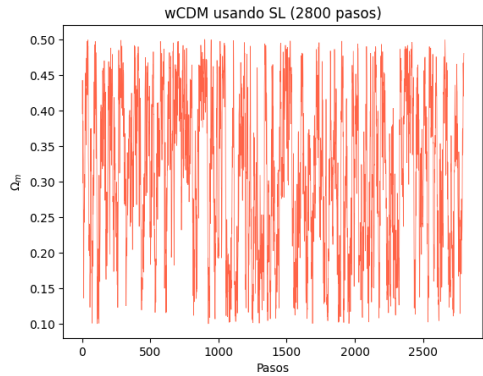


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

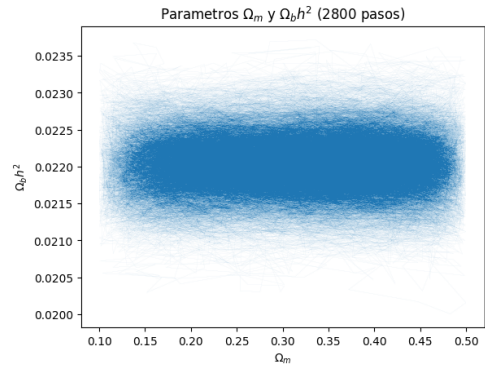
Figura 54: wCDM con SN.

Los parámetros obtenidos para cada modelo:

Ahora en la siguiente lo contornos de cada set de datos y la combinación de todos.

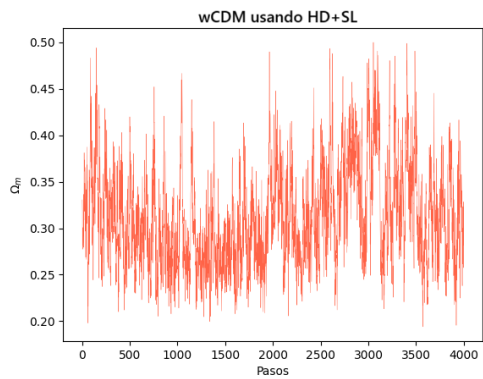


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

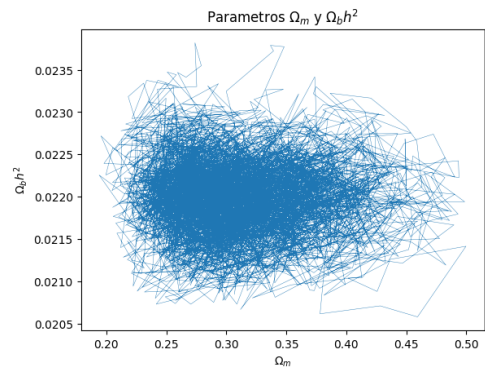


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 55: wCDM con SL(37).

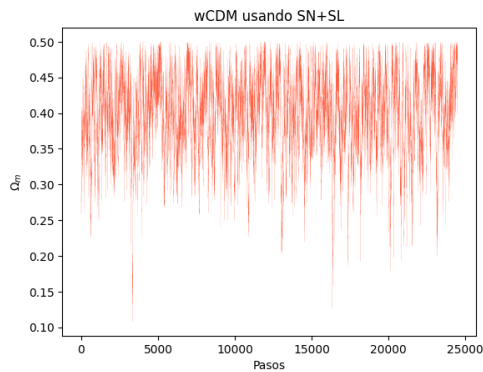


(a) 4000 cadenas contra el parámetro de radiación.

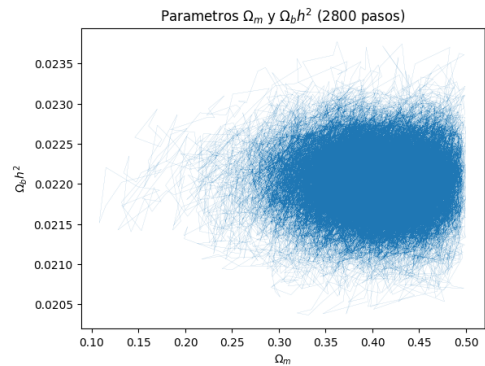


(b) 4000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 56: wCDM con HD+SL(196).

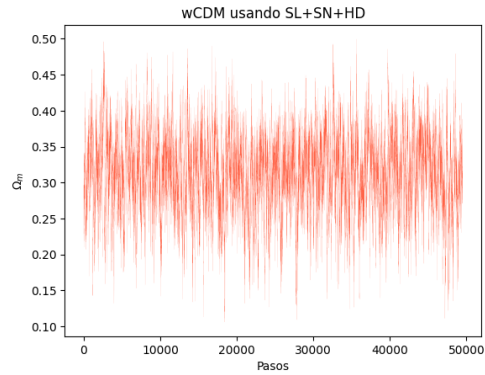


(a) 25000 cadenas contra el parámetro de radiación.

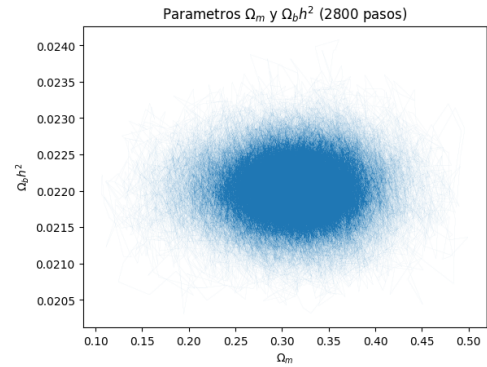


(b) 25000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 57: wCDM con SN+SL(196).



(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.



(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 58: w CDM con HD+SN+SL(37).

ω CDM						
	Likelihood máximo	Gelman-Rubín	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h	ω_0
HD	7.1816	0.1256	0.3131 ± 0.0677	0.0220 ± 0.0005	0.7038 ± 0.0667	-1.2574 ± 0.4381
SN	16.2370	0.1295	0.2512 ± 0.0889	0.0220 ± 0.0005	0.6442 ± 0.1448	-0.9196 ± 0.2104
SL(37)	33.6504	0.0761	0.3135 ± 0.1127	0.0220 ± 0.0005	0.6518 ± 0.1432	-1.5868 ± 1.0844
SN +SL(196)	312.7027	0.1301	0.3984 ± 0.0577	0.0220 ± 0.0005	0.6306 ± 0.1429	-1.3441 ± 0.2549
HD +SL(196)	300.7134	0.2045	0.3544 ± 0.0219	0.0220 ± 0.0005	0.6743 ± 0.1401	-1.1954 ± 0.2132
HD+SN +SL(37)	58.5460	0.1324	0.3099 ± 0.0553	0.0220 ± 0.0005	0.6874 ± 0.0319	-1.0333 ± 0.1658
HD+SN +SL(196)	320.3155	0.1319	0.3704 ± 0.0468	0.0220 ± 0.0005	0.6743 ± 0.0319	-1.2310 ± 0.1922

Cuadro 5: Parámetros de w CDM

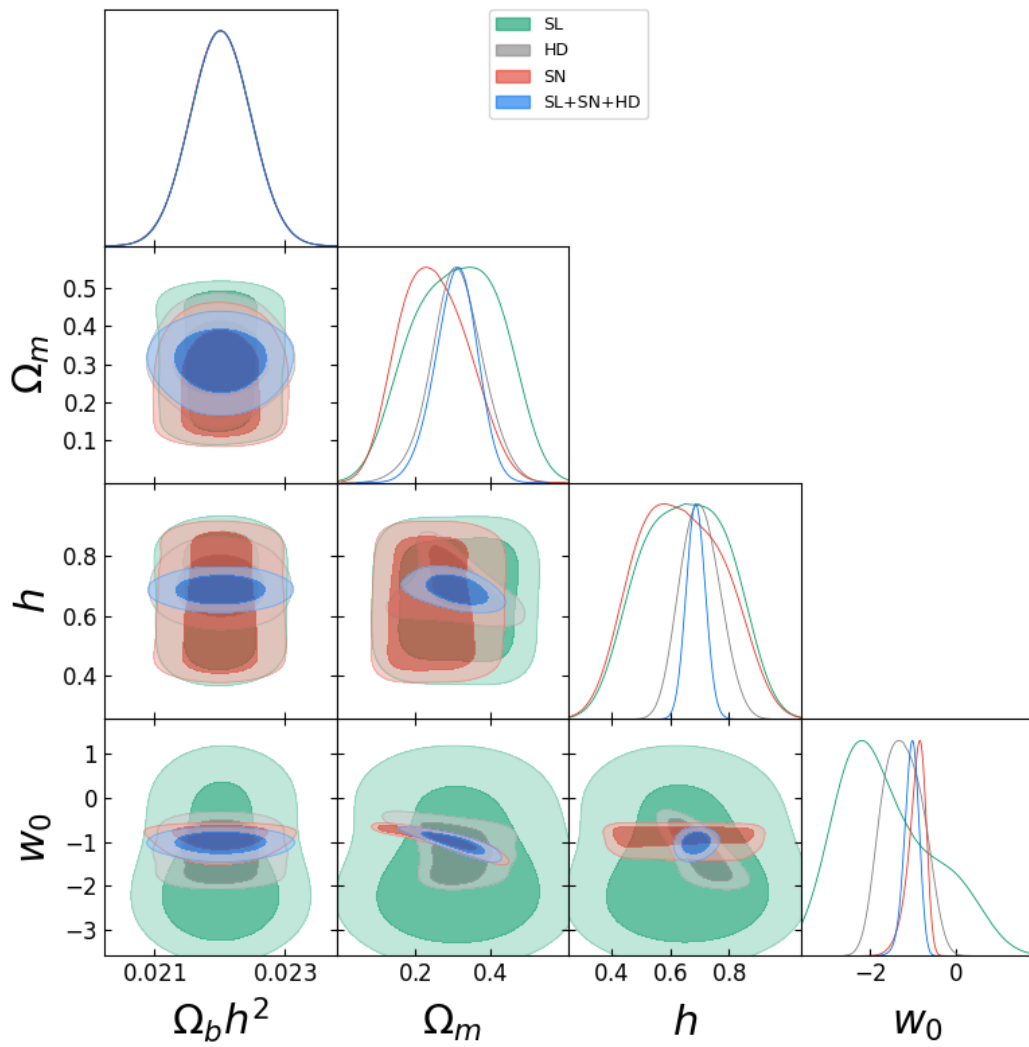
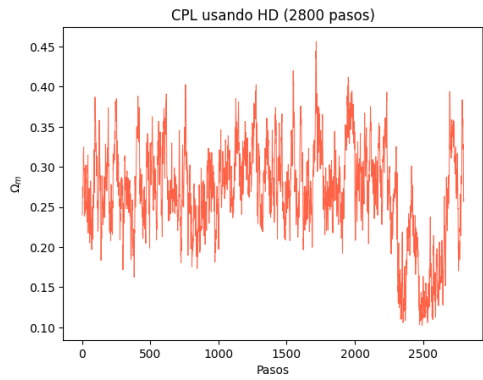
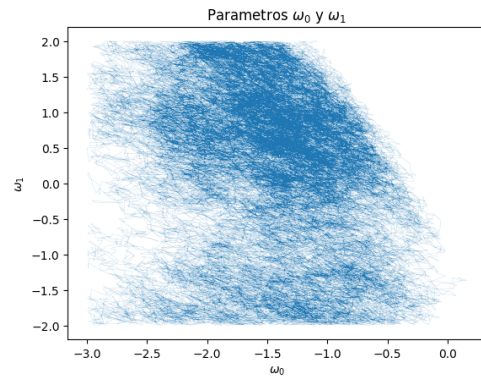


Figura 59: Gráfica de los contornos de los parámetros del modelo w CDM.

6.2.3. Modelo CPL

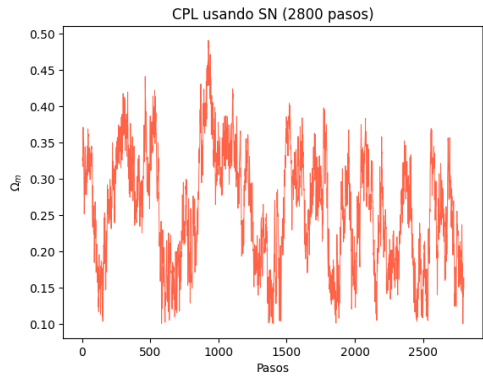


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

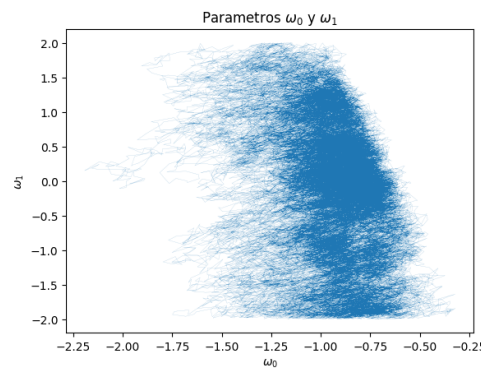


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 60: CPL con HD.



(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

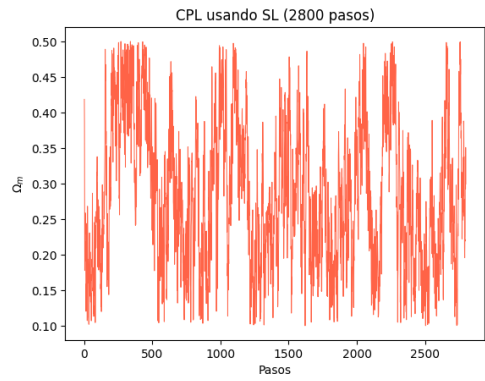


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

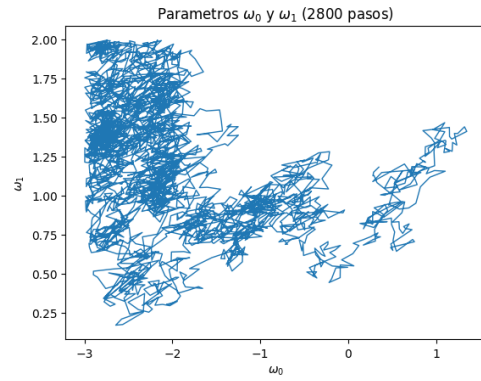
Figura 61: CPL con SN.

Ahora la tabla de informes:

Así que para estos tres sets de parámetros tenemos los siguientes contornos:

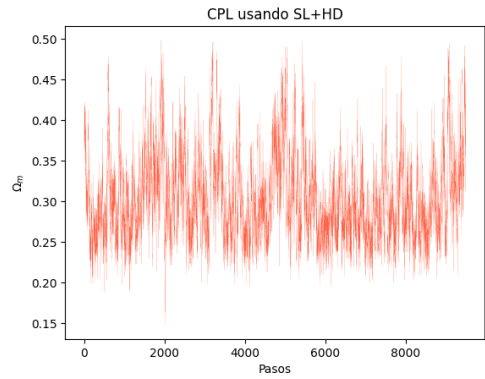


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

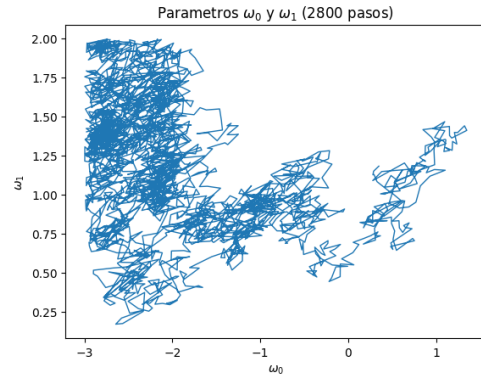


(b) 2800 cadenas para pares de parámetros.

Figura 62: CPL con SL(37).

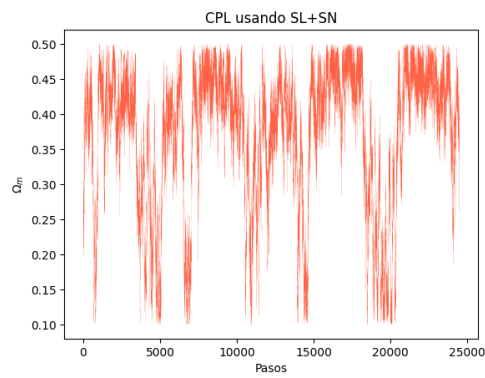


(a) 10000 cadenas contra el parámetro de radiación.

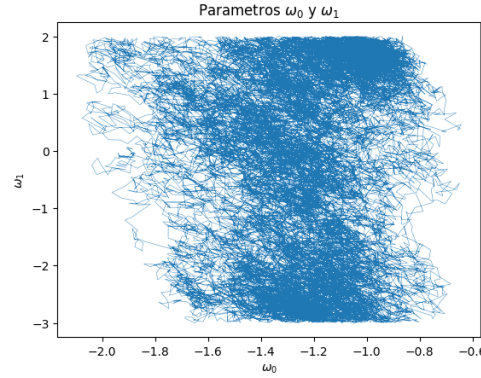


(b) 2800 cadenas para pares de parámetros.

Figura 63: CPL con HD+SL(196).

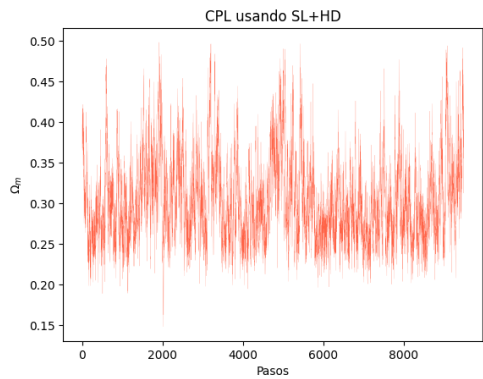


(a) 25000 cadenas contra el parámetro de radiación.

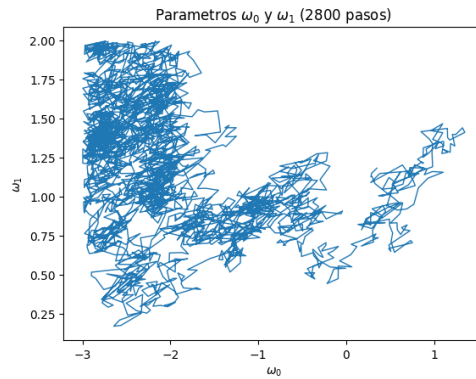


(b) 25000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 64: CPL con SN+SL(196).

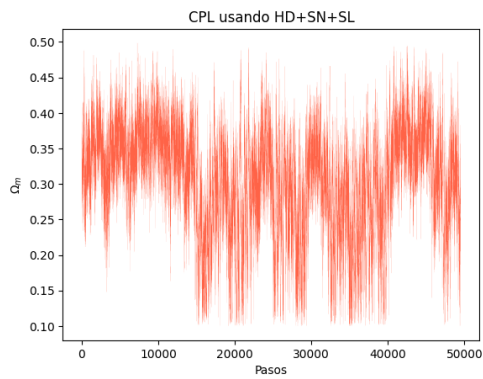


(a) 10000 cadenas contra el parámetro de radiación.

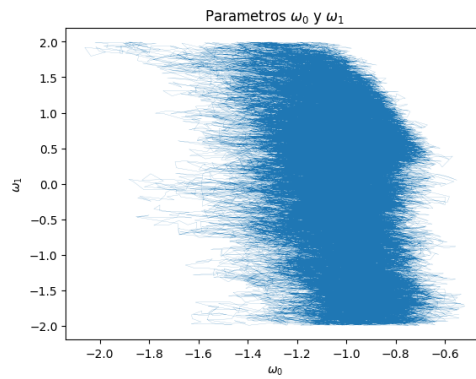


(b) 2800 cadenas para pares de parámetros.

Figura 65: CPL con HD+SL(196).



(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.



(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 66: CPL con HD+SN+SL(37).

CPL							
	Likelihood máximo	Gelman-Rubín	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h	w_0	w_1
HD	7.1522	0.0601	0.3033 ± 0.0738	0.0220 ± 0.0005	0.7216 ± 0.0734	-1.4578 ± 0.5904	0.1906 ± 1.1107
SN	16.1993	0.0523	0.2755 ± 0.0918	0.0220 ± 0.0005	0.6513 ± 0.1413	-0.9607 ± 0.2286	-0.1178 ± 0.9904
SL(37)	33.6339	0.0374	0.3219 ± 0.1111	0.0220 ± 0.0005	0.6526 ± 0.1420	-1.3732 ± 1.0572	0.2116 ± 0.9382
HD +SL(196)	300.4572	0.0836	0.2973 ± 0.0522	0.0220 ± 0.0005	0.8005 ± 0.0680	-2.8348 ± 0.7043	0.9145 ± 0.8239
SN +SL(196)	312.2256	0.0374	0.3706 ± 0.1022	0.0220 ± 0.0005	0.6583 ± 0.1438	-1.2581 ± 0.2534	-0.2852 ± 1.6201
HD+SN +SL(37)	58.4890	0.0566	0.3054 ± 0.0769	0.0220 ± 0.0005	0.6835 ± 0.0313	-1.0421 ± 0.1838	-0.0093 ± 1.0232
HD+SN +SL(196)	320.2545	0.0818	0.3626 ± 0.0734	0.0220 ± 0.0005	0.6713 ± 0.0311	-1.1817 ± 0.2159	-0.3613 ± 1.4916

Cuadro 6: Parámetros de CPL

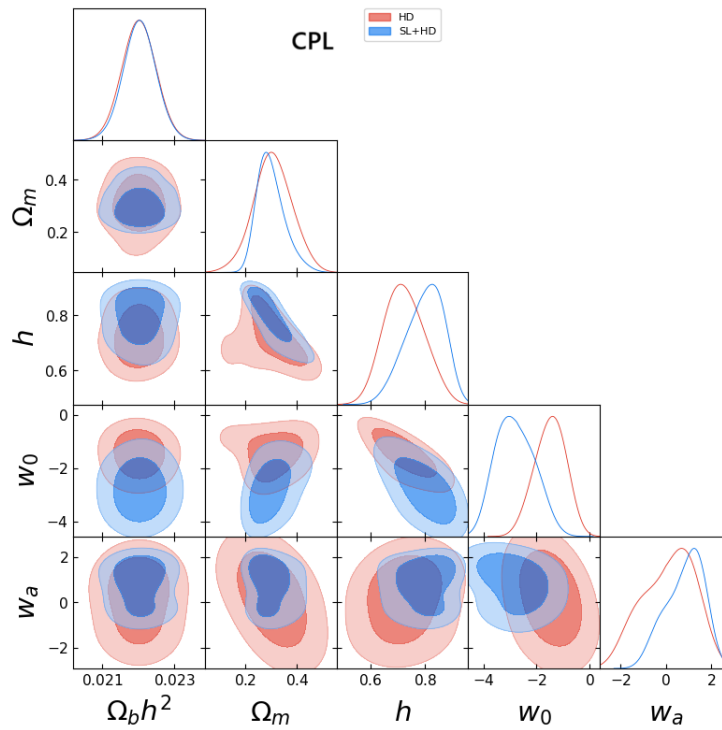
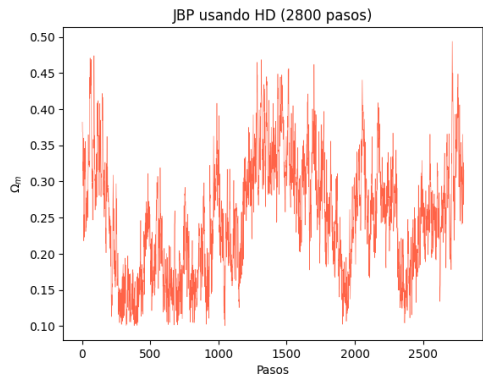


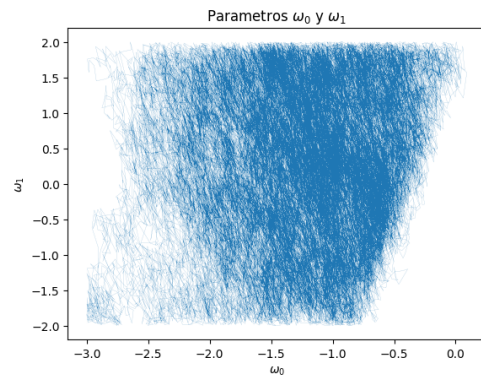
Figura 67: Gráfica de contorno de los parámetros de del modelo CPL.

6.2.4. Modelo JBP.

Ahora para el modelo, mostramos las gráficas del valor que toma el parámetro de radiación Ω_r para una parte (las primeras 2800 cadenas) de las cadenas totales realizadas o todas, junto con el valor que toman los parámetros ω_0 y ω_1 para todas las caminatas realizadas. Seguido de esto se incluye

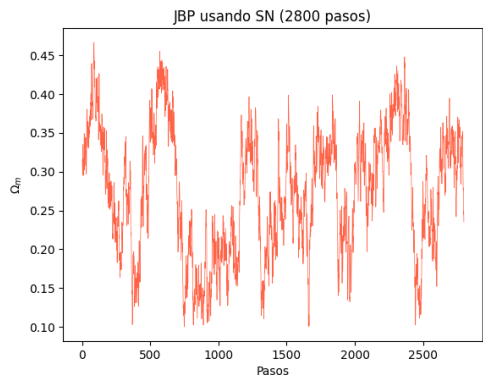


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

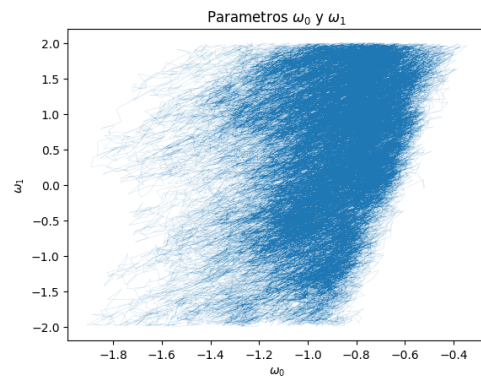


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 68: JBP con HD.



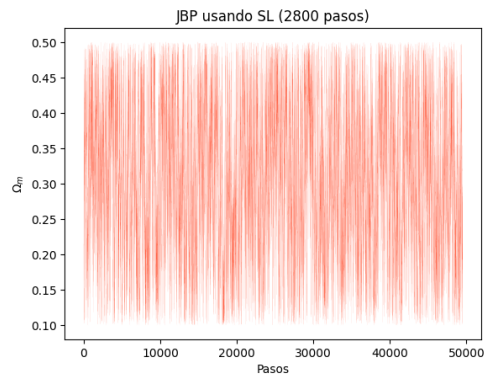
(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.



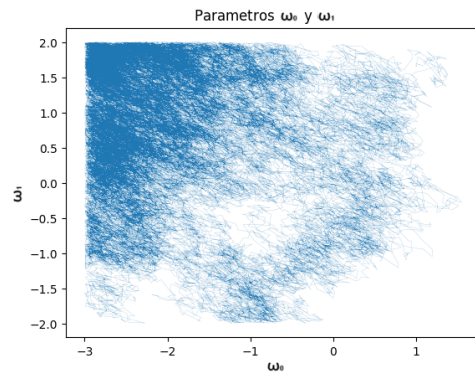
(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 69: JBP con SN.

Como se puede ver en la tabla 7 ningún caminante alcanzó el criterio menor a 0.01 para todas las combinaciones de sets de datos. Y la combinación de HD+SN+SL(196) terminó con el Gelman-Rubín más bajo, de 0.0417.

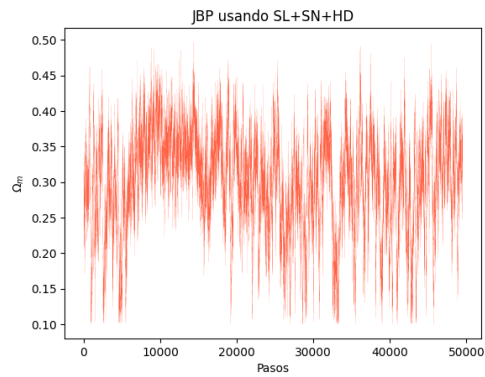


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

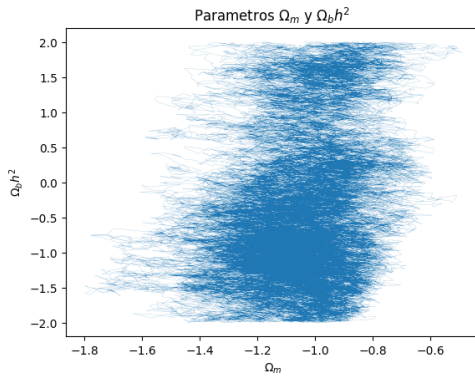


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 70: JBP con SL(37).

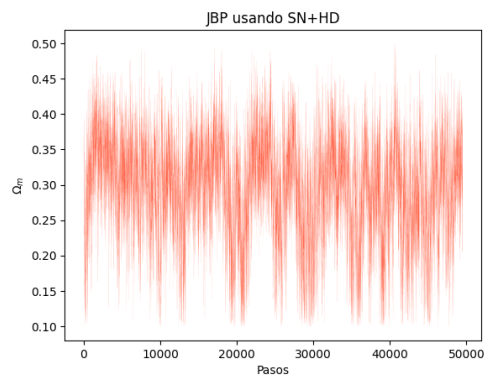


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

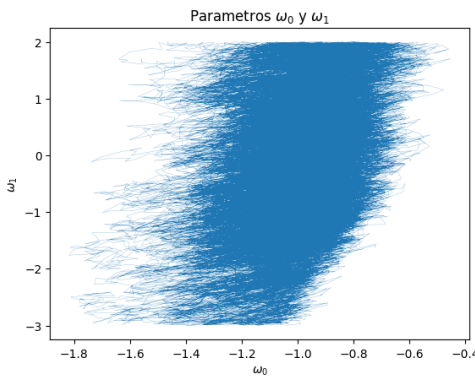


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 71: JBP con HD+SN+SL(37).

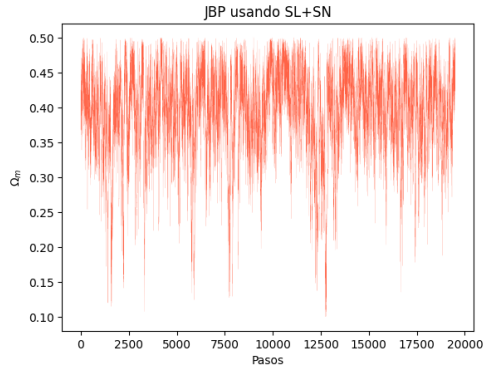


(a) 50000 cadenas contra el parámetro de radiación.

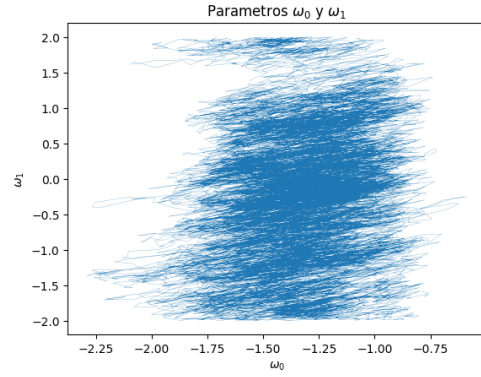


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 72: JBP con SN+HD.

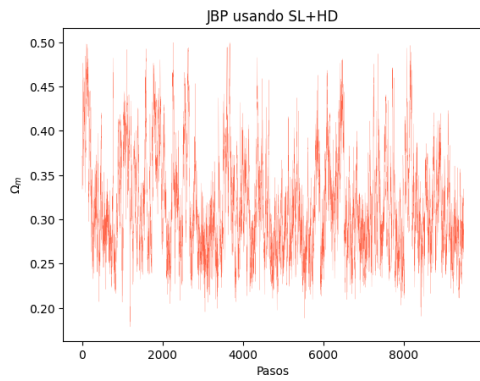


(a) 20000 cadenas contra el parámetro de radiación.

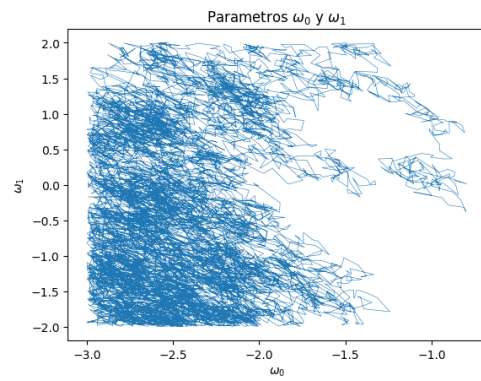


(b) 20000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 73: JBP con SL(196)+SN.



(a) 10000 cadenas contra el parámetro de radiación.



(b) 10000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 74: JBP con SL(196)+HD.

JBP							
	Likelihood máximo	Gelman-Rubín	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h	ω_0	ω_1
HD	7.1627	0.0605	0.3082 ± 0.0744	0.0220 ± 0.005	0.7011 ± 0.0740	-1.2491 ± 0.5964	0.2419 ± 1.0865
SN	16.1223	0.0466	0.2768 ± 0.0891	0.0220 ± 0.0005	0.6519 ± 0.1425	-0.9337 ± 0.2351	0.3595 ± 1.0424
SL(37)	33.6182	0.0778	0.3096 ± 0.1111	0.0220 ± 0.0005	0.6380 ± 0.1472	-1.7419 ± 1.0224	0.6298 ± 0.9949
HD +SL(196)	300.5364	0.0870	0.3132 ± 0.0591	0.0220 ± 0.0005	0.7840 ± 0.0689	-2.4244 ± 0.4130	-0.3891 ± 1.1166
SN +SL(196)	312.6063	0.0779	0.3939 ± 0.0662	0.0220 ± 0.0005	0.6361 ± 0.1412	-1.3552 ± 0.2591	-0.2341 ± 0.9519
HD+SN +SL(196)	320.2890	0.0417	0.3622 ± 0.0588	0.0220 ± 0.0005	0.6744 ± 0.0317	-1.2125 ± 0.2034	-0.0214 ± 1.1242

Cuadro 7: Parámetros de JBP

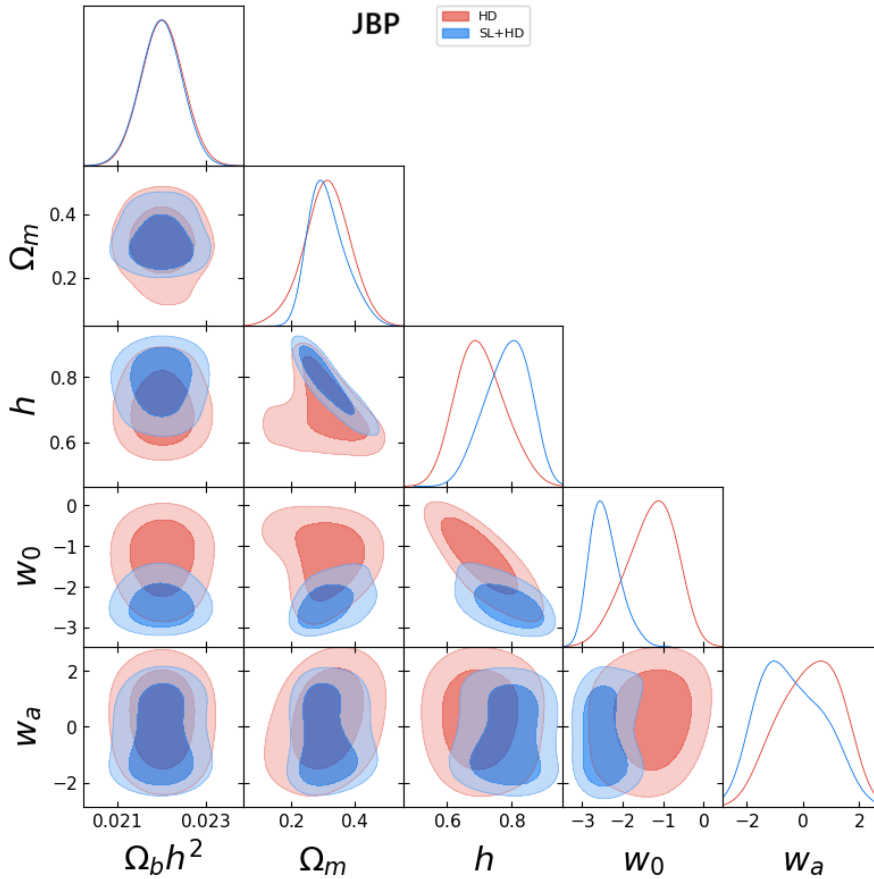
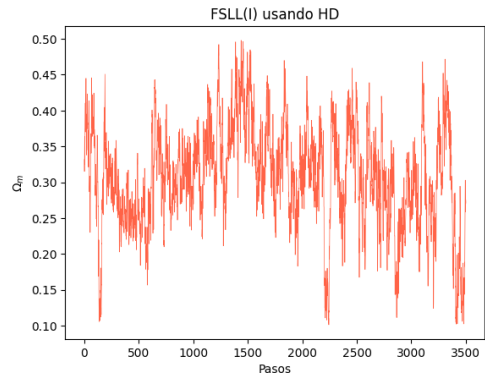
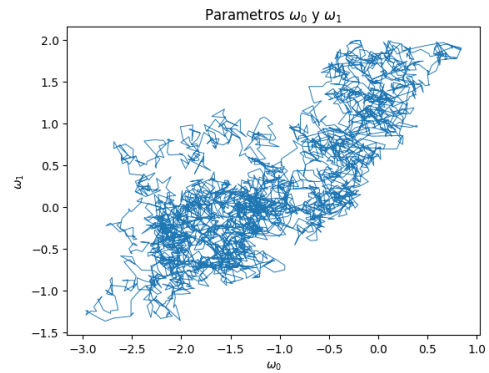


Figura 75: Gráfica de los contornos de los parámetros del modelo JBP.

6.2.5. Modelo FSLL(I).



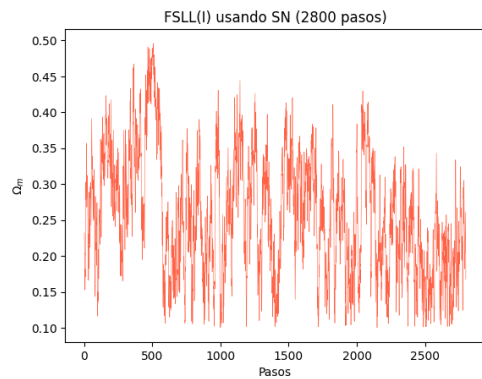
(a) 3500 cadenas contra el parámetro de radiación.



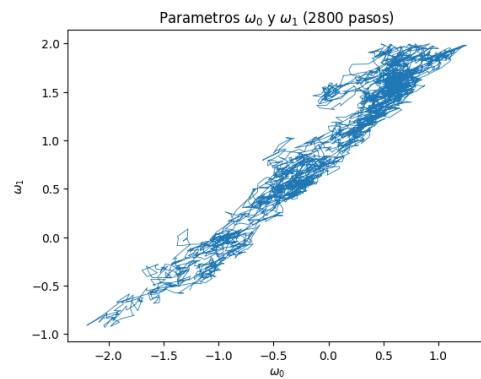
(b) 3500 cadenas para pares de parámetros.

Figura 76: FSLL con HD.

Para los datos SN:



(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.



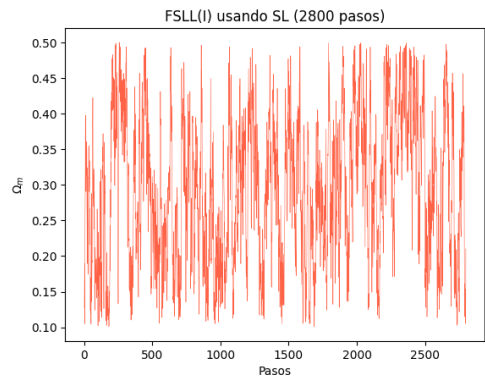
(b) 2800 cadenas para pares de parámetros.

Figura 77: FSLL con SN.

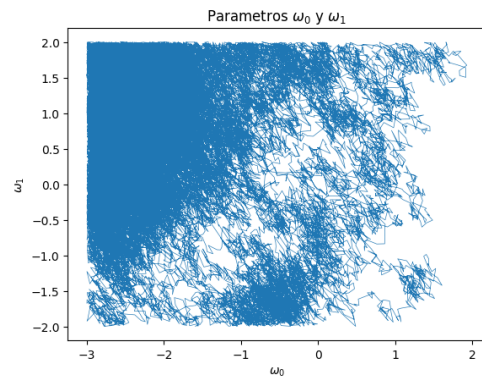
Tabla:

Ahora los contornos de este último set:

En la tabla 8 podemos ver que las últimas tres combinaciones de sets de datos lograron un Gelman-Rubín por debajo del valor impuesto de 0.01. Esto quiere decir que lograron converger, de acuerdo al criterio Gelman-Rubín, a un mejor valor del impuesto. Cabe recalcar que solo con el modelo FSLL(I) se logró que algunos sets de datos se detuvieran antes de lograr los 50000 pasos.

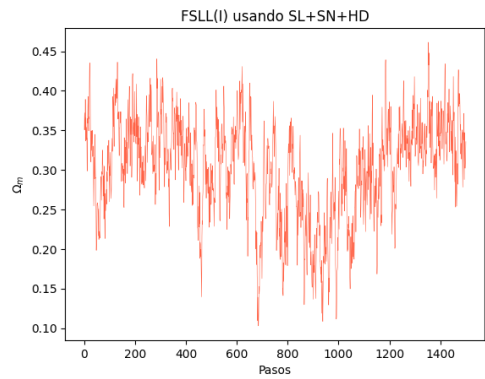


(a) 2800 cadenas contra el parámetro de radiación.

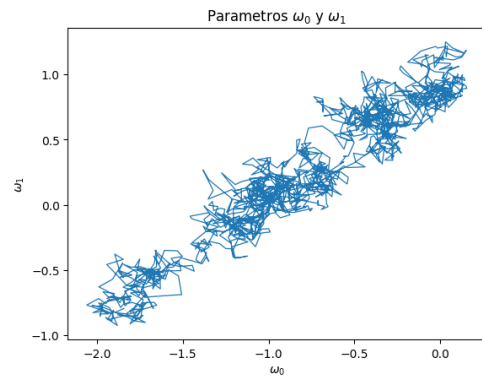


(b) 50000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 78: FSSL con SL(37).

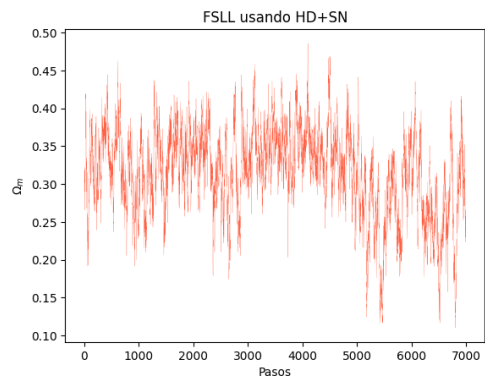


(a) 1500 cadenas contra el parámetro de radiación.

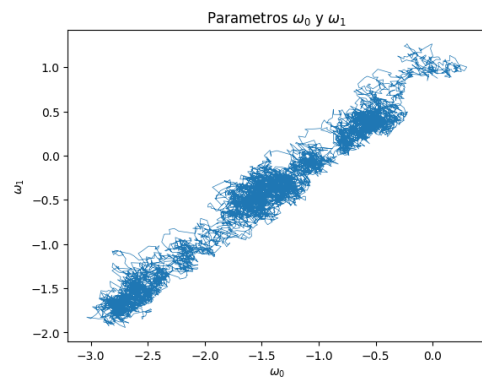


(b) 1500 cadenas para pares de parámetros.

Figura 79: FSSL con SN+SN+SL(37).

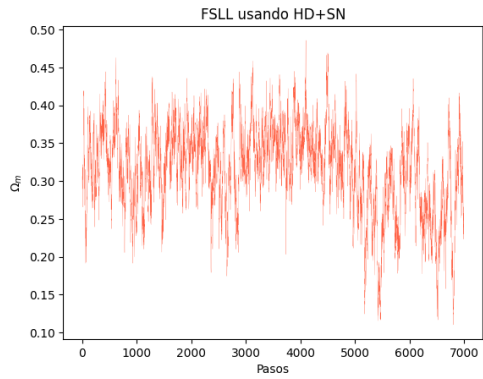


(a) 7000 cadenas contra el parámetro de radiación.

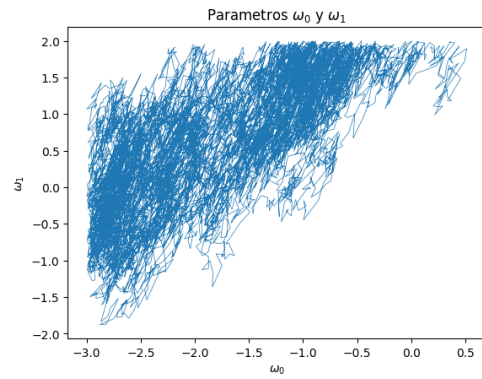


(b) 7000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 80: FSSL con HD+SN.

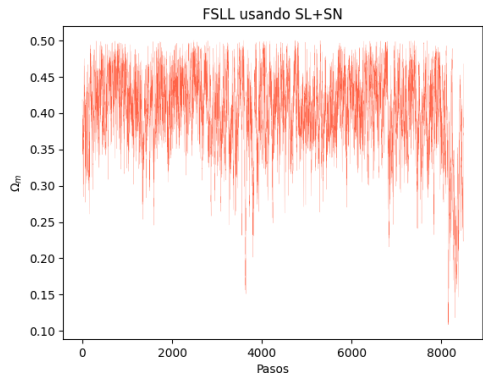


(a) 7000 cadenas contra el parámetro de radiación.

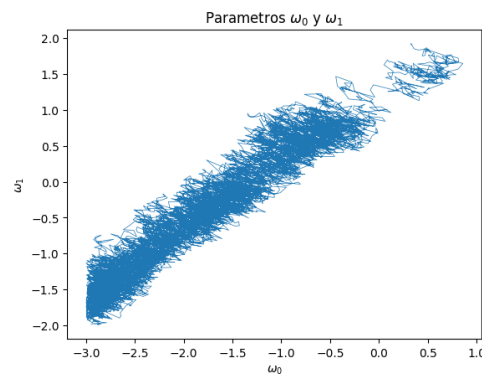


(b) 7000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 81: FSSL con HD+SL(196).

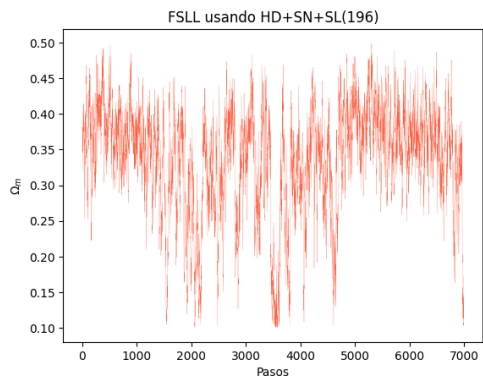


(a) 8000 cadenas contra el parámetro de radiación.

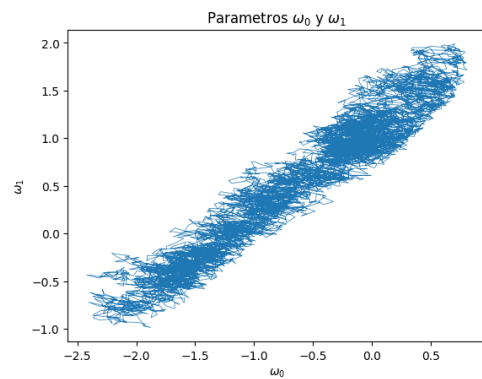


(b) 8000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 82: FSSL con SN+SL(196).



(a) 7000 cadenas contra el parámetro de radiación.



(b) 7000 cadenas para pares de parámetros.

Figura 83: FSSL con HD+SN+SL(196).

FSSL(I)							
	Likelihood máximo	Gelman- Rubín	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h	ω_0	ω_1
HD	7.2164	0.0015	0.3037 ± 0.7147	0.0220 ± 0.005	0.7144 ± 0.0729	-1.1428 ± 0.8286	0.2396 ± 0.7593
SN	16.2224	0.0059	0.2709 ± 0.0898	0.0220 ± 0.0005	0.6511 ± 0.1442	-0.5554 ± 1.2062	0.4234 ± 1.2243
SL(37)	33.5536	0.0607	0.3069 ± 0.1129	0.0220 ± 0.0005	0.6296 ± 0.1423	-1.8293 ± 1.0005	0.5585 ± 1.0311
HD +SL(196)	300.5834	0.0816	0.3150 ± 0.0598	0.0220 ± 0.0005	0.7801 ± 0.0713	-1.7949 ± 0.7963	0.6321 ± 0.8421
SN +SL(196)	312.1832	0.0042	0.4035 ± 0.0587	0.0220 ± 0.0004	0.6324 ± 0.1455	-1.7819 ± 0.8877	-0.4287 ± 0.8773
SN+HD +SL(196)	320.2808	0.0057	0.3247 ± 0.0871	0.0220 ± 0.0005	0.6721 ± 0.0323	-0.5780 ± 0.8061	0.5634 ± 0.7074
SN+HD +SL(37)	58.5391	0.0012	0.2983 ± 0.0660	0.0221 ± 0.0005	0.6840 ± 0.0298	-0.7732 ± 0.5686	0.2449 ± 0.5172

Cuadro 8: Parámetros de FSSL

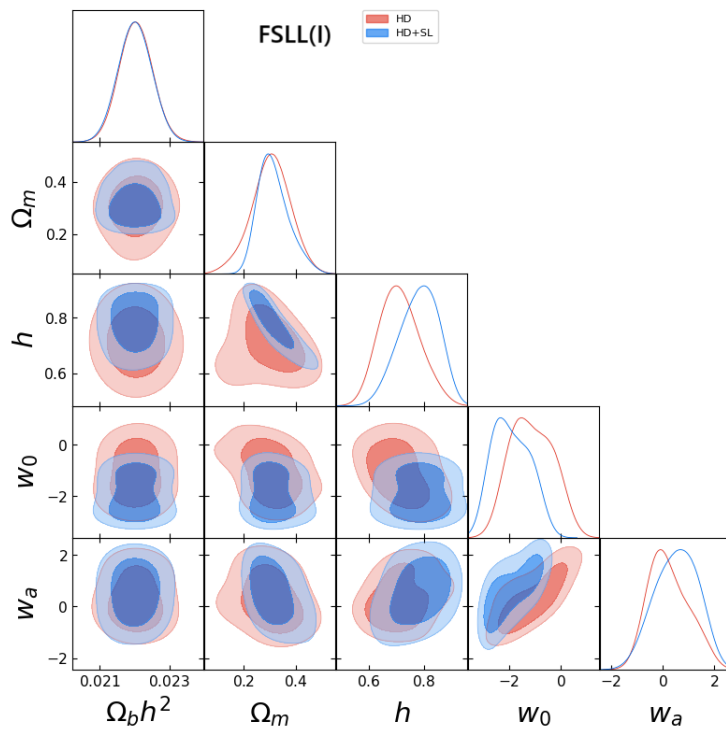


Figura 84: Contornos FSLL con HD y HD+SL

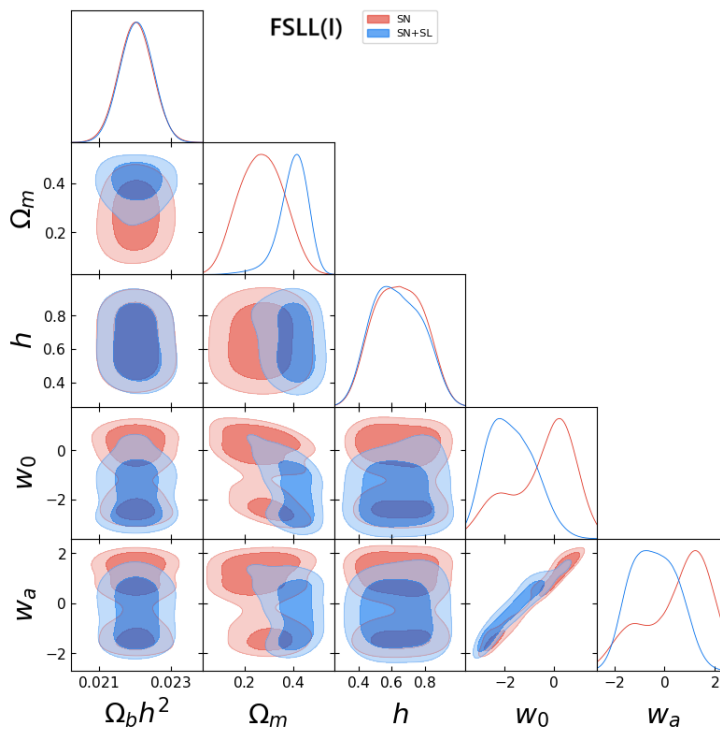


Figura 85: Contornos FSLL con SN y SN+SL

7. Conclusiones.

Para el código propio. En general para todos los modelos, cuando los caminantes se ponían en marcha la convergencia estaba fuertemente relacionada con el rango de valores que podía tomar la chi-cuadrada aleatoria (que era la que permitía a los caminantes poder explorar mas el espacio de parámetros).

Ya que cuando el ratio de aceptación era muy alto, los caminantes no parecían converger en un punto en específico, en cambio exploraban el espacio de parámetros de manera casi uniforme.

Esto repercutía directamente en el número total de pasos que les tomaba a los caminantes llegar a la convergencia. Es así que cuando se restringía más dicho rango se necesitaba menor número de pasos.

Cabe resaltar que el número de pasos en general no superaba los 10000, siendo el máximo el de JBP con 8000 y tomando un tiempo de 2.3s.

Así que cuando se ponían en marcha con pasos del orden de centenares el tiempo era de aproximadamente 0.5s. Sin embargo lo recomendable para que los caminantes pudieran converger era que el número de paso fuera de miles, justo como se mostró en los códigos de todos los modelos de DE.

Estas cuestiones pueden ser mejoradas cambiando el código base de los caminantes, como por ejemplo, no tener un número fijo de caminadas, si no que este se detenga cuando después de ciertos pasos los valores de chi no mejoren.

Además de eso con códigos como el de SimpleMC estás cuestiones están mucho mejor automatizadas y mejoradas.

Para el caso de SimpleMC. Podemos ver que, sin necesidad de completar los 50000 en muchos de los casos, se puede construir la distribución a posteriori. En general, los sets de datos que mejor constriñen las observaciones son los de HD+SL (comparado con solo HD) y SN+SL (comparado con solo SN).

Sin embargo al agregar SL en cualquier combinación el tiempo requerido para terminar todos los pasos aumentaba considerablemente respecto a usando HD y SN (y combinaciones de estos). Como comparación los caminantes del código propio al usar menos de 10000 pasos no tardaba más de un minuto en completar las caminatas, sin embargo en Simple MC, agregando SL las caminatas podían tardar hasta 8 horas si completaban los 50000 pasos.

Podemos ver que tenemos una mejora en la constricción de parámetros al usar los datos de SL, que solo los datos HD y SN. Es decir, nuestras observaciones astronómicas mejoran estos resultados para obtener mejores valores de los parámetros ω_0 y ω_1 .

8. Referencias:

Referencias

- [1] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B., Bartolo, N., Basak, S., Battye, R., Benabed, K., Bernard, J.-P., Bersanelli, M., Bielewicz, P., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Bouchet, F. R., Boulanger, F., Bucher, M., Burigana, C., Butler, R. C., Calabrese, E., Cardoso, J.-F., Carron, J., Challinor, A., Chiang, H. C., Chluba, J., Colombo, L. P. L., Combet, C., Contreras, D., Crill, B. P., Cuttaia, F., de Bernardis, P., de Zotti, G., Delabrouille, J., Delouis, J.-M., Di Valentino, E., Diego, J. M., Doré, O., Douspis, M., Ducout, A., Dupac, X., Dusini, S., Efstathiou, G., Elsner, F., Enßlin, T. A., Eriksen, H. K., Fantaye, Y., Farhang, M., Fergusson, J., Fernandez-Cobos, R., Finelli, F., Forastieri, F., Frailis, M., Fraisse, A. A., Franceschi, E., Frolov, A., Galeotta, S., Galli, S., Ganga, K., Génova-Santos, R. T., Gerbino, M., Ghosh, T., González-Nuevo, J., Górski, K. M., Gratton, S., Gruppuso, A., Gudmundsson, J. E., Hamann, J., Handley, W., Hansen, F. K., Herranz, D., Hildebrandt, S. R., Hivon, E., Huang, Z., Jaffe, A. H., Jones, W. C., Karakci, A., Keihänen, E., Keskitalo, R., Kiiveri, K., Kim, J., Kisner, T. S., Knox, L., Krachmalnicoff, N., Kunz, M., Kurki-Suonio, H., Lagache, G., Lamarre, J.-M., Lasenby, A., Lattanzi, M., Lawrence, C. R., Le Jeune, M., Lemos, P., Lesgourgues, J., Levrier, F., Lewis, A., Liguori, M., Lilje, P. B., Lilley, M., Lindholm, V., López-Caniego, M., Lubin, P. M., Ma, Y.-Z., Macías-Pérez, J. F., Maggio, G., Maino, D., Mandolesi, N., Mangilli, A., Marcos-Caballero, A., Maris, M., Martin, P. G., Martinelli, M., Martínez-González, E., Matarrese, S., Mauri, N., McEwen, J. D., Meinhold, P. R., Melchiorri, A., Mennella, A., Migliaccio, M., Millea, M., Mitra, S., Miville-Deschênes, M.-A., Molinari, D., Montier, L., Morgante, G., Moss, A., Natoli, P., Nørgaard-Nielsen, H. U., Pagano, L., Paoletti, D., Partridge, B., Patanchon, G., Peiris, H. V., Perrotta, F., Pettorino, V., Piacentini, F., Polastri, L., Polenta, G., Puget, J.-L., Rachen, J. P., Reinecke, M., Remazeilles, M., Renzi, A., Rocha, G., Rosset, C., Roudier, G., Rubiño-Martín, J. A., Ruiz-Granados, B., Salvati, L., Sandri, M., Savelainen, M., Scott, D., Shellard, E. P. S., Sirignano, C., Sirri, G., Spencer, L. D., Sunyaev, R., Suur-Uski, A.-S., Tauber, J. A., Tavagnacco, D., Tenti, M., Toffolatti, L., Tomasi, M., Trombetti, T., Valenziano, L., Valiviita, J., Van Tent, B., Vibert, L., Vielva, P., Villa, F., Vittorio, N., Wandelt, B. D., Wehus, I. K., White, M., White, S. D. M., Zacchei, A., and Zonca, A. Planck 2018 results - vi. cosmological parameters (corrigendum). *AandA*, 652:C4, 2021.
- [2] L. Perivolaropoulos and F. Skara. Challenges for Λ CDM: An update. *New Astronomy Reviews*, 95:101659, 2022.
- [3] Eugene Oks. Brief review of recent advances in understanding dark matter and dark energy. *New Astron. Rev.*, 93:101632, 2021.

- [4] James S. Bullock and Michael Boylan-Kolchin. Small-scale challenges to the Λ CDM paradigm. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 55(1):343–387, 2017.
- [5] Vera C. Rubin and W. Kent Ford. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379–403, 1970.
- [6] M. R. S. Hawkins. A new look at microlensing limits on dark matter in the galactic halo. *Astronomy and Astrophysics*, 575:A107, mar 2015.
- [7] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, 90(4):045002, 2018.
- [8] Alexei V. Filippenko. Optical spectra of supernovae. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 35(1):309–355, 1997.
- [9] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromilio, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, and John Tonry. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *American journal of physics*, 116(3):1009–1038, September 1998.
- [10] Alexei V. Filippenko. Optical Spectra of Supernovae. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics.*, 35:309–355, January 1997.
- [11] Wolfgang Hillebrandt and Jens C. Niemeyer. Type ia supernova explosion models. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38(1):191–230, 2000.
- [12] S. Carroll, S.M. Carroll, and Addison-Wesley. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- [13] Verónica Motta, Miguel A. García-Aspeitia, Alberto Hernández-Almada, Juan Magaña, and Tomás Verdugo. Taxonomy of dark energy models. *Universe*, 7(6), 2021.
- [14] Richard S. Ellis. Gravitational lensing: a unique probe of dark matter and dark energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1914):967–987, 2010.
- [15] A. Goobar, R. Amanullah, S. R. Kulkarni, P. E. Nugent, J. Johansson, C. Steidel, D. Law, E. Mörtzell, R. Quimby, N. Blagorodnova, A. Brandeker, Y. Cao, A. Cooray, R. Ferretti, C. Fremling, L. Hangard, M. Kasliwal, T. Kupfer, R. Lunnan, F. Masci, A. A. Miller, H. Nayyeri, J. D. Neill, E. O. Ofek, S. Papadogiannakis, T. Petrushevskaya, V. Ravi, J. Sollerman, M. Sullivan, F. Taddia, R. Walters, D. Wilson, L. Yan, and O. Yaron. iptf16geu: A multiply imaged, gravitationally lensed type ia supernova. *Science*, 356(6335):291–295, 2017.
- [16] Kai Liao, Marek Biesiada, and Zong-Hong Zhu. Strongly Lensed Transient Sources: A Review. *Chin. Phys. Lett.*, 39(11):119801, 2022.

- [17] Adam S. Bolton, Scott Burles, Léon V. E. Koopmans, Tommaso Treu, Raphaël Gavazzi, Leonidas A. Moustakas, Randall Wayth, and David J. Schlegel. The sloan lens acs survey. v. the full acs strong-lens sample*. *The Astrophysical Journal*, 682(2):964, aug 2008.
- [18] J. Anthony Tyson, Francisco Valdes, and R. A. Wenk. Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments - mapping dark matter in galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 349, 1990.
- [19] Ricardo Medel Esquivel, Isidro Gomez-Vargas, J. Vazquez, and Ricardo García-Salcedo. An introduction to markov chain monte carlo. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 37:47–84, 03 2021.
- [20] Luis E. Padilla, Luis O. Tellez, Luis A. Escamilla, and Jose Alberto Vazquez. Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. *Universe*, 7(7):213, 2021.
- [21] *Historical Notes*, chapter 1, pages 1–9. John Wiley and Sons, Ltd, 2017.
- [22] J. R. Norris. *Markov Chains*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [23] Christian P. Robert and George Casella. *Markov Chains*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, NY, 2010.
- [24] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6):716–723, 1974.
- [25] Gideon Schwarz. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461–464, March 1978.