



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados  
del  
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FISICA

**Constricciones de modelos de materia y  
energía oscura escalar.**

**Tesis que presenta**

**Luis Osvaldo Téllez Tovar**

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis:

**Dr. Tonatiuh Matos Chassin  
Dr. José Alberto Vázquez González**



## CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

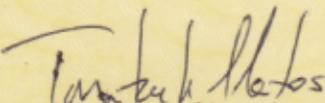


Copia del Acta, inscrita a fojas cuarenta y seis del Libro Centésimo Trigésimo Séptimo, del Examen Final presentado por el C. Luis Osvaldo Téllez Tovar para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Física.

En la Ciudad de México, a los veintiocho días del mes de agosto del año dos mil dieciocho, se reunieron en el Departamento de Física del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: doctor Tonatiuh Matos Chassin y doctor Alfredo Cruz Orea, ambos investigadores titulares del mencionado Departamento; doctor Josué De Santiago Sanabria, Catedrático CONACYT comisionado al Departamento de Física; y, como sinodal invitado por el Centro, el doctor José Alberto Vázquez González, Investigador Asociado del Grupo de Física Teórica: Gravitación y Cosmología del Instituto de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Autónoma de México, a fin de efectuar el Examen Final que para obtener el grado de Maestro en Ciencias sustentó el C. Luis Osvaldo Téllez Tovar.

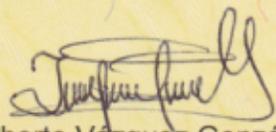
El C. Luis Osvaldo Téllez Tovar presentó la tesis titulada: "Constricciones de modelos de materia y energía oscura escalar", que fue desarrollada bajo la dirección del doctor Tonatiuh Matos Chassin y del doctor José Alberto Vázquez González.

Con fundamento en los resultados de este examen, el Jurado dictaminó que el C. Luis Osvaldo Téllez Tovar aprobó el Examen Final para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Física.

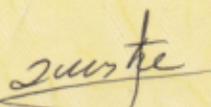
  
Tonatiuh Matos Chassin

  
Alfredo Cruz Orea

  
Josué De Santiago Sanabria

  
José Alberto Vázquez González

El Director General del Centro certifica que las firmas que anteceden son auténticas.

  
José Mustre de León

*Para mis amadas niñas,*

*Evolet y Khloé.*

*Abuelito Pato,  
te veré en las estrellas.*



# Agradecimientos.

A mi madre Ernestina y a mi padre Porfirio por creer siempre en mí, por darme su amor y todo su apoyo. A mi hermana Ximena, por hacer las tardes de estudio más amenas. A mi Evolet, por enseñarme a estar contento, ser curioso siempre y por su amor incondicional. A mi Khloé por recibirme todos los fines de semana con una bella sonrisa. A mi abuelita Nena, porque nunca dejo de preocuparse por mí. A toda mi familia por brindarme sus palabras de aliento. A mis amigos: Jona Black, Wendy, Jona White, Adrián y Andrés, porque con ellos la física y la vida son más divertidas. A mis profesores, ayudantes y compañeros, por todo el conocimiento que compartieron conmigo. A Rose y a Malu por ayudarme con todas esas dudas administrativas. Al Dr. Tonatiuh Matos y al Dr. José Alberto Vázquez por tenerme paciencia, por compartir sus conocimientos y por todo el apoyo que me brindaron. Al CONACYT y al Cinvestav por el apoyo y las facilidades otorgadas para estudiar la maestría y desarrollar este trabajo. Y un especial agradecimiento para mi abuelito Pato por todos sus consejos y enseñanzas, y por permitirme acompañarlo en los momentos más difíciles.



*I learned very early  
the difference between knowing  
the name of something  
and knowing something.*

**Richard Feynman.**



# Índice general

<b>Introducción.</b>	<b>V</b>
<b>Resumen.</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract.</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción a la Cosmología.</b>	<b>1</b>
1.1. Historia de la Cosmología. . . . .	1
1.2. Breve historia del Universo. . . . .	2
1.3. El Universo observado. . . . .	3
1.4. Historia térmica. . . . .	6
<b>2. Cosmología.</b>	<b>9</b>
2.1. Geometría y dinámica. . . . .	9
2.1.1. La métrica. . . . .	9
2.1.2. Espacios máximamente simétricos. . . . .	11
2.2. Métrica FLRW. . . . .	14
2.3. Geodésicas (Cinemática). . . . .	16
2.3.1. Geodésicas en la métrica FLRW. . . . .	18
2.4. Corrimiento al rojo. . . . .	19
2.5. Ecuación de continuidad. . . . .	19
2.6. Contenido del Universo. . . . .	20

2.6.1. Materia. . . . .	20
2.6.2. Radiación. . . . .	21
2.6.3. Energía oscura. . . . .	21
2.7. Ecuaciones de Friedmann. . . . .	23
<b>3. Observables cosmológicas.</b>	<b>25</b>
3.1. Parámetros cosmológicos. . . . .	26
3.2. Constante de Hubble. . . . .	27
3.3. Supernovas. . . . .	28
3.4. Radiación cósmica de fondo. . . . .	29
3.5. BAOs. . . . .	30
3.6. ¿Qué dicen las observaciones? . . . . .	32
<b>4. Experimentos.</b>	<b>35</b>
4.1. Planck. . . . .	35
4.2. BKP: BICEP2, Keck Array y Planck. . . . .	37
4.2.1. BICEP2/Keck. . . . .	37
4.2.2. BKP. . . . .	39
4.3. BOSS . . . . .	39
4.4. DESI. . . . .	41
<b>5. Materia oscura.</b>	<b>43</b>
5.1. Observaciones. . . . .	43
5.2. $\Lambda$ CDM. . . . .	45
5.3. SFDM. . . . .	46
5.4. Energía oscura. . . . .	48
5.4.1. Parametrización CPL. . . . .	49
5.4.2. Energía oscura temprana. . . . .	49

<b>6. Resultados.</b>	<b>51</b>
6.1. SimpleMC. . . . .	51
6.1.1. Modelo con ecuación de estado variable para materia oscura más constante cosmológica. . . . .	52
6.1.2. Primer modelo con ecuación de estado variable para materia oscura y parametrización CPL para energía oscura. . . . .	54
6.1.3. Segundo modelo con ecuación de estado variable para materia oscura y parametrización CPL para energía oscura. . . . .	56
6.1.4. Modelo con ecuación de estado variable para materia oscura más modelo de energía oscura temprana. . . . .	59
6.2. Materia oscura escalar (SFDM). . . . .	63
6.2.1. SFDM usando el método de Adams-Bashforth-Moulton de orden 4. . . . .	64
6.3. Campos escalares, otro método. . . . .	69
<b>7. Conclusiones.</b>	<b>77</b>
7.1. Restricción de parámetros usando SimpleMC. . . . .	77
7.2. Materia oscura escalar. . . . .	79
<b>8. Perspectivas.</b>	<b>83</b>
<b>Apéndice A: SimpleMC.</b>	<b>85</b>
<b>Apéndice B: Ecuaciones diferenciales para SFDM 1.</b>	<b>89</b>
<b>Apéndice C: Método ABM4.</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>96</b>



# Introducción.

No cabe duda de que los primeros años de este siglo han sido revolucionarios para la física pues se logró comprobar la existencia de dos fenómenos fundamentales de la naturaleza. Uno es el bosón de Higgs, parte crucial del Modelo Estándar de partículas, y las ondas gravitacionales, predichas por Albert Einstein a partir de la Teoría de la Relatividad General. Sin embargo aún quedan muchos fenómenos que no han recibido una explicación satisfactoria. Uno de ellos es, por ejemplo, conocer de qué está hecho nuestro universo. Es decir, se han observado distintos objetos astronómicos como estrellas, galaxias, planetas y cometas, por mencionar algunos. Pero, considerar que el universo está hecho solo de cosas que pueden verse, no explica el comportamiento de este cuando es estudiado con detenimiento. Por ejemplo, fue en los años 70's cuando Vera Rubin inició sus observaciones de galaxias cercanas y descubrió que la velocidad con que estas rotaban no coincidía con las predicciones teóricas. Estas observaciones llevaron a la conclusión de que debía existir otro elemento en las galaxias que originara dicho comportamiento. Este fue de los primeros acercamientos a la materia oscura. Con el paso de los años y numerosas mediciones se sabe ahora que los objetos estelares antes mencionados y el gas interestelar conforman solo el 4% (aproximadamente) de la materia en el universo. Mientras que el 96% restante es desconocido.

Dentro de este 96% de materia no conocida, aproximadamente el 73% está formado por “materia” cuya interacción gravitacional es repulsiva y recibe el nombre de energía oscura. El 23% es materia que solo interactúa de forma gravitacional atractiva y es llamada materia oscura [1]. Ambos componentes han sido estudiados a lo largo de los años, sin embargo

no se han obtenido resultados del todo satisfactorios.

La idea de materia oscura tiene su origen en los años 30's cuando el astrofísico suizo Fritz Zwicky llegó a la conclusión de que había muy poca materia luminosa en el clúster Coma como para explicar el movimiento de las aproximadamente 1000 galaxias que hay en él. A pesar de que no se sabe realmente de qué está hecha la materia oscura se asume que está formada por partículas subatómicas. Esto hace que la dinámica de estructuras a gran escala sea consistente con las observaciones[1].

Desde que se tiene evidencia de la existencia de la materia oscura hasta nuestros días se han propuesto varios modelos que tratan de explicarla. Por ejemplo, la materia oscura fría; WIMP (*Weakly Interacting Massive Particle*), del cual se desprende el neutralino, y modificaciones a la teoría Newtoniana (MOND) (este modelo no es propiamente materia oscura sin embargo pretende resolver los mismos problemas que esta). A pesar de que, hace algún tiempo, se creyó que la materia oscura fría era la solución al problema, actualmente se ha encontrado que tiene problemas para explicar varias fenómenos. Por ejemplo, no es capaz de describir las propiedades de las galaxias cercanas ni por qué la materia oscura se agrupa más rápidamente a grandes escalas [2].

En el presente trabajo se estudiará un modelo en particular, uno en el que se propone que la materia oscura es un campo escalar. En este modelo, llamado Scalar Field Dark Matter (SFDM), se propone que los halos galácticos se formaron debido a la condensación de un campo escalar (SF) a edades muy tempranas del Universo. Dichos halos son condensados de Bose-Einstein astronómicos que provienen de SF, lo cual explicaría las propiedades de galaxias cercanas. Se propone el modelo tal que, para grandes escalas, se tengan las predicciones hechas por materia oscura fría. Una de las ventajas de este modelo es que la materia oscura queda completamente determinada por un campo escalar fundamental [2].

# Resumen.

En este trabajo se hallan constricciones para los parámetros de distintos modelos de materia y energía oscuras usando observaciones cosmológicas como el Fondo Cósmico de Microondas (CMB), Supernovas y Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO's). También se estudia el modelo de materia oscura escalar (*SFDM*) y se halla la evolución de los parámetros de densidad de las componentes del Universo bajo este modelo usando dos algoritmos distintos. Para ambos casos se hace uso de métodos numéricos computacionales.

En el capítulo 1 se da una introducción a la Cosmología presentando las ideas relevantes que la originaron, la evolución del Universo y qué es lo que se ha observado de él hasta ahora. En el capítulo 2 se presenta el formalismo físico y matemático necesario para estudiarla desde un punto de vista formal. Se introducen la materia y energía oscuras. En el capítulo 3 se muestran las observables cosmológicas de las que se puede extraer información del Universo y los parámetros que se usan para describirlo. En el capítulo 4 se presentan los experimentos más importantes en la actualidad con los que se pretende obtener más información acerca de la materia y energía oscura. En el capítulo 5 se estudian distintos modelos de materia y energía oscura haciendo énfasis en el modelo estándar cosmológico, o modelo de materia oscura fría con constante cosmológica ( $\Lambda$ CMD), y *SFDM* como uno alternativo. En el capítulo 6 se presentan y discuten los resultados. En el capítulo 7 se dan las conclusiones del trabajo y en el capítulo 8 se presentan las perspectivas. En los apéndices se tienen instrucciones para instalar y usar SimpleMC para sistemas operativos basados en Linux, se deducen las ecuaciones diferenciales que describen al modelo SFDM y se da una explicación del método Adams-Bashforth-Moulton 4 para resolverlas.



# Abstract.

In this work we find constrictions for the parameters of different models of dark matter and dark energy using cosmological observations such as the Cosmic Microwave Background (CMB), Supernovas and Baryon Acoustic Oscillations (BAO's). We also study the Scalar Field Dark Matter model (*SFDM*) and find the evolution of the density parameters of the components of the Universe under this model using two different algorithms. For both cases, numerical computational methods are used.

In chapter 1 an introduction to Cosmology is presented, showing the relevant ideas that originated it, the evolution of the Universe and what has been observed of it up to now. In chapter 2 the physical and mathematical formalism necessary to study it from a formal point of view is presented. Dark matter and dark energy are introduced. Chapter 3 shows the cosmological observables from which information about the Universe can be extracted and the parameters that are used to describe it. In chapter 4 the most important experiments are presented with which we intend to obtain more information about dark matter and dark energy. In chapter 5 different models of dark matter and dark energy are studied, emphasizing the cosmological standard model, or cold dark matter model with cosmological constant ( $\Lambda$ CDM), and *SFDM* as an alternative model. In chapter 6 the results are presented and discussed. In chapter 7 the conclusions are given and in chapter 8 the perspectives are presented. In the appendices there are instructions to install and use SimpleMC for Linux-based OS, the differential equations that describes SFDM are deduced and an explanation of the Adams-Bashforth-Moulton 4 method is given to solve them.



# Capítulo 1

## Introducción a la Cosmología.

### 1.1. Historia de la Cosmología.

El ser humano ha tratado de entender desde siempre el Universo que lo rodea y existen muchos ejemplos de ello. Iniciando con la búsqueda, por parte de los griegos, de nuestro lugar en él. Luego con el modelo de Ptolomeo donde se creía que la Tierra debía estar en el centro del Universo. Después llegó el modelo heliocéntrico por parte de Copérnico donde, como su nombre lo dice, se sitúa al Sol como el centro del Universo. Galileo Galilei, con la mejora del telescopio, realizó diversas observaciones astronómicas que apoyaban el modelo heliocéntrico de Copérnico. Por otra parte Kepler, apoyado por las observaciones que hizo Tycho Brahe, dedujo las tres leyes que llevan su nombre las cuales explican las órbitas que siguen los planetas alrededor del Sol. Newton y sus leyes para explicar el movimiento de los cuerpos. También se debe mencionar la contribución de Albert Einstein cuyo trabajo explica las interacciones gravitacionales relacionando la cantidad de materia contenida en el Universo con la geometría del mismo. Todas estas ideas han dado como resultado la Cosmología, que comenzó dando explicaciones cualitativas y que ahora, gracias a los avances tecnológicos (como el Telescopio Espacial Hubble), se ha vuelto una ciencia de precisión capaz de dar explicaciones cuantitativas de los fenómenos. Sin embargo la Cosmología aún tiene muchos retos por delante como explicar la expansión acelerada del Universo, su

edad, la existencia del fondo cósmico de microondas, la abundancia de elementos ligeros, el comportamiento de los arreglos de galaxias, entre muchos más. Para dicho fin, se apoya de otras ramas de la física como la Termodinámica, la Física Atómica o la Gravitación, por mencionar algunas. En el próximo capítulo se darán las herramientas básicas para aprender Cosmología.

## 1.2. Breve historia del Universo.

Para hablar de la historia del Universo se debe viajar 13.8 miles de millones de años al pasado, pues se sabe que esta es la edad del Universo. Al inicio, era tan caliente y denso que los fotones no podían viajar libremente como se sabe que lo hacen. Se tenía materia en forma de electrones y núcleos atómicos mientras que los fotones se encontraban saltando entre ellos. Después, a una temperatura aproximada de  $3000K$ , la energía de los fotones bajó de tal forma que no podían seguir ionizando al Universo. Esto ocasionó que el plasma primordial también se enfriara y se formaran los primeros elementos ligeros (hidrógeno, helio y litio), permitiendo que los fotones pudieran viajar libremente y formaran el Fondo Cósmico de Microondas que permea el Universo hasta nuestros días. Las mediciones actuales sugieren que la temperatura de esta radiación,  $2.7K$ , es casi uniforme pues se han observado variaciones en ella. Se cree que dichas variaciones fueron causadas por las inhomogeneidades de la materia que crecieron debido a las interacciones gravitacionales. Estas mismas interacciones permitieron que la materia comenzara a juntarse y eventualmente se formaran las galaxias, estrellas y demás cuerpos astrofísicos. Por otro lado en la actualidad se sabe que el Universo está en una época de expansión acelerada. Además, la mayor parte del Universo está formado por "materia" que no se ha observado en la Tierra. Aproximadamente el 4% son leptones y quarks (de lo que están hechas las estrellas, planetas y los seres humanos), y fotones. También se tiene la materia oscura, aproximadamente el 23% del contenido del Universo, necesaria para explicar la estabilidad de las galaxias y la formación de estructura a grandes escalas, entre otras cosas, de la cual solo se sabe que

interactúa gravitacionalmente. Y la parte restante es energía oscura, de la que no se sabe mucho pero se cree que es responsable de la expansión acelerada del Universo [3], [4], [5]. En la figura (1.1) se muestra un esquema de la evolución del Universo.

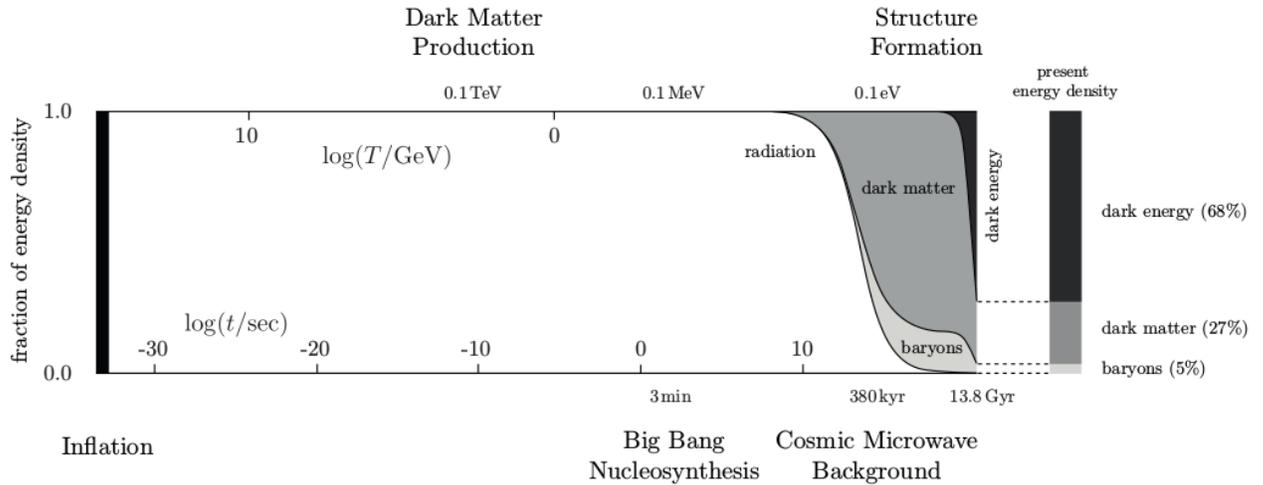


Figura 1.1: En esta figura se muestra la evolución del Universo. Se presentan los eventos importantes y a qué tiempo ocurrieron. También se muestran los elementos que conforman el Universo y en qué cantidad durante las diferentes etapas. En el eje horizontal inferior se tiene una escala logarítmica en función del tiempo, en la parte superior se tienen la energía en electronvolts. Mientras que en el eje vertical se tiene la densidad de energía. [4]

### 1.3. El Universo observado.

Las primeras observaciones que se tienen del Universo se hicieron usando la luz visible. Los primeros objetos, y principales fuentes de luz (en el espectro visible) en el Universo, que se observaron fueron las **estrellas**. La luz que emiten se genera debido a procesos de fusión nuclear dentro de ellas. El Sol es un buen ejemplo de una estrella típica. Tiene una masa de aproximadamente  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ . Este valor recibe el nombre de masa solar y suele tomarse como estándar para indicar la masa de otros objetos astrofísicos, se denota como  $M_{\odot}$ . Por

ejemplo la masa de Sagittarius A, el agujero negro en la Vía Láctea (nuestra galaxia), se expresa como  $4 \times 10^6 M_{\odot}$  [3]. En la figura (1.2) se muestra un campo de estrellas.



Figura 1.2: Campo de estrellas conocido como Messier 107, es uno de los arreglos globulares de estrellas hallado alrededor del disco de la Vía Láctea. Fuente: [https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image\\_feature\\_2321.html](https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_2321.html)

Se ha observado que las estrellas también se agrupan en arreglos que se conocen comúnmente como **galaxias**. La nuestra, mostrada en la figura (1.3), está formada por aproximadamente  $10^{11}$  estrellas cuyas masas están en un rango de  $0.1M_{\odot}$  hasta decenas de masas solares. Consiste de un bulbo central y un disco con un radio de  $12.5 \text{ kiloparsecs}$ , con un espesor de  $0.3 \text{ kpc}$ . El parsec (pc) es una unidad de longitud muy usada en Cosmología como alternativa a los años luz (ly), distancia que recorre la luz en un año. La equivalencia entre ellos es

$$1 \text{ pc} = 3.261 \text{ ly} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m} \quad (1.1)$$

El Sistema Solar, donde está la Tierra, se encuentra aproximadamente a  $8 \text{ kpc}$  del centro de la Vía Láctea. En este punto, la galaxia gira con un periodo de 200 millones de años [3].



Figura 1.3: La Vía Láctea vista desde la Estación Espacial Internacional. Fuente: <https://www.nasa.gov/content/milky-way-viewed-from-the-international-space-station>

A su vez, las galaxias también forman **arreglos** y luego estos, gracias a la gravedad, se agrupan en arreglos más grandes. La Vía Láctea forma parte de un pequeño grupo de galaxias conocido como el **grupo local**. La galaxia más cercana y con una masa similar a la nuestra es la galaxia de Andrómeda, se encuentra a  $770kpc$ . Mientras que el grupo local se localiza en el súper arreglo de 100,000 galaxias conocido como Laniakea. Dentro de estos súper arreglos también existen espacios vacíos de hasta  $50Mpc$ . Estudios recientes muestran que las estructuras más grandes encontradas son las ya mencionadas, además que a grandes escalas el Universo es suave [3], [7].

Por otro lado, se tienen observaciones en otros rangos del espectro electromagnético. Por ejemplo, se tiene el Fondo Cósmico de Microondas que, como se mencionó anteriormente, es la radiación que permea el Universo y que tiene una temperatura aproximada de  $2.725 \pm 0.001K$ . También se tienen mediciones en ondas de radio e infrarrojo que han permitido detectar muchas galaxias y extraer información de ellas. Y por último se tienen las detecciones hechas en rayos X las cuales provienen de gases calientes en el Universo.

Entonces la información que se ha extraído de estas observaciones es que el Universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas. Donde isotrópico significa que la distribución

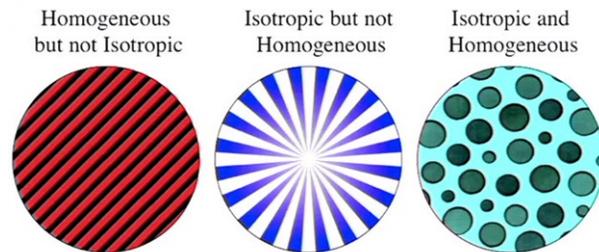


Figura 1.4: Ejemplos de homogeneidad e isotropía. Fuente: <http://www.soloentendidos.com/wp-content/uploads/2015/12/04-12-2015-12-13-58.jpg>

de galaxias no depende de la dirección y homogéneo significa que es isotrópico en todos los puntos o bien que es independiente de la posición. A esto se le conoce como **principio cosmológico**. También se sabe que el Universo se está expandiendo y que era muy caliente en el pasado, que la materia domina sobre la antimateria, que a escalas locales es inhomogéneo, que presenta curvatura cero y que desconocemos de qué está formado gran parte de su contenido.

## 1.4. Historia térmica.

- **Bariogénesis.** No sé sabe realmente cuándo ocurrió pero se propone para explicar por qué el Universo actualmente contiene un mayor número de materia que de antimateria. Se considera que inicialmente se tenía un número igual de materia y antimateria.
- **Transición de fase electrodébil.** A  $100\text{GeV}$  las partículas reciben su masa por medio del mecanismo de Higgs. Sucedió aproximadamente a los  $20\text{ps}$  de haberse formado el Universo.
- **Transición de fase de QCD.** Cerca de los  $20\mu\text{s}$ , a energías menores que  $150\text{MeV}$  Las interacciones fuertes entre quarks y gluones tomaron relevancia y comenzaron a formarse los bariones y mesones.

- **Descongelamiento de la materia oscura.** Puesto que la materia oscura interactúa débilmente con la materia ordinaria se espera que el desacople entre estos dos tipos de materia haya ocurrido a edades muy tempranas del Universo, sin embargo no se sabe con exactitud cuándo ocurrió.
- **Desacople de los neutrinos.** Los neutrinos solo interactúan con el plasma primordial por medio de la interacción débil. Se cree que el desacople ocurrió a  $0.8MeV$ .
- **Aniquilación electrón-positrón.** Este fenómeno ocurrió un poco después del desacople de los neutrinos. La energía debido a esta aniquilación fue cedida a los fotones pero no a los neutrinos.
- **Big Bang nucleosíntesis.** Alrededor de 3 minutos después del Big Bang, se formaron los elementos ligeros.
- **Recombinación.** Cuando la energía fue lo suficientemente baja se formaron los átomos de hidrógeno neutro.
- **Desacople de los fotones.** Antes de producirse la recombinación, los fotones y el resto del plasma primordial estaban ligados por medio de la dispersión de Thomson. Cuando ocurrió recombinación, la formación de átomos provocó que dejara de producirse la dispersión y que los fotones pudieran viajar libres formando el Fondo Cósmico de Microondas.



# Capítulo 2

## Cosmología.

### 2.1. Geometría y dinámica.

Antes de comenzar es importante mencionar que, como primera aproximación, se considerará el principio cosmológico. Es decir, que el Universo es homogéneo e isotrópico. También que la Cosmología está basada en la Teoría de la Relatividad General y debido a éso se usará su formalismo matemático.

#### 2.1.1. La métrica.

En Relatividad General se estudia la interacción entre la geometría del espacio-tiempo con la cantidad de materia contenida. En general, el espacio-tiempo que se considera no es necesariamente plano sino que puede ser curvo. La curvatura del espacio-tiempo produce efectos físicos sobre la materia que contiene, dichos efectos son usualmente asociados a un campo gravitacional. Por otro lado, la curvatura del espacio-tiempo se relaciona con la materia contenida por medio de un tensor de energía momento [8]. Lo anterior puede resumirse diciendo que la materia le indica al espacio-tiempo como curvarse y, a su vez, la geometría le dice a la materia cómo moverse. Lo anterior está en la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein (geometría del espacio-tiempo),  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento (materia contenida en el Universo) y  $G$  es la constante de gravitación universal [4], [8].

La distancia entre dos puntos de un espacio-tiempo curvo puede medirse por medio del elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica y contiene toda la información sobre la estructura del espacio-tiempo. Los valores que los índices  $\mu$  y  $\nu$  pueden tomar dependen de las dimensiones del espacio-tiempo. Por ejemplo, en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones los índices toman los valores 0, que corresponde a la coordenada temporal, 1, 2 y 3 que corresponden a las coordenadas espaciales. Los índices latinos, como  $i$  o  $j$ , representan solo a las coordenadas espaciales y pueden tomar los valores 1, 2 y 3. Para obtener la forma de la métrica es necesario resolver las ecuaciones de Einstein.

Antes de continuar es necesario aclarar que en las secciones y capítulos siguientes se considerarán unidades naturales donde tanto la velocidad de la luz como la constante de Planck valen 1.

$$c = \hbar = 1 \quad (2.3)$$

Y la signatura de la métrica será  $(+ - - -)$ . Por ejemplo, en el espacio de Minkowski, el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2. \quad (2.4)$$

### 2.1.2. Espacios máximálmente simétricos.

El hecho de que el Universo sea homogéneo e isotrópico nos permite foliar el espacio en rebanadas de tres dimensiones, cada una a un tiempo fijo, siendo estas también homogéneas e isotrópicas. Vamos a clasificar estas rebanadas. Nótese que estos espacios tres dimensionales tienen curvatura constante. Pueden tener curvatura cero, positiva o negativa.

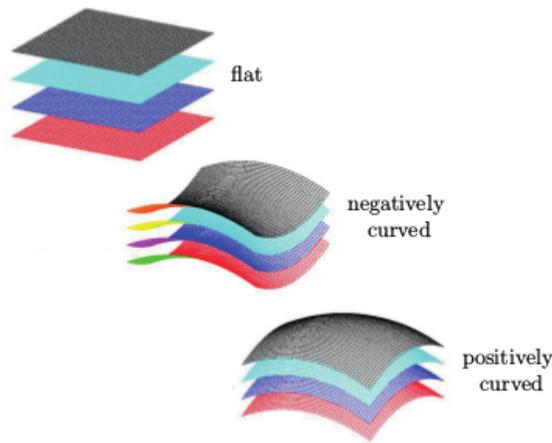


Figura 2.1: El espacio-tiempo del Universo puede ser foliado en hipersuperficies espaciales con curvatura plana, positiva y negativa. Fuente: [4].

Para el caso **plano**, curvatura cero, se tiene un espacio Euclídeo de tres dimensiones  $E^3$  cuyo elemento de línea está dado por

$$dl^2 = d\vec{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.5)$$

Para el caso de curvatura **positiva**, se tiene un espacio de tres dimensiones representado por una esfera dentro en un espacio Euclídeo de cuatro dimensiones  $E^4$ . El elemento de línea es

$$dl^2 = d\vec{x}^2 + du^2, \quad (2.6)$$

con

$$\vec{x}^2 + u^2 = a^2. \quad (2.7)$$

Donde  $a$  es el radio de la esfera. La superficie de la esfera también es homogénea e isótropa [4].

En el caso de una curvatura **negativa**, el espacio de tres dimensiones puede representarse como un hiperboloide. El elemento de línea es

$$dl^2 = d\vec{x}^2 - du^2, \quad (2.8)$$

Con

$$\vec{x}^2 - u^2 = -a^2. \quad (2.9)$$

Donde  $a^2$  es una constante arbitraria. El hiperboloide también es homogéneo e isótropo [4].

Para estudiar los dos casos de curvatura distinta de cero se debe hacer, por conveniencia, un reescalamiento de tal forma que ahora se trabaje con cantidades adimensionales. Considérese el cambio

$$\vec{x} \rightarrow a\vec{x}, \quad (2.10)$$

$$u \rightarrow au. \quad (2.11)$$

Donde  $a$  tiene unidades de longitud. Podemos reescribir el elemento de línea para ambos casos como

$$dl^2 = a^2 [d\vec{x}^2 \pm du^2], \quad (2.12)$$

con

$$\vec{x}^2 \pm u^2 = \pm 1. \quad (2.13)$$

De esta última condición se tiene

$$udu = \mp \vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (2.14)$$

Usando la expresión anterior se puede reescribir el elemento de línea como

$$dl^2 = a^2 \left[ d\vec{x}^2 \pm \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^2} \right]. \quad (2.15)$$

Para incluir el caso de curvatura cero (plano) se debe reescribir el elemento de línea como

$$dl^2 = a^2 \left[ d\vec{x}^2 + k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - k\vec{x}^2} \right] \equiv a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.16)$$

donde

$$\gamma_{ij} \equiv \delta_{ij} + \kappa \frac{x_i x_j}{1 - \kappa (x_k x^k)}. \quad (2.17)$$

Mientras que  $\kappa = 0$  corresponde al caso plano,  $\kappa = +1$  representa el caso con curvatura positiva (esfera) y  $\kappa = -1$  corresponde a curvatura negativa (hiperboloide). Para que  $dl^2 > 0$  se debe tomar  $a^2 > 0$ . Y la forma de  $\gamma_{ij}$  depende de las coordenadas elegidas [4].

Por conveniencia, se usarán coordenadas polares esféricas. Esto nos transformará (2.16) en una métrica diagonal. Para esto se hará uso de [4]

$$d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.18)$$

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr. \quad (2.19)$$

Donde  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . El elemento de línea queda como

$$dl^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.20)$$

La expresión anterior puede escribirse de una forma más simple todavía

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2]. \quad (2.21)$$

Donde se ha redefinido la coordenada radial tal que

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.22)$$

La forma de  $S_k$  depende del valor de  $k$ .

$$S_k(\chi) \equiv \begin{cases} \sinh \chi & k = -1, \\ \chi & k = 0, \\ \sin \chi & k = +1. \end{cases} \quad (2.23)$$

## 2.2. Métrica FLRW.

Para estudiar el Universo se usa la métrica FLRW o bien, de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Esta métrica describe un Universo en expansión que además es homogéneo e isotrópico. Se obtiene agregando la coordenada temporal a la métrica tratada en la sección anterior. Esto es

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.24)$$

Donde  $a(t)$ , llamado factor de escala, es un parámetro que depende del tiempo. Nótese que (2.24) depende solamente del factor de escala y del parámetro de curvatura  $k$ . Las coordenadas  $x^i \equiv \{x^1, x^2, x^3\}$  reciben el nombre de **coordenadas comóviles** y se relacionan con las **coordenadas físicas** como  $x_{phys}^i = a(t)x^i$ . El sistema de coordenadas comóviles sigue la expansión del Universo de tal forma que las coordenadas espaciales de objetos que no se mueven, no cambian. La distancia entre dos objetos medida en coordenadas comóviles permanece igual. Sin embargo la distancia física o propia de los objetos crece con el tiempo mientras el Universo se expande.

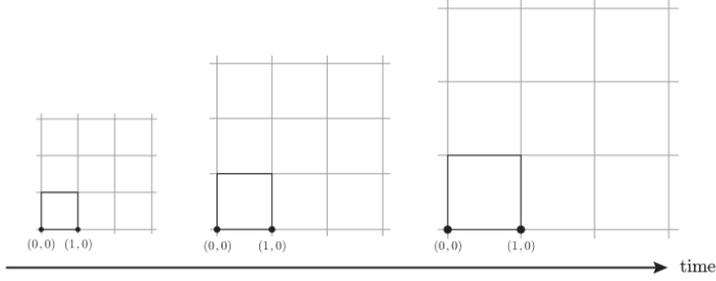


Figura 2.2: La distancia entre dos puntos medida desde el sistema de coordenadas comóviles permanece constante mientras el Universo se expande. La distancia física es proporcional a la comóvil por el factor de escala  $a(t)$  [4].

La velocidad física de un objeto está dada por

$$v_{fis}^i \equiv \frac{dx_{fis}^i}{dt} = a(t) \frac{dx^i}{dt} + \frac{da}{dt} x^i \equiv v_{pec}^i + H x_{fis}^i, \quad (2.25)$$

donde se define el parámetro de Hubble como

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.26)$$

En (2.25) se tienen dos contribuciones: el término  $v_{pec}^i$  se llama velocidad peculiar mientras que  $H x_{fis}^i$  recibe el nombre de flujo de Hubble. La velocidad peculiar es la velocidad del objeto medida por un observador comóvil, es decir, uno que se mueve con el flujo de Hubble [4].

En coordenadas esféricas la métrica FLRW se escribe como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.27)$$

La expresión (2.27) puede ser reescalada y seguir representado lo mismo usando los siguientes cambios

$$a \rightarrow \lambda a \quad (2.28)$$

$$r \rightarrow \frac{r}{\lambda} \quad (2.29)$$

$$k \rightarrow \lambda^2 k \quad (2.30)$$

Esta libertad permite fijar el valor del factor de escala en uno en la actualidad. Esto es

$$a(t_0) \equiv 1 = a_0. \quad (2.31)$$

Donde  $t_0$  representa el tiempo actual. Y todos los parámetros que se evalúen en  $t_0$  se denotarán con el subíndice 0.

Usando (2.22) y (2.23) se puede escribir la métrica FLRW como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2]. \quad (2.32)$$

La métrica escrita como (2.32) es útil cuando se quiere estudiar la propagación de la luz [4]. Con el mismo fin se define el tiempo conforme

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \quad (2.33)$$

Sustituyendo (2.33) en (2.32) se puede reescribir la métrica FLRW como

$$ds^2 = a^2(t) [d\tau^2 - (d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\Omega^2)] \quad (2.34)$$

Note que (2.34) tiene una forma similar a la métrica de Minkowski multiplicada por el factor de escala cuyo argumento es ahora el tiempo conforme.

### 2.3. Geodésicas (Cinemática).

En la sección anterior se presentó la métrica que describe al Universo a grandes escalas. En esta sección se verá cómo una partícula se mueve en la métrica FLRW. Las partículas se

mueven a lo largo de geodésicas. Una geodésica es una curva que representa la trayectoria más corta entre dos puntos en el espacio-tiempo. Para una partícula de prueba con masa y en ausencia de fuerza externas no gravitacionales, en caída libre (solo sienten los efectos de la gravedad intrínseca en la métrica) la expresión más general de una geodésica está dada por

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0. \quad (2.35)$$

Donde  $x^\nu$  son las coordenadas y  $s$  es el tiempo propio de la partícula,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  son los símbolos de Christoffel que dependen de la métrica y están dados por

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}). \quad (2.36)$$

Donde la coma en la métrica significa derivada respecto a las coordenadas. Es decir  $\frac{\partial A}{\partial x^\mu} = A_{,\mu}$ .

Existen tres tipos de geodésicas [9]:

- **Nula:** Representa la trayectoria seguida por rayos de luz o partículas sin masa.

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0. \quad (2.37)$$

- **Temporal:** Representa la trayectoria de partículas con velocidades menores que las de la luz.

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu > 0. \quad (2.38)$$

- **Espacial:** Representa la trayectoria de partículas con velocidades mayores que las de la luz.

$$g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu < 0. \quad (2.39)$$

Con  $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ .

### 2.3.1. Geodésicas en la métrica FLRW.

Para obtener las geodésicas es necesario conocer los símbolos de Christoffel. Para la métrica FLRW los únicos que son distintos de cero están dados por

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}\gamma^{il}(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}). \quad (2.42)$$

Usando  $P^\mu = mu^\mu$ , se puede reescribir (2.35) como

$$P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial X^\alpha} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta. \quad (2.43)$$

La homogeneidad del Universo implica que  $\partial_i P^\mu = 0$  lo cual permite reescribir (2.43) como

$$P^0 \frac{dP^\mu}{dt} = - (2\Gamma_{0j}^\mu P^0 + \Gamma_{ij}^\mu P^i) P^j. \quad (2.44)$$

De esta expresión se obtiene <sup>1</sup> que la magnitud del momento en tres dimensiones para partículas con masa y sin masa decae con la expansión del Universo, es decir,

$$p \propto \frac{1}{a}. \quad (2.45)$$

Donde

$$p^2 \equiv -g_{ij}P^iP^j \quad (2.46)$$

---

<sup>1</sup>Para un mayor desarrollo ver la referencia [4]

## 2.4. Corrimiento al rojo.

Como se mencionó en el capítulo 1, la mayor parte de la información que se tiene del Universo se ha obtenido a través de la luz que nos llega de los cuerpos astrofísicos que se encuentran en él. Sin embargo para obtener una buena interpretación de la información debe tomarse en cuenta que, a lo largo de su viaje, la luz sufre cambios. Cuando un objeto se acerca a nosotros, la luz que recibimos de él se compacta volviéndola más azul. Si el objeto se está alejando entonces la onda se alarga y es observada más roja. Se tiene que la luz emitida al tiempo  $t_1$  con longitud de onda  $\lambda_1$  será observada a  $t_0$  con una longitud de onda dada por

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1. \quad (2.47)$$

Como convención se define el parámetro de corrimiento al rojo como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}. \quad (2.48)$$

O bien

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.49)$$

Usando que  $a(t_0) \equiv 1$  se tiene

$$1 + z = \frac{1}{a(t_1)}. \quad (2.50)$$

## 2.5. Ecuación de continuidad.

La condición de que el Universo es homogéneo e isotrópico hace que el tensor de energía-momento sea el de un fluido perfecto [4]

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $P$  es la presión del fluido y  $U^\mu$  es la 4-velocidad relativa al observador.

De (2.51) se puede obtener la ecuación de continuidad dada por<sup>2</sup>

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (2.52)$$

Dentro del paréntesis,  $\rho$  es la dilución causada por el incremento de volumen y  $P$  es la pérdida de energía debido a que la presión ha hecho trabajo, ambos términos son causados por la expansión del Universo. La implicación de (2.52) es que la energía se conserva.

## 2.6. Contenido del Universo.

### 2.6.1. Materia.

Este término se refiere a cualquier forma de materia que cumpla con la condición de que su presión tiene que ser mucho menor que su densidad de energía.  $|P| \ll \rho$ . Esto es el caso de un gas de partículas no relativistas donde la densidad de energía es dominada por la masa de las partículas (también se conoce a este caso como polvo). Haciendo la presión igual con cero en (2.52) la densidad de energía es de la forma

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (2.53)$$

Este resultado refleja el hecho de que el Universo se expande y por lo tanto su volumen crece como  $V \propto a^3$  [4].

Como materia se puede considerar lo siguiente:

- **Bariones.** Desde el punto de vista de la Cosmología, se usa el término bariones para referirse a la materia ordinaria (de la que están hechas la estrellas, planetas y nosotros).

---

<sup>2</sup>Ver sección 1.3.1 de [4].

- **Materia oscura.** La mayor parte del contenido de materia en el Universo es de este tipo. Se sabe que interactúa con la materia ordinaria únicamente de forma gravitacional. ¿Qué es? o ¿de qué está hecha? es aún un tema de investigación. En los siguientes capítulos se presentará información detallada de este tipo de materia.

### 2.6.2. Radiación.

Se usa el término radiación para denotar cualquier cosa cuya presión y densidad de energía se relacionen según

$$P = \frac{1}{3}\rho. \quad (2.54)$$

Este es el caso de los gases de partículas relativistas donde la densidad de energía es dominada por el término cinético. Con esta condición, la ecuación (2.52) implica que

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (2.55)$$

Como radiación se consideran:

- **Fotones.** Son partículas relativistas sin masa que dominaron el Universo en épocas tempranas. Se detectan en nuestra época como el Fondo Cósmico de Microondas.
- **Neutrinos.** Anteriormente se consideraban como radiación pero los resultados de experimentos actuales indican que tiene masas muy pequeñas por lo que en ocasiones suele incluirse como un tipo de materia.
- **Gravitones.** Ondas gravitacionales que fueron producidas en el Universo temprano.

### 2.6.3. Energía oscura.

La mayor parte del Universo parece estar dominada por una componente más, que es distinta a la materia y a la radiación. Esta componente tiene presión negativa, es decir,

$$P = -\rho. \quad (2.56)$$

De (2.52) se tiene que la densidad de energía para la energía oscura va como

$$\rho \propto a^0. \quad (2.57)$$

Se propone para explicar la expansión acelerada del Universo.

- **Energía del vacío.** Teoría cuántica de campos predice que al estado base de la energía del vacío le corresponde el siguiente tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu}^{vac} = \rho_{vac} g_{\mu\nu}. \quad (2.58)$$

Sin embargo existe una discrepancia entre el valor predicho de la densidad y el valor observado,  $\frac{\rho_{vac}}{\rho_{obs}} \sim 10^{120}$  [4].

- **Constante cosmológica.** Se agrega el término  $-\Lambda g_{\mu\nu}$  en el lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein. Donde  $\Lambda$  es una constante.

Es posible escribir una ecuación de estado general para las componentes descritas en las subsecciones anteriores.

$$\omega = \frac{P}{\rho}. \quad (2.59)$$

Donde  $\omega$  está dado en

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.60)$$

O bien

$$\rho \propto a^{-n}. \quad (2.61)$$

Componente	$\omega$	n
Materia	0	3
Radiación	$\frac{1}{3}$	4
Curvatura	$-\frac{1}{3}$	2
Energía oscura	-1	0

## 2.7. Ecuaciones de Friedmann.

Las ecuaciones de Friedmann describen la expansión del Universo y pueden ser obtenidas de dos formas. Desde el punto de vista Newtoniano, se calcula la energía potencial gravitacional y la energía cinética de una partícula de prueba. Mientras que, desde el punto de vista de la Relatividad General, se calculan los tensores de Einstein y energía-momento<sup>3</sup>. Dichas ecuaciones son

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.62)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (2.63)$$

En las expresiones anteriores se considera que  $\rho$  y  $P$  representan la suma de las contribuciones de las densidades de energía y de presión de todas las componentes del Universo.

Se definen los parámetros adimensionales de densidad como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}. \quad (2.64)$$

Donde el subíndice  $i$  hace referencia a cada una de las componentes. y  $\rho_{crit}$  es la densidad crítica el día de hoy.

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.65)$$

---

<sup>3</sup>Para más detalles, consultar las referencias [3] y [4].

Con lo anterior se puede reescribir (2.62) como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda. \quad (2.66)$$

Donde  $\Omega_r$  está asociado con la radiación,  $\Omega_m$  con la masa,  $\Omega_k$  con la curvatura y  $\Omega_\Lambda$  con la constante cosmológica.

# Capítulo 3

## Observables cosmológicas.

En el capítulo anterior se hizo un resumen de la teoría sobre la que está construida la Cosmología. Sin embargo también es necesario saber cuáles son los parámetros y las observaciones que se usan para poder comprobar que el Universo realmente se comporta según lo descrito en el capítulo 2.

Respecto a las pruebas u observaciones debe considerarse que en la Cosmología observacional existen varias fuentes de incertidumbre, entre ellas la estadística. Además existen tres fuentes sistemáticas que pueden aplicarse a los parámetros a usar:

- Debido a las suposiciones del modelo cosmológico. Por ejemplo el número de parámetros propuesto y el rango en que pueden estar sus valores.
- Debido a la incertidumbre en la astrofísica de los objetos. Por ejemplo una curva de luz ajustada de una supernova, o bien, la relación masa-temperatura en un arreglo de galaxias.
- Debido a las limitaciones observacionales e instrumentales. Por ejemplo, el efecto de ver un lente gravitacional débil o la forma del haz en las mediciones de anisotropías en el Fondo Cósmico de Microondas [10].

### 3.1. Parámetros cosmológicos.

Los primeros parámetros que se consideran son los de densidad de cada uno de los elementos que componen el Universo y la constante de Hubble  $H_0$ . Típicamente se considera que existen bariones, fotones, neutrinos y materia oscura fría. La notación que se usa es la siguiente  $\Omega_b \rightarrow$  bariones (materia ordinaria),  $\Omega_\gamma \rightarrow$  fotones,  $\Omega_\nu \rightarrow$  neutrinos y  $\Omega_c \rightarrow$  materia oscura fría. Cuando se trabaja con la materia total, es decir, materia ordinaria más materia oscura se usa el símbolo  $\Omega_m$ . Como las observaciones parecen indicar que el Universo es plano, se tienen curvatura cero y, por lo tanto, el parámetro de densidad asociado con la curvatura es cero. Si se conocen los valores de estos parámetros en la actualidad es posible describir el Universo en épocas anteriores.

Aunque en este trabajo no se consideran perturbaciones es útil saber que para estudiarlas se utiliza el espectro de potencias adimensional  $\Delta^2$  (conjugado de Fourier equivalente a la descripción de la densidad). Por ejemplo, se usa para describir perturbaciones en la curvatura.

Por otro lado, se sabe que el Universo está ionizado en corrimientos al rojo bajos y que los electrones ionizados pueden dispersar fotones alterando el patrón que se observa. Esto dio origen a las anisotropías observadas en el Fondo Cósmico de Microondas. Esto puede ser descrito por el parámetro  $\tau$  que es la profundidad óptica de dispersión (probabilidad de que el fotón se disperse una vez) o, de forma equivalente, puede usarse el corrimiento al rojo en la época de reionización  $z_{ion}$ .

El modelo que usa los parámetros anteriores para describir el Universo recibe el nombre de  $\Lambda$ CDM o Modelo Estándar Cosmológico.

Sin embargo los parámetros anteriores no son los únicos. Es posible usar muchos otros como la edad del Universo, la temperatura en el presente de los neutrinos de fondo, la época de de la igualdad materia-radiación o la razón barión-fotón. Estos son considerados parámetros derivados pues pueden obtenerse de los que se mencionaron al principio de la sección.

## 3.2. Constante de Hubble.

En 1929 Edwin Hubble descubrió la expansión del Universo al medir la distancia que existe a galaxias cercanas. Halló la relación entre la distancia y la velocidad de recesión, y la pendiente de esta relación se definió como la constante de Hubble  $H_0$ . Se estima que el valor de dicha constante debe hallarse en el intervalo [10]

$$40\text{km}s^{-1}\text{Mpc}^{-1} \lesssim H_0 \lesssim 100\text{km}s^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.1)$$

Uno de los resultados más importantes se obtuvo del Hubble Space Telescope Key Project basado en la relación empírica entre el periodo y la luminosidad de las estrellas variables Cefeidas para obtener la distancia a 31 galaxias. Estimaron la Constante de Hubble en [11]

$$H_0 = 72 \pm 3 \pm 7\text{Kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.2)$$

Donde el término  $\pm 3$  se refiere al error estadístico y  $\pm 7$  al error sistemático.

Un estudio posterior en el que se usó el Telescopio Espacial Hubble observó más de 600 Cefeidas y obtuvo un nuevo valor para la constante de Hubble [12]

$$H_0 = 73.24 \pm 1.74\text{km}s^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.3)$$

Por otro lado, la colaboración Planck también midió de forma indirecta el valor de la constante de Hubble y obtuvo un valor más bajo [13]

$$H_0 = 67.3 \pm 1.2\text{km}s^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.4)$$

La diferencia entre los valores de  $H_0$  obtenidos por los diferentes experimentos aún es motivo de investigación.

### 3.3. Supernovas.

Se sabe que, de forma empírica, el pico de luminosidad de las supernovas tipo Ia (SNIa) puede usarse como un indicador de distancia usando la relación entre el corrimiento al rojo y la distancia. La explicación más aceptada sobre este tipo de supernovas es que son enanas blancas en las que suceden procesos termonucleares involucrando carbono y oxígeno [10].

Existen dos grandes estudios sobre las supernovas: el Supernova Cosmology Project y el High-z Supernova Search Team. Ambos encontraron evidencia de que el Universo se está expandiendo [14], [15], [16]. Cuando se combinan los resultados de estos estudios con los datos del Fondo Cósmico de Microondas (este tema será visto en las secciones siguientes) se obtienen los siguientes valores [10]

$$\Omega_m \approx 0.3, \tag{3.5}$$

$$\Omega_\Lambda \approx 0.7. \tag{3.6}$$

Por otro lado, cuando se combinan los datos obtenidos por el equipo SNLS3 (Supernova Legacy Survey Three-Year) con los de Oscilaciones Acústicas de Bariones y WMAP7; y considerando que la energía oscura se comporta como constante cosmológica ( $\omega = -1$ ) se obtienen los siguientes valores [17], [18]

$$\Omega_m = 0.279_{-0.015}^{+0.019}, \tag{3.7}$$

$$\Omega_\Lambda = 0.724_{-0.016}^{+0.017}. \tag{3.8}$$

Es importante mencionar que los valores para los parámetros de densidad arriba mencionados no coinciden con los que obtuvo la colaboración Planck.

### 3.4. Radiación cósmica de fondo.

O también conocida como CMB (Cosmic Microwave Background) son microondas que llenan el Universo, fue descubierta en 1965. Antes de la recombinación, los bariones y los fotones estaban estrechamente ligados. Después de que se desacoplaron, los bariones colapsaron mientras que los fotones quedaron libres y comenzaron a viajar. Esta radiación contiene información de la época de última dispersión, de lentes gravitacionales, de la dispersión debida a gas ionizado, entre otras cosas. Todo lo anterior debido a que han estado viajando por todo el Universo y la interacción con todo lo que han encontrado a su paso deja una huella que puede detectarse hasta nuestro días. El CMB presenta polarización lineal. Se divide en dos partes, desde el punto de vista geométrico se tiene la parte que corresponde a la divergencia (recuérdese que es un campo electromagnético) y se denomina modo E. La segunda parte se asocia con el rotacional y se llama modo B.

Es importante mencionar que el Fondo Cósmico de Microondas presenta anisotropías que se estudian usando un espectro de potencias angular dado en términos de los armónicos esféricos.

$$T(\theta, \phi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.9)$$

Donde  $a_{lm}$  es constante y  $l$  es el momento multipolar. Este espectro de potencias sigue (o es muy similar) a la radiación de cuerpo negro con una temperatura de  $T = 2.725K$  [19], [20].

En el 2013 el telescopio (y la colaboración) Planck liberaron los datos obtenidos sobre la temperatura de las anisotropías del CMB cuyo espectro de potencias, mostrado en la figura 3.1, va más allá del multipolo  $l = 2000$ .

El estudio de la radiación cósmica de fondo ha permitido conocer, con alta precisión, la edad del Universo. Que la recombinación ocurrió en  $z \simeq 1100$  y que volvió a ionizarse en  $z \simeq 10 - 30$ . El Universo es casi plano. Muestra que es necesaria la existencia de la materia oscura y la energía oscura. No muestra evidencia sobre dinámica de la energía oscura, es

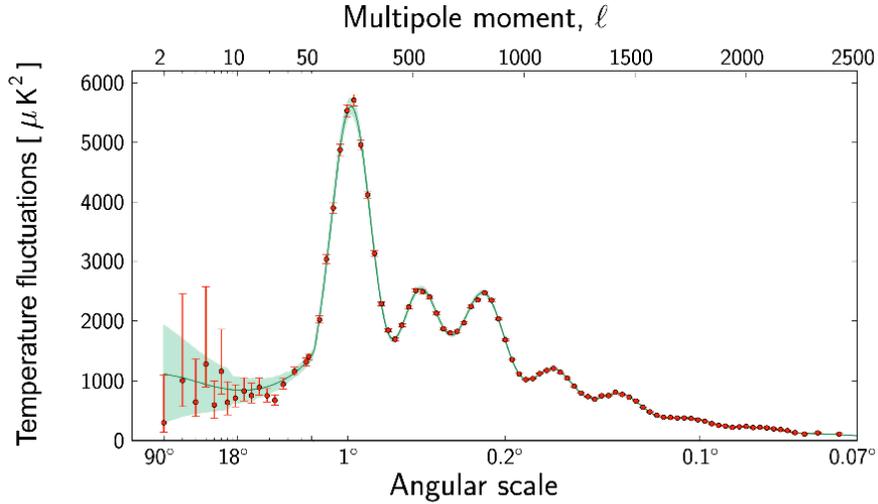


Figura 3.1: Espectro de potencias de temperatura de las anisotropías del Fondo Cósmico de Microondas. El eje x cambia de logarítmico a lineal en el momento multipolar  $l = 50$ . La línea sólida representa el mejor ajuste considerando  $\Lambda DCM$ . Fuente: [10].

decir, se comporta como constante cosmológica. La inestabilidad gravitacional es suficiente para formar las grandes estructuras observadas en el Universo. Las perturbaciones iniciales fueron adiabáticas y casi Gaussianas [10], [19]. Donde adiabaticidad significa que todos los tipos de material en el Universo comparten la misma perturbación. Y Gaussianidad significa que las perturbaciones iniciales obedecen estadísticas gaussianas.

### 3.5. BAOs.

Se sabe que el Universo era casi uniforme en su inicio, contenía pequeñas fluctuaciones donde la densidad de materia era mayor que el promedio. Con el paso del tiempo la fuerza gravitacional hizo que estas regiones con mayor densidad se fueron colapsando poco a poco hasta lograr que esto sucediera a grandes escalas. Sin embargo la presión de radiación empujaba de regreso estas regiones oponiéndose al colapso. La presión hace que los bariones y fotones se alejan de la región de sobredensidad formando una onda esférica. Como la

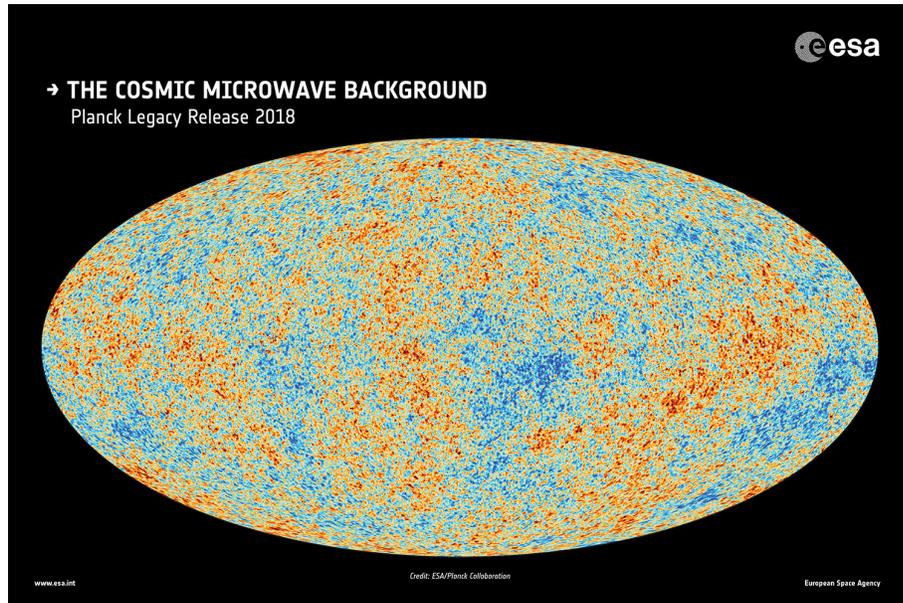


Figura 3.2: Anisotropías de la radiación cósmica de fondo observada por la misión Planck basada en los datos publicados en Julio de 2018. Fuente: [http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2018/07/Planck\\_s\\_view\\_of\\_the\\_cosmic\\_microwave\\_background2](http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2018/07/Planck_s_view_of_the_cosmic_microwave_background2).

materia oscura solo interactúa gravitacionalmente esta se queda en el centro de la onda. Antes de que ocurriera el desacople, los bariones y fotones se movían juntos. Al desacoplarse, los fotones comenzaron a viajar por el Universo y ya no hubo presión de radiación, por lo que solo quedaron la sobredensidad en el centro de la onda y un cascarón de bariones con un radio fijo. Esta distancia se llama horizonte de sonido y suele usarse como una medida estándar de distancia (de forma análoga a como lo son las Supernovas Ia) [21], [22].

Los experimentos que mostraron la evidencia de BAOs fueron el 2-degree Field (2dF) Galaxy Redshift Survey [23] y el Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [24]. El experimento Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) de galaxias rojas luminosas halló que la ecuación de estado de la energía oscura se comporta como  $\omega = -1$  con un error de  $\pm 0.06$  [25].

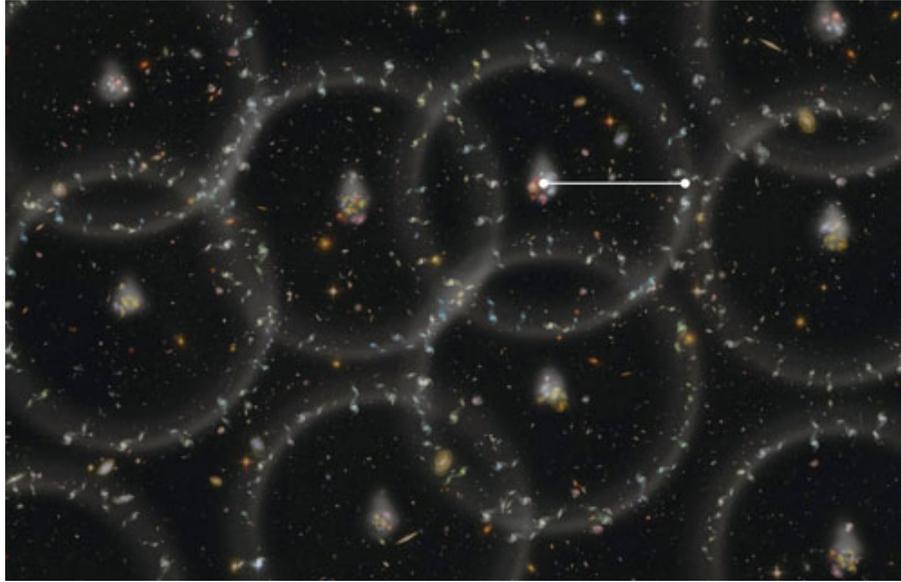


Figura 3.3: Caricatura de cómo deberían verse los BAOs y el horizonte de sonido. Fuente: <http://www.astro.ucla.edu/~wright/BA0-cartoon.jpg>.

### 3.6. ¿Qué dicen las observaciones?

En la siguiente tabla se mostrarán los valores que pueden tomar distintos parámetros usados para describir el Universo [10]:

En la segunda columna de la tabla se muestran las constricciones para los distintos parámetros considerando los datos del Fondo Cósmico de Microondas: Planck da información sobre la temperatura y WMAP la polarización. También se consideran los datos de alta resolución obtenidos por ACT y SPT. La tercer columna incluye los datos de la segunda pero se le agregan los que corresponden a BAOs de SDSS, BOSS, 6dF y de WiggleZ. Mientras que en la última columna se utilizan los resultados de los últimos nueve años de WMAP, se combinan con los datos de BAO ya mencionados y el eCMB (datos del CMB de alta resolución). En todas las columnas se asume el modelo  $\Lambda$ CDM, con un Universo plano y constante cosmológica como energía oscura.

Parámetro	Planck+WP+highL	Planck+WP+highL+BAO	WMAP9+eCMB+BAO
$\Omega_b h^2$	$0.02207 \pm 0.00027$	$0.02214 \pm 0.00024$	$0.02211 \pm 0.00034$
$\Omega_c h^2$	$0.1198 \pm 0.0026$	$0.1187 \pm 0.0017$	$0.1162 \pm 0.0020$
$n_s$	$0.958 \pm 0.007$	$0.961 \pm 0.005$	$0.958 \pm 0.008$
$\tau$	$0.091^{+0.013}_{-0.014}$	$0.092 \pm 0.013$	$0.079^{+0.011}_{-0.012}$
$h$	$0.673 \pm 0.012$	$0.678 \pm 0.008$	$0.688 \pm 0.008$
$\Omega_m$	$0.315^{+0.016}_{-0.017}$	$0.308 \pm 0.010$	$0.293 \pm 0.010$
$\Omega_\Lambda$	$0.685^{+0.017}_{-0.016}$	$0.692 \pm 0.010$	$0.707 \pm 0.010$



# Capítulo 4

## Experimentos.

Desde el siglo pasado se han llevado a cabo, se están realizando ahora o se planean a futuro una gran cantidad de experimentos a lo largo del mundo, y fuera de él también, cuya finalidad es estudiar el Universo que nos rodea. Cada experimento está diseñado con el fin de medir de forma directa o indirecta distintas observables. Por ejemplo, existen experimentos diseñados para medir la radiación cósmica de fondo, otros para estudiar la formación de estructura en el Universo, las supernovas, la materia oscura y las ondas gravitacionales por mencionar algunos.

### 4.1. Planck.

Para la radiación cósmica de fondo se emplean, en general, tres tipos de experimentos. Se usan globos estratosféricos, satélites y aparatos que se tienen dentro del planeta. El más importante ahora es Planck.

Es una misión de tercera generación de la Agencia Espacial Europea (ESA por sus siglas en inglés) cuyo principal objetivo es medir la temperatura, polarización y anisotropías del CMB sobre todo el cielo. Estos resultados permitirían determinar las propiedades del Universo a escalas grandes, la naturaleza de la materia oscura y energía oscura. Así como probar teorías de inflación, determinar si el Universo es homogéneo o no y obtener mapas

de galaxias en el microondas.

Planck puede medir con mayor exactitud el CMB en comparación con los experimentos de globos estratosféricos y aquellos que están dentro del planeta.

Para mantener su altura, la astronave gira una vez por minuto sobre su eje que apunta al Sol. Este giro de estabilización es aprovechado para observar al menos un 95 % del cielo en un lapso de 15 meses.

Planck consta de un módulo de servicio y de un módulo de carga fría. Esta última incluye los instrumentos científicos y el telescopio. El módulo de servicio es octagonal y en él se encuentran los sistemas que manejan la información y los sistemas esenciales que hacen funcionar la nave y permiten la comunicación con la Tierra. En este módulo también están los sistemas electrónicos y de computación de los instrumentos científicos. La nave mide 4.20m de alto por 4.22m de ancho, se lanzó con una masa de 1.95 toneladas. Consta de un telescopio cuyo reflector primario mide 1.9m por 1.5m y tiene una masa aproximada de 28kg. Este espejo está hecho de plástico reforzada con fibra de carbono y recubierto con una capa delgada de aluminio cuya reflectividad es mayor que 99.5 %. La masa del telescopio es de 205 kg con la unidad de plano focal. Para obtener energía utiliza paneles solares de Arseniuro de Galio. Dichos paneles cubren un área plana de  $13m^2$  bajo el módulo de servicio. Este arreglo también protege a la nave de la radiación solar directa y se encuentra aislado para no dar calor al telescopio y a los instrumentos científicos. Cuenta con baterías de iones de litio de 39 Ah (Ampere por hora). Una parte importante del módulo de carga es el baffle cuya función es rodear el telescopio limitando la cantidad de luz que incide sobre los reflectores. Es decir, evita que la luz proveniente de la Tierra, el Sol y la Luna causen interferencias en las mediciones. Forma parte del sistema de enfriamiento del satélite pues ayuda a expulsar el calor al espacio permitiendo que el telescopio y el resto de los instrumentos mantengan una temperatura estable de aproximadamente 50K. También se necesita un sistema de enfriamiento activo para que los instrumentos tengan una temperatura cercana al cero absoluto pues el calor propio de esto podría interferir en las mediciones puesto que la temperatura del CMB es aproximadamente de 2.7K.

El telescopio colecta la luz del CMB y la enfoca en los detectores de radio, los cuales transforman la señal a una lectura de la temperatura. Los detectores son altamente sensibles y pueden detectar cambios en la temperatura hasta un millón de veces más pequeños que un grado. Estos detectores fueron diseñados para detectar microondas en nueve bandas de longitud de onda que van desde el radio hasta el infrarrojo lejano, en longitudes de onda desde un tercio de milímetro hasta un centímetro.

Los instrumentos científicos de Planck son el High Frequency Instrument (HFI) y el Low Frequency Instrument (LFI). El HFI fue diseñado para mediciones de alta sensibilidad de la radiación que permea el cielo en todas las direcciones en seis bandas de longitud de onda de 3.6mm a 0.3 mm o bien en frecuencias de 84GHz a 1THz. Es un arreglo de 52 detectores bolométricos colocados en el plano focal del telescopio y son enfriados a 0.1K. Los bolómetros detectan y miden pequeñas cantidades de radiación y funcionan convirtiendo radiación en calor. Por otro lado, el LFI fue diseñado para medir microonda en un rango de 11.1m a 3.9mm, o bien, de 27GHz a 77GHz. Consiste de un arreglo de 22 receptores de radio localizados en el plano focal del telescopio. Estos receptores de radio reúnen las microondas del espacio y las convierten en (de forma estimada) intensidad de radiación a cada frecuencia [26], [27], [28] .

## **4.2. BKP: BICEP2, Keck Array y Planck.**

En esta colaboración se analizaron en conjunto los datos obtenidos por BICEP2/Keck y Planck. Los tres experimentos fueron diseñados para medir anisotropías en el CMB.

### **4.2.1. BICEP2/Keck.**

Forman parte de un programa de polarímetros de pequeña abertura, para medir la radiación cósmica de fondo (microondas), situados en el polo sur. BICEP2 fue el primero en detectar la polarización en modo B a escalas angulares de grados. Se planea medir la señal de ondas gravitacionales primordiales de fondo predichas por teoría inflacionaria.

Keck es un arreglo que consiste de receptores similares a BICEP2. La tecnología de ambos está basada en BICEP1, que fue el primer polarímetro diseñado para detectar la señal del modo B. Consiste en un telescopio criogénico de pequeña apertura que está diseñado para detectar señales a escalas angulares de grados y consiste de bolómetros sensibles a la polarización que operan a 100, 150 y 220 GHz. BICEP1 operó en el Polo Sur desde 2006 hasta 2008.

BICEP2/Keck mejoraron la sensibilidad incrementando el número de detectores en cada plano focal. Se usó un nuevo detector que combina bolómetros con sensores sensibles a transición de bordes (TES-transition-edge sensor) y antenas. La potencia de las microondas es recibida por las antenas y después es disipada hacia el bolómetro. Este cambio de temperatura es detectado por los TES. La diferencia en potencia detectada entre dos bolómetros provee una medida de la amplitud de la polarización lineal a lo largo de los ejes definidos por las antenas. Los arreglos usan telescopios criogénicos de refracción con una apertura de  $26\text{cm}$ .

Para poder interpretar y construir de forma adecuada los mapas de polarización de las microondas es necesario conocer de forma precisa cómo funciona cada detector y cómo será su respuesta a señales polarizadas y a las que no lo están, para esto se necesario calibrar cada detector.

BICEP2 inició con 512 detectores y después se conformó el arreglo Keck que consta de una combinación de cinco telescopios del tipo BICEP2. Se espera que la continuación de este programa permita expandir el rango de frecuencias observadas para distinguir entre señales debidas a las galaxias y el CMB primordial.

El telescopio BICEP2 inició sus observaciones en 2010 a  $150\text{GHz}$  y finalizó en 2012. El arreglo Keck inició sus observaciones en 2011 con tres telescopios similares a BICEP2 todos a una frecuencia de  $150\text{GHz}$ . Se expandió a cinco telescopios entre 2012 y 2013.

### 4.2.2. BKP.

Esta colaboración consiste en el análisis en conjunto de los datos de  $150GHz$  obtenidos por BICEP2/Keck y Planck. Se hizo un análisis de *likelihood* para usar de manera óptima todos los espectros de una sola frecuencia y de frecuencia cruzada para constreñir un modelo de multicomponentes. Este *likelihood* está incluido en el código CosmoMC. Esta colaboración permitió obtener el estudio más detallado de la polarización en modo B a escalas de grados en el Polo Sur. Se detectaron componentes de polvo galáctico así como CMB lensing. Sin embargo no se encontró alguna componente del tensor de inflación.

Primero se usaron los mapas combinados obtenidos por BICEP2/Keck, luego se usaron por separado los mapas de BICEP2 y Keck para hacer una verificación cruzada. Luego los mapas de polarización en todas las frecuencias de Planck se usaron para hallar una correlación cruzada con BICEP2/Keck. Para evaluar la incertidumbre de los datos de Planck debido a la instrumentación se usaron 500 simulaciones de ruido para cada mapa.

BICEP2/Keck reportaron un exceso de polarización en modo B a  $150GHz$  respecto al esperado por  $\Lambda$ CDM. Cuando se hizo el análisis en conjunto con Planck se encontró una detección importante de modos B solo en el espectro cruzado de  $353GHz$ . Esta es, hasta la fecha, la detección directa más significativa de polarización en modo B incluso comparada con experimentos de mayor precisión angular.

Este análisis detallado permitió determinar que las mediciones hechas por los tres experimentos no representan la detección de modos B primordiales. Por otro lado, también es necesario obtener más datos para detectar ondas gravitacionales primordiales.

### 4.3. BOSS

El Baryon Oscillation Spectroscopic Survey forma parte de la tercera etapa del Sloan Digital Sky Survey (SDSS). BOSS se encargó de hacer un mapa de la distribución espacial de las galaxias luminosas rojas (LRGs) y cuásares al detectar la marca dejada por las oscilaciones acústicas de bariones en el Universo temprano, cuyo objetivo es probar la

existencia de la energía oscura que, se cree, es la causante de la expansión acelerada del Universo.

Se cree que en los primeros 400,000 años después del Big Bang, los bariones y los fotones estaban acoplados y formaban un único fluido con una densidad muy alta. La variación en la densidad del fluido originó ondas de presión (o sonido) esféricas que se propagaron hacia afuera con una velocidad aproximada de la mitad de la de la luz. De repente, el Universo en expansión se enfrió lo suficiente para que los bariones y los fotones se desacoplaran permitiendo que estos últimos se propagaran sin problema a través de un medio vacío mientras que la velocidad del sonido decayó. Variaciones en la temperatura del Universo temprano nos llegan como anisotropías en el CMB. Mientras que las variaciones en la densidad de materia pueden ser observadas en arreglos de galaxias como paredes y vacíos de galaxias de donde se obtiene la distribución de densidad. Estas variaciones se repiten con un patrón aproximado de  $150Mpc$ . Este es un buen método considerando que la escala del patrón es mayor a la escala en que se tienen efectos de colapso gravitacional no lineales.

BOSS es una colección espectroscópica de corrimientos al rojo de 1.5 millones de galaxias rojas luminosas y absorción de Lyman-alpha de más de 160000 cuásares con altos corrimientos al rojo. Consiste de dos espectrógrafos cada uno con dos cámaras, una roja y una azul. Las mejoras respecto a los espectrógrafos del SDSS original son el uso de CCDs de mayor calidad que mejoran la respuesta al rojo y al azul respectivamente. Nuevas fibras, 1000 por cada placa en lugar de 640 de la versión anterior. Con agujeros más pequeños,  $2''$  en lugar de  $4''$ . Los agujeros son hechos en una placa de aluminio, cada agujero corresponde a algún objeto astronómico (cuásar, galaxia, entre otros). A cada agujero se le conecta una fibra óptica que manda la luz proveniente del objeto astronómico por un divisor que separa la parte roja de la azul que van a los correspondientes CCDs.

## 4.4. DESI.

El Dark Energy Spectroscopic Instrument es un experimento en tierra que permitirá estudiar oscilaciones acústicas de bariones (BAO) y el crecimiento de estructura a través de distorsiones espaciales en el corrimiento al rojo con un área del tamaño de una galaxia, así como el estudio de corrimientos al rojo de cuásares. Pertenece al programa Cosmic Frontier y es sucesor de BOSS. Sus resultados complementarán los obtenidos por DES (Dark Energy Survey). DESI obtendrá nuevas mediciones que permitirán constreñir teorías de gravedad modificada e inflación, así como una nueva medida de la suma de las masas de neutrinos.

Las oscilaciones acústicas se originaron por una pequeña sobredensidad al inicio del Universo que dejó una marca en la distribución de materia cuando el plasma se enfrió y se convirtió en átomos neutros. La medición de BAO's permite hallar estas marcas como una función del corrimiento al rojo. Debido al éxito que tuvo BOSS usando la técnica de medición de BAO's, en la que DESI está basado, esta se ha convertido en una de las principales técnicas para obtener información de la energía oscura (las otras son supernovas, arreglos de galaxias y lensing débil). Con esta técnica es posible usar la reconstrucción para reducir la influencia de efectos no lineales. Puesto que BOSS también detectó señales de BAO's en Lyman-alpha en el espectro de cuásares, es posible medir BAO's a corrimientos al rojo mayores. Esto permite tener conocimiento de la historia del Universo a corrimientos al rojo mayores que 2. También se usarán otras técnicas como las ya mencionadas distorsiones espaciales en el corrimiento al rojo que permitirán probar el crecimiento de estructura así como estudiar la geometría del espacio-tiempo. Una nueva técnica a usar es el efecto Alcock-Paczynski el cual dará una medición complementaria de la geometría del Universo.

DESI es un instrumento espectroscópico de multifibras que será instalado sobre el telescopio de cuatro metros Mayall para hacer una medición masiva de corrimientos al rojo de galaxias. También se instalará un corrector óptico para tener un campo de visión de tres grados de diámetro. Los mapas en 3D resultantes darán una idea de la historia de la expansión del Universo. Es un experimento accionado robóticamente con un espectrógrafo

alimentado por fibras capaz de tomar más de 5000 espectros simultáneos en un rango de longitud de onda  $360nm$  hasta  $980nm$ .

Los objetos que se observarán para obtener la distribución de materia oscura se clasifican en cuatro grupos. El primer grupo son las galaxias rojas luminosas (LGRs) con un corrimiento al rojo mayor que  $z = 1$ . Se medirán líneas brillantes de emisión de galaxias con  $z = 1.7$ . Se observarán también cuásares como trazadores directos de una cota inferior para la distribución de materia oscura. Y para corrimientos al rojo entre  $2.1 < z < 3.5$ , se usarán sus líneas de absorción Ly- $\alpha$  en su espectro para trazar la distribución de hidrógeno neutro. También se planean medir cerca de diez millones de galaxias con un corrimiento al rojo aproximado de  $z \approx 0.2$  para obtener un estudio de galaxias brillantes (Bright Galaxy Survey BGS). Se espera medir en total el BAO de 30 millones de galaxias y cuásares para determinar el espectro de potencias de materia incluyendo las distorsiones espaciales en el corrimiento al rojo.

Las componentes del instrumento son el corrector óptico principal para tener un campo de visión más ancho, un plano focal con posicionadores de fibra robóticos, un sistema de control de la fibra óptica, espectrógrafos y sistemas de control y adquisición de datos en tiempo real. Así como un sistema de procesamiento de los datos obtenidos por los detectores. El telescopio también cuenta con un sistema para el movimiento polar y azimutal.

En el plano focal se tiene un sistema rastreador de estrellas para guiar al telescopio y sensores para corregir el enfoque del telescopio. La información obtenida de estos sensores es recibida por un hexápodo que ajustará el corrector óptico y la posición del plano focal. El sistema de fibras ópticas transporta la luz del plano focal hasta la espectrógrafos. Luego los datos pasan al sistema de análisis mientras el telescopio vuelve a acomodarse para realizar una nueva medición.

# Capítulo 5

## Materia oscura.

Como se mencionó en el capítulo 2, la materia oscura compone aproximadamente el 23% del Universo. Sin embargo se desconoce mucho de ella, solo se sabe que interactúa gravitacionalmente con la materia ordinaria. En este capítulo se presentan las observaciones que llevaron a la idea de que debe existir la materia oscura. También se presentan los distintos modelos que existen para explicarla. Se hace énfasis en el modelo  $\Lambda$ CDM y en el modelo de Materia Oscura Escalar (SFDM-Scalar Field Dark Matter).

### 5.1. Observaciones.

En el capítulo 3 se mencionó que uno de los parámetros usados para describir el Universo es el que está asociado con la densidad (distinto para cada componente). Sin embargo para poder obtener el valor de este parámetro se realizan muchas observaciones astronómicas. Por ejemplo, se observan grandes regiones del cielo para contar el número de estrellas. Se aprovechan los rayos X que son emitidos por nubes de gas muy calientes. Se estudian las curvas de rotación de las galaxias, entre otras más.

Esta última es la que dio origen a la idea de materia oscura. En 1933 Fritz Zwicky observó arreglos de galaxias e intuyó que para explicar la dinámica de los cuerpos que había observado se necesitaba más materia de la que él había observado, es decir, este

exceso de fuerza gravitacional debía ser provocado por materia invisible. Años después, en los 70's, la astrónoma Vera Rubin estudiaba la velocidad de las galaxias cercanas que observaba. Se creía que la velocidad con la que la materia en una galaxia espiral debía moverse era una función del radio al que se encontraba del centro de la galaxia [3]

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (5.1)$$

Donde  $R$  es el radio medido a partir del centro de la galaxia y  $M(R)$  es la masa que depende del radio. Esto significa que la materia más alejada del centro debería tener una velocidad más pequeña. Sin embargo se encontró que permanecía casi constante para distancias grandes medidas desde el centro de la galaxia. Lo cual no coincidía con la materia observada en las distintas galaxias. Esto llevó a considerar de nuevo la idea de que debe existir un tipo de materia que no es visible y que solo debe ejercer fuerza gravitacional para poder explicar las velocidades observadas.

Otra de las pruebas para justificar la existencia de materia oscura es la composición de los arreglos de galaxias. Estos últimos son las estructuras más grandes observadas en el Universo. El contenido visible de estas estructuras se divide en dos partes. La primera son las estrellas que están en cada galaxia y la segunda son los gases calientes que son observados en rayos X. Los arreglos de galaxias tienen aproximadamente de 5 a 10 veces más de gas caliente que de estrellas [3]. De nuevo, para explicar la formación de estas estructuras es necesario tener más materia de la que se observa.

También se observan los movimientos de galaxias relativas a otras. Se estudia la fuerza gravitacional que siente una galaxia ejercida por las que están a su alrededor. El análisis de estas observaciones es un poco complicado sin embargo se ha obtenido que el porcentaje de materia oscura en el Universo es un número considerable y que además esta materia oscura debe ser de un tipo distinto al de la materia ordinaria.

La materia oscura también es necesaria para explicar la formación de estructura en el Universo (galaxias, arreglos de galaxias, radiación cósmica de fondo). Se cree que la estructura en la actualidad se formó en el Universo temprano debido a que se tenían

pequeñas irregularidades que crecieron debido a la interacción gravitacional. Sin embargo se acepta que la materia bariónica no es suficiente para provocar la fuerza gravitacional que ayudó al crecimiento de las irregularidades en el Universo temprano.

## 5.2. $\Lambda$ CDM.

También conocido como el Modelo Estándar Cosmológico,  $\Lambda$  Cold Dark Matter, es el modelo más aceptado en la actualidad para describir el Universo.

Este modelo considera que el Universo se está expandiendo, que es plano y que tiene una edad aproximada de catorce mil millones de años.

Los elementos que, según este modelo, conforman el Universo son [3]:

- **Radiación.** Se refiere al Fondo Cósmico de Microondas.

$$\Omega_{rad}h^2 \simeq 2.47 \times 10^{-5}. \quad (5.2)$$

- **Relativista.** Se considera que, al igual que con los fotones, existe un Fondo Cósmico de Neutrinos.

$$\Omega_{rel}h^2 \simeq 4 \times 10^{-5}. \quad (5.3)$$

- **Bariones.** Se refiere a la materia ordinaria y se considera que ocupa aproximadamente un 4%.
- **Materia oscura.** Se sabe que debe existir debido a las observaciones antes mencionadas. Se estima que la densidad actual de materia oscura es de

$$\Omega_{dm0} \simeq 0.3 \quad (5.4)$$

No se sabe de qué está hecha. Y, como el nombre lo dice, se considera que esta materia oscura debe ser fría.

- **Constante cosmológica.** La expansión del Universo se explica introduciendo la idea de energía oscura, en este modelo en particular se considera que dicho tipo de energía debe comportarse como una constante. Ocupa el porcentaje restante del Universo. La idea de constante cosmológica sale como una corrección a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General.

La materia oscura de este modelo se considera como partículas de larga vida, es decir, que su tiempo de vida debe ser comparable con la edad del Universo. Debe ser fría, se refiere a que las partículas son no relativistas en el momento en que dejan de interactuar con el resto de la materia. Esto permite que puedan agruparse gravitacionalmente.

Cuando se comparan las observaciones que se tienen a grandes escalas (de miles de Mpc a unos cuantos Mpc) con lo que predice el modelo se tiene concordancia. Sin embargo, en el caso de escalas menores, las observaciones y el modelo no dan los mismos resultados. Esto puede deberse a que, en grandes escalas, la fuerza de gravedad es la que rige y por lo tanto solo se considera esta fuerza. Mientras que a escalas menores existen otro tipo de interacciones entre la materia como las hidrodinámicas o la interacción entre la materia y la radiación. Donde, en ambos casos, describir estas interacciones suele ser complejo [1]. Otras discrepancias que se tienen son en la densidad central de halos galácticos, el número de subestructuras observadas es mucho menor comparada con las que se obtienen en simulaciones. En el Vacío Local, región cercana al grupo local (en este grupo se halla nuestra galaxia), se observan menos galaxias de las que predice  $\Lambda$ CDM [2].

### 5.3. SFDM.

Se han propuesto varios modelos como alternativa a  $\Lambda$ CDM para tratar de explicar las discrepancias que este último presenta. Existe uno en particular donde se propone que la materia oscura es un campo escalar. Este modelo se llama Scalar Field Dark Matter y es la parte central de este trabajo. Los primeros artículos sobre este modelo pueden encontrarse en las referencias [29],[30], [31], [32].

En el modelo SFDM la naturaleza de la materia oscura está completamente determinada por un campo escalar, que suele representarse por  $\phi$ . En este modelo se propone que los halos galácticos se forman debido a la condensación Bose-Einstein del campo escalar. El bosón asociado a este campo tiene una masa muy pequeña [2]

$$m \sim 10^{-22} eV. \quad (5.5)$$

Análogamente, la temperatura crítica a la cual ocurre la condensación es muy alta por lo que se propone que los condensados de Bose-Einstein se formaron en edades tempranas del Universo (recuérdese que en sus inicios el Universo estaba muy caliente) [2].

$$T_c \sim \frac{1}{m^{\frac{5}{3}}} \sim TeV. \quad (5.6)$$

Por otro lado, la longitud de onda de Compton está dada por

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m} \sim kpc. \quad (5.7)$$

Este orden de magnitud es comparable con el tamaño de los halos de galaxias típicas en el Universo. Lo anterior significa que los halos de las galaxias se formaron al mismo tiempo y de la misma forma cuando el Universo alcanzó la temperatura crítica tal que pudiera llevarse a cabo la condensación del campo escalar. Por otro lado, las grandes estructuras se forman por jerarquía igual que en el modelo  $\Lambda$ CDM [33]. Las partículas escalares con masa muy ligera de este modelo son tales que eliminan el problema de la densidad central en los halos de galaxias y reduce el número de satélites pequeños por medio del principio de incertidumbre [34], [35]. Con un solo parámetro, la masa del campo escalar, el modelo SFDM ajusta bien las siguientes observaciones <sup>1</sup>:

- La evolución de las densidades cosmológicas [36].

---

<sup>1</sup>Esta lista se extrajo de la referencia [2]. Las referencias al costado son artículos donde se puede leer más al respecto.

- Los picos acústicos del Fondo Cósmico de Microondas [37].
- La cantidad de subestructuras en los arreglos de galaxias es compatible con lo observado. [34],[33], [38].
- Puesto que en SFDM se propone que las galaxias se formaron a edades tempranas se espera observar grandes galaxias a corrimientos al rojo grandes [36], [38].
- Explica las curvas de rotación de galaxias grandes. [39], [40] , [41], [42], [43].
- La masa crítica para el colapso de un campo real escalar es de  $10^{12}M_{\odot}$ . Es decir, las que se observan en halos de galaxias [44].
- Las propiedades observadas de las galaxias enanas [45].

En este modelo de condensados de Bose-Einstein, los halos de materia oscura pueden ser descritos en el régimen no relativista como condensados gravitacionales Newtonianos hechos de bosones muy ligeros condensados en una sola ecuación de onda macroscópica.

Algunos autores incluyen un potencial que depende del campo  $V(\phi)$  en la descripción del modelo. En este modelo se considera el principio cosmológico, es decir, que el Universo es homogéneo e isotrópico cuya evolución está descrita por las ecuaciones de Friedmann.

## 5.4. Energía oscura.

Aunque no se tratará profundamente en este trabajo, se presentará una introducción a la energía oscura. Ocupa casi todo el Universo (aproximadamente el 70%), no se sabe mucho de ella más que es la responsable de la expansión acelerada del Universo. En el modelo  $\Lambda$ CDM se considera que esta se comporta como constante cosmológica. Se llama así porque se agrega un término constante a las ecuaciones de Einstein.<sup>2</sup> Sin embargo existen más modelos para explicar la energía oscura, aquí se mencionarán dos de ellos pues serán usados más adelante.

---

<sup>2</sup>Ver 2.6.3.

### 5.4.1. Parametrización CPL.

En este modelo se propone que la energía oscura tiene dinámica y por lo tanto una ecuación de estado distinta a constante cosmológica

$$\omega = \omega_0 + \omega_a \left( \frac{z}{1+z} \right) = \omega_0 + \omega_a (1 - a). \quad (5.8)$$

Donde  $z$  es el corrimiento al rojo y  $a$  es el factor de escala.  $\omega_0$  y  $\omega_a$  son números reales.

3

### 5.4.2. Energía oscura temprana.

Aquí se estudia una nueva parametrización para la densidad de la energía oscura. Se propone que existe una contribución no despreciable de la energía oscura en los tiempos cercanos al origen del Universo. Se parametriza directamente la densidad  $\Omega(a)$  y no la ecuación de estado. Se considera que  $\Omega(a)$  depende del valor de la densidad y de la ecuación de estado de la energía oscura al día de hoy, y de la que tenía en las primeras épocas del Universo. Si la energía oscura existió en edades tempranas, esta debió haber dejado huellas en la estructura del Universo. Dichas marcas se buscan en el Fondo Cósmico de Microondas. Las ecuaciones para este modelo son [50]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_{rel}^0 a^{-4}}{1 - \Omega_d(a)}. \quad (5.9)$$

Donde  $\Omega_m^0$  es el parámetro de densidad de materia al día de hoy.  $\Omega_{rel}^0$  representa el parámetro de densidad de los neutrinos relativistas y fotones al día de hoy. Y  $\Omega_d(a)$  es la parametrización de la densidad de energía oscura dada por

$$\Omega_d(a) = \frac{\Omega_d^0 - \Omega_d^e (1 - a^{-3\omega_0})}{\Omega_d^0 + \Omega_m^0 a^{-3\omega_0}} + \Omega_d^e (1 - a^{-3\omega_0}). \quad (5.10)$$

---

<sup>3</sup>Para un estudio a detalle de este modelo véanse las referencias [46] y [47].

En la expresión anterior  $\Omega_d^e$  representa el parámetro de densidad de la energía oscura en edades tempranas del Universo. y  $\omega_0$  representa la ecuación de estado para la energía oscura en la actualidad.

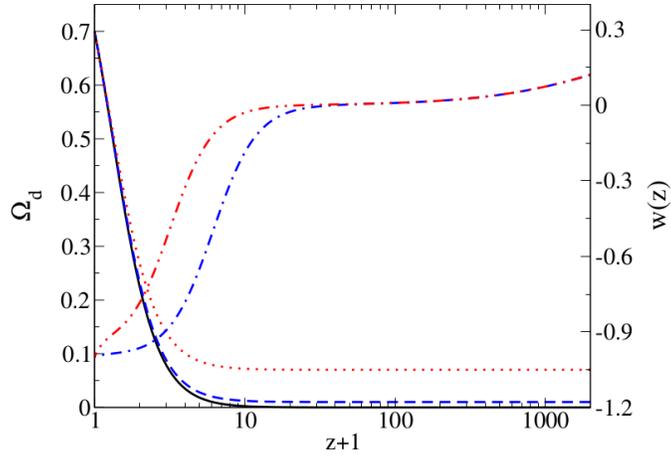


Figura 5.1: Se muestra la evolución de  $\Omega_d(z)$  y  $w(z)$ . La línea negra es  $\Lambda$ CDM. Las líneas discontinua y punteada representan el modelo de energía oscura temprana. Se ha usado  $\omega_0 = -1$ ,  $\Omega_d^e = 0.01$  (discontinua, azul) y  $\Omega_d^e = 0.07$  (punteada, roja), para ambos parámetros [50].

# Capítulo 6

## Resultados.

En la primera sección de este capítulo se muestran las constricciones obtenidas con el programa SimpleMC para las ecuaciones de estado de la materia y energía oscuras usando distintos modelos y datos observacionales. Después se muestra la evolución de los parámetros de densidad de las componentes del Universo para el modelo de materia oscura escalar con constante cosmológica como energía oscura usando dos algoritmos distintos para resolver las ecuaciones diferenciales que lo describen.

### 6.1. SimpleMC.

El objetivo de esta sección es mostrar constricciones halladas a las ecuaciones de estado de la materia oscura y energía oscura para distintos modelos usando datos observacionales y SimpleMC. Este es un programa que permite inferir los valores que pueden tomar los parámetros del modelo que se quiera estudiar usando datos observacionales (en particular se usa para la Cosmología). La forma en que lo hace es por medio de Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC - Monte Carlo Markov Chains en inglés). La idea de este trabajo no es estudiar detalladamente estos métodos sin embargo se mostrará la idea básica de ellos. Considérese un proceso estocástico (proceso que pretende describir la evolución temporal de algún fenómeno aleatorio) donde la distribución de probabilidad de estados futuros solo

depende del estado presente, a esto se le conoce como proceso de Markov. Entonces una cadena de Markov es una serie de procesos de Markov. Por otro lado, se conoce como Monte Carlo a cualquier algoritmo computacional que use números aleatorios. Un tipo de Monte Carlo son las MCMC. A su vez, un tipo de MCMC es el Metropolis-Hastings. Este algoritmo permite construir una cadena donde los valores de algún parámetro con probabilidades posteriores mayores aparezcan con más frecuencia en la cadena que aquellos con menor probabilidad posterior. Sin embargo esto no evita que estos últimos aparezcan. El algoritmo, de forma simplificada, es

- Se comienza con el estado actual  $\theta$ . Donde  $\theta$  es el parámetro del modelo.
- Se genera una propuesta  $\theta'$  para el siguiente paso.
- Se calcula  $h' = (\text{prior})(\text{verosimilitud})$  de  $\theta'$ . Si esta resulta ser mayor que la  $h$  del estado actual se da el paso hacia  $\theta'$  y este se convierte en el estado actual. Prior es la probabilidad del parámetro  $\theta$  dados los datos y la verosimilitud es la probabilidad de observar los datos si el modelo propuesto es cierto.
- Si  $h'$  es menor, se calcula  $\frac{h'}{h}$  y se genera un número aleatorio entre 0 y 1, si es mayor o igual que  $\frac{h'}{h}$  se da el paso y  $\theta'$  es el nuevo estado actual. Si el número es menor que  $\frac{h'}{h}$  se descarta  $\theta'$  y se reinicia el método.

De esta forma se tienen cadenas con los valores que pueden tomar los parámetros del modelo y sus respectivas probabilidades. Entonces, en las figuras que se mostrarán a continuación se hace el ajuste de estos datos mostrando cuál es el valor más probable que pueden tomar los parámetros. La forma en que se corre SimpleMC será presentado en los apéndices.

### **6.1.1. Modelo con ecuación de estado variable para materia oscura más constante cosmológica.**

Se considera el modelo  $\Lambda$ CDM pero se permite que la ecuación de estado de la materia oscura varíe. El código usa los datos observacionales de Supernovas, BAOs y Fondo Cósmico

de Microondas para ajustar los parámetros de la ecuación

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_b a^{-3} + \Omega_{dm} a^{-3(1+w_{DM})} + \Omega_\gamma a^{-4} + Neutrinos + (1 - \Omega_m). \quad (6.1)$$

Donde  $w_{DM}$  es el parámetro que se agrega para que la ecuación de estado de la materia oscura varíe (Véase (2.60)).

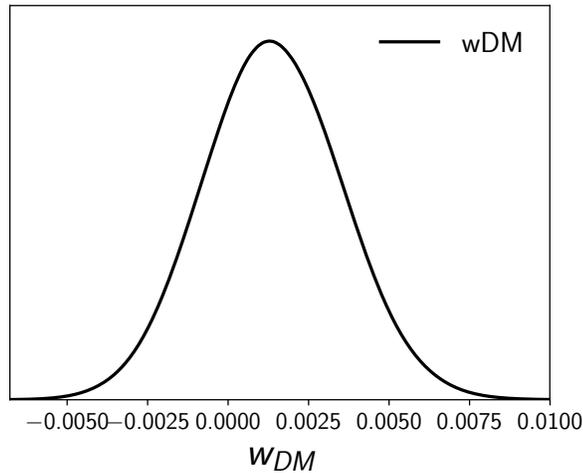


Figura 6.1: Se presenta el ajuste hecho a los datos obtenidos por SimpleMC para el parámetro  $w_{DM}$ .

En la figura (6.1) se presenta el ajuste de los datos para el parámetro  $w_{DM}$  usando SimpleMC. Este último también proporciona el mejor ajuste y se tiene que este valor es  $w_{DM} = 1.61 \times 10^{-3}$ , con  $\sigma_{w_{DM}} = 2.15 \times 10^{-3}$ . Esto significa que la materia oscura se puede comportar como polvo, pues recordemos que la ecuación de estado para este último es  $\omega = 0$  y este valor está dentro del rango de  $1-\sigma$ . Para este modelo se obtuvo  $\chi^2 = 46.59$ . Para realizar el ajuste de estos datos y de las siguientes secciones se usa la librería `getdist` de python la cual está hecha para analizar MCMC.

Parámetro	Mejor ajuste	$\sigma$	Mejor ajuste $\Lambda$ CDM	$\sigma$
$\Omega_m$	$3.0 \times 10^{-1}$	$8.1 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-1}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$\Omega_b h^2$	$2.3 \times 10^{-2}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-4}$
$h$	$6.8 \times 10^{-1}$	$7.8 \times 10^{-3}$	$6.8 \times 10^{-1}$	$6.4 \times 10^{-3}$

Tabla 6.1: En esta tabla se muestra el mejor ajuste para los parámetros de densidad de materia, bariones y la constante de Hubble usando este modelo y se compara con los obtenidos para  $\Lambda$ CDM.

### 6.1.2. Primer modelo con ecuación de estado variable para materia oscura y parametrización CPL para energía oscura.

En este modelo se permite variar la ecuación de estado de la materia oscura de la misma forma que en la sección anterior. También se varía la ecuación de estado de la energía oscura usando la parametrización CPL, donde se propone que esta no es constante cosmológica sino que tiene dinámica. En la presente sección se permite variar solamente el primer parámetro mientras que el segundo se ha dejado fijo en cero. La ecuación que se ajusta es

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_b a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_{dm} a^{-3(1+w_{MO})} + \Omega_{rad} a^{-4} + NuContrib + (1 - \Omega_m - \Omega_k)\epsilon, \quad (6.2)$$

donde

$$\epsilon \equiv a^{-3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a(1-a)}. \quad (6.3)$$

$w_{MO}$  es el parámetro para la materia oscura mientras que  $w_0$  y  $w_a$  son los parámetros para energía oscura.

En las figuras (6.2 a) y (6.2 b) se muestran las curvas de ajuste para las ecuaciones de estado de materia y energía oscuras. El mejor ajuste obtenido es  $w_{MO} = 8.59 \times 10^{-4}$

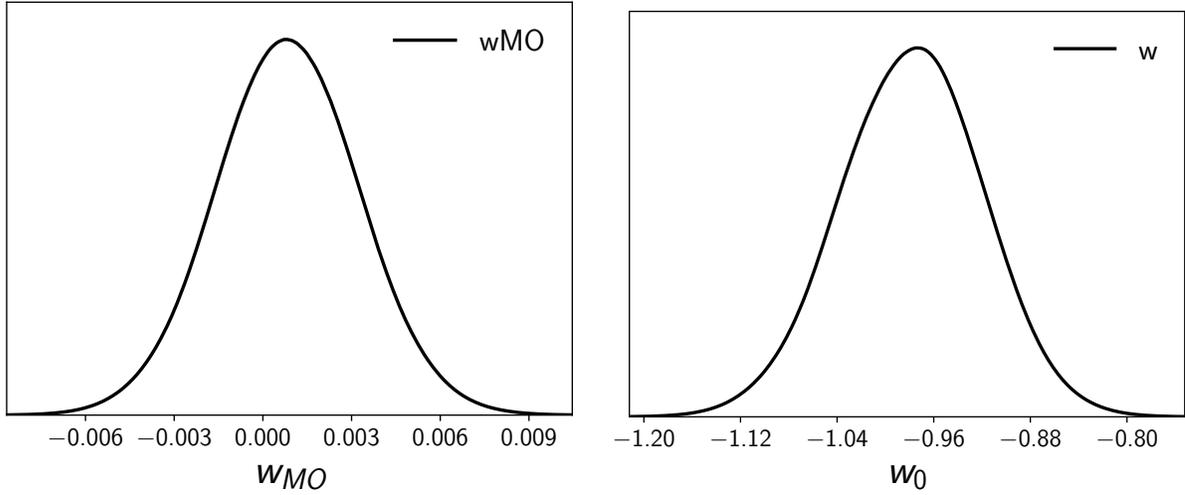


Figura 6.2: a) En la figura de la izquierda se presenta el ajuste para el parámetro  $w_{MO}$  correspondiente a la materia oscura. b) En la figura de la derecha se muestra el ajuste para  $w_0$  correspondiente a la energía oscura.

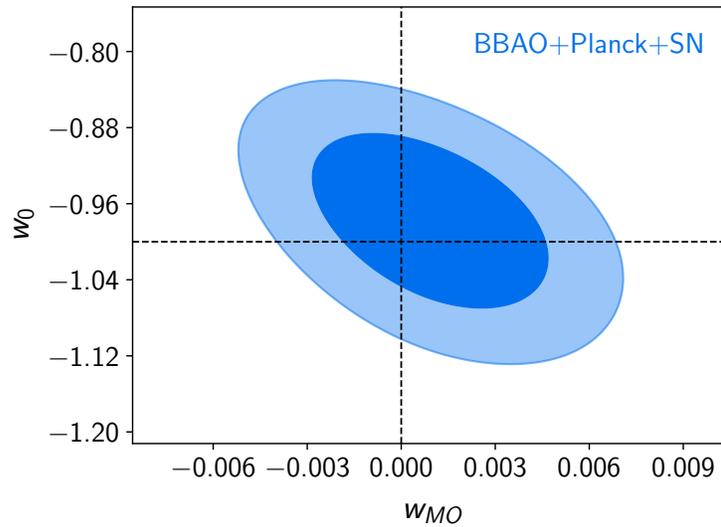


Figura 6.3: En esta gráfica se presenta la relación entre los parámetros  $w_{MO}$  de materia oscura y  $w_0$  de energía oscura.

para la materia oscura con  $\sigma_{w_{MO}} = 2.4 \times 10^{-3}$ , esto significa que se puede comportar como polvo. Para la ecuación de estado de la energía oscura, el mejor ajuste se tiene en  $w_0 = -0.98$  donde  $\sigma_{w_0} = 5.9 \times 10^{-2}$ . Es decir, se puede tener un comportamiento de constante cosmológica (la ecuación de estado para esta última es  $\omega_\Lambda = -1$  y este valor está en el rango de  $1\text{-}\sigma$ ). La figura (6.3) representa las regiones de confianza para ambos parámetros. Los contornos representan regiones de  $1,2\text{-}\sigma$ . Estas regiones contienen otros valores que pueden tomar los parámetros y que también servirían para explicar el modelo. Las líneas punteadas corresponden a polvo (línea vertical) y a constante cosmológica (línea horizontal). Para este modelo se tiene  $\chi^2 = 46.47$ .

Parámetro	Mejor ajuste	$\sigma$	Mejor ajuste $\Lambda\text{CDM}$	$\sigma$
$\Omega_m$	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-1}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$\Omega_b h^2$	$2.6 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-4}$
$h$	$6.8 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-1}$	$6.4 \times 10^{-3}$

Tabla 6.2: En esta tabla se muestra el mejor ajuste para los parámetros de densidad de materia, bariones y la constante de Hubble usando este modelo y se compara con los obtenidos para  $\Lambda\text{CDM}$ .

### 6.1.3. Segundo modelo con ecuación de estado variable para materia oscura y parametrización CPL para energía oscura.

Es el mismo modelo que en la subsección anterior con la diferencia de que sí se permite variar el segundo parámetro para la ecuación de estado de la energía oscura (parametrización CPL).

En las figuras (6.4 a), (6.4 b) y (6.4 c) se presentan los ajustes para las ecuaciones de estado de materia y energía oscura. Para la primera se tiene que el valor de mejor ajuste es  $w_{MO} = 3.29 \times 10^{-3}$ , con  $\sigma_{w_{MO}} = 3 \times 10^{-3}$ . Para energía oscura se tiene  $w_0 = -0.92$ ,

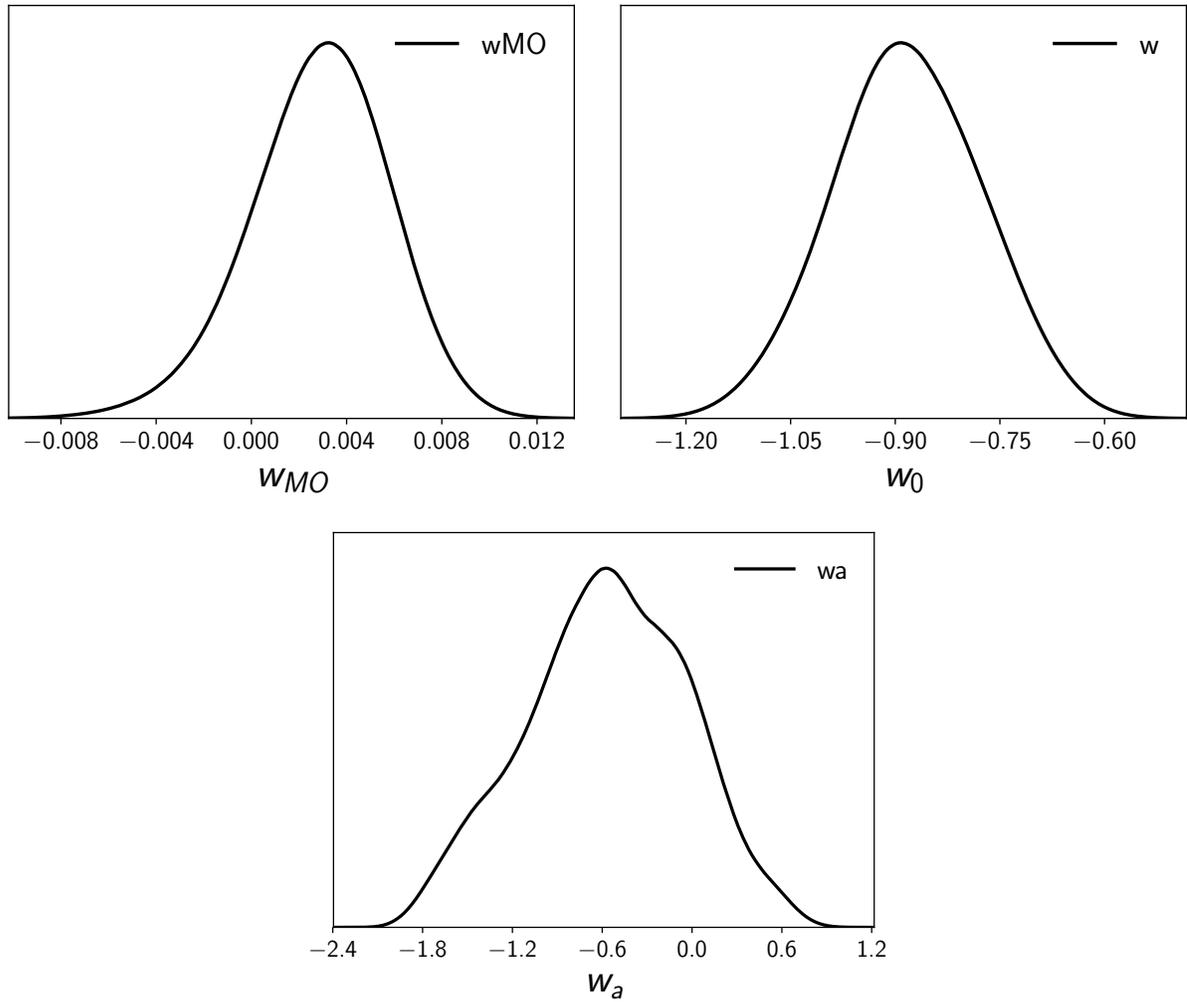


Figura 6.4: a) En el lado superior izquierdo se presenta el ajuste hecho a los datos obtenidos por SimpleMC para el parámetro  $w_{MO}$  correspondiente a la materia oscura. b) En el lado superior derecho se tiene el ajuste para  $w_0$  de energía oscura. c) En el lado inferior se muestra el ajuste para  $w_a$  de energía oscura.

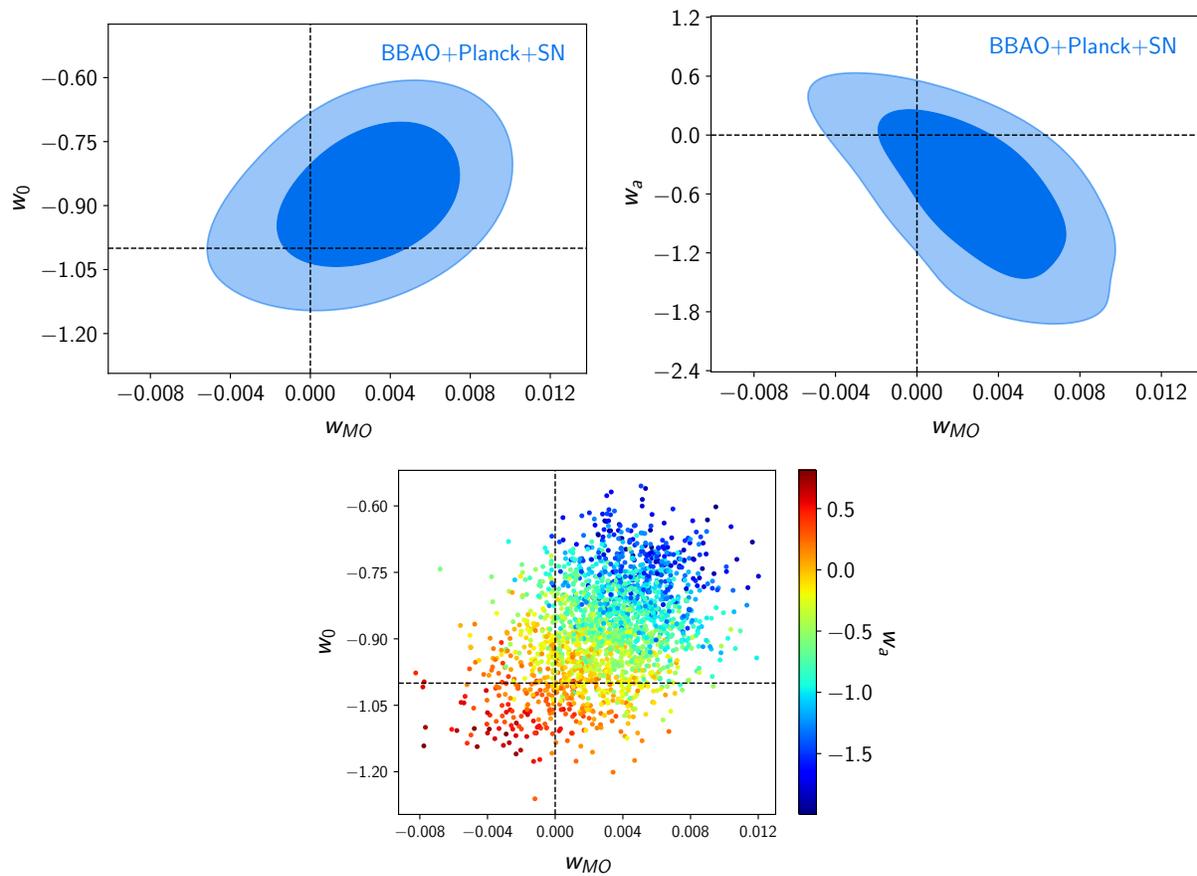


Figura 6.5: a) Arriba a la izquierda se presenta la relación entre  $w_{MO}$  de materia oscura y  $w_0$  de energía oscura. b) Arriba a la derecha se muestra la relación entre los  $w_{MO}$  de materia oscura y  $w_a$  de energía oscura. c) Abajo se presenta la relación entre los tres parámetros.

con  $\sigma_{w_0} = 1.1 \times 10^{-1}$ , y  $w_a = -0.42$ , con  $\sigma_{w_a} = 5.5 \times 10^{-1}$ . Este último valor significa que la energía oscura podría presentar dinámica. Sin embargo, y como puede verse en la figura (6.4 c), el ajuste no es muy bueno debido a que es probable que se necesite obtener más datos para este parámetro o bien, que el tamaño del paso en la cadena no sea el adecuado. En la figura (6.5 a) se muestra la relación entre la ecuación de estado de la materia oscura y el primer parámetro de la ecuación de estado de la energía oscura. Mientras que en la figura (6.5 b) se ve la relación entre la ecuación de estado de la materia oscura con el segundo parámetro de la energía oscura. En ambas figuras, se muestran las regiones de confianza para 1,2- $\sigma$ . La línea punteada vertical representa el caso en que la materia oscura se comporta como polvo. Las líneas punteadas horizontales representan los valores que deben tomar los parámetros de la energía oscura para que esta última se comporte como constante cosmológica. Con  $\chi^2 = 46.10$ .

Parámetro	Mejor ajuste	$\sigma$	Mejor ajuste $\Lambda$ CDM	$\sigma$
$\Omega_m$	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-1}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$\Omega_b h^2$	$2.2 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-4}$
$h$	$6.7 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-1}$	$6.4 \times 10^{-3}$

Tabla 6.3: En esta tabla se muestra el mejor ajuste para los parámetros de densidad de materia, bariones y la constante de Hubble usando este modelo y se compara con los obtenidos para  $\Lambda$ CDM.

#### 6.1.4. Modelo con ecuación de estado variable para materia oscura más modelo de energía oscura temprana.

Se modifica el modelo Early Dark Energy [50] donde se considera que la energía oscura tiene una contribución no despreciable en edades tempranas del Universo. Se permite que la ecuación de estado de la materia y energía oscuras varíe. También se varía el parámetro

de densidad de la energía oscura en edades tempranas. La ecuación que se ajusta es

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_b^0 a^{-3} + \Omega_{dm}^0 a^{-3(1+w_{MO})} + \Omega_{rel}^0 a^{-4}}{1 - \Omega_d(a)}. \quad (6.4)$$

Donde  $\Omega_b^0$  y  $\Omega_{dm}^0$  son los parámetros de densidad de bariones y materia oscura, respectivamente, al día de hoy. Mientras que  $\Omega_m^0$  lo es para materia oscura y bariónica juntas.  $w_{MO}$  es la ecuación de estado para la materia oscura.  $\Omega_{rel}^0$  representa el parámetro de densidad de los neutrinos relativistas y fotones en la actualidad. Y

$$\Omega_d(a) = \frac{\Omega_d^0 - \Omega_d^e (1 - a^{-3\omega_0})}{\Omega_d^0 + \Omega_m^0 a^{-3\omega_0}} + \Omega_d^e (1 - a^{-3\omega_0}). \quad (6.5)$$

En la expresión anterior  $\Omega_d^e$  representa el parámetro de densidad de la energía oscura en edades tempranas del Universo. y  $\omega_0$  es la ecuación de estado para la energía oscura en el presente.

En las figuras (6.6 a) y (6.6 b) se muestran los ajustes para las ecuaciones de estado de la materia y energía oscura respectivamente. El valor de mejor ajuste para la ecuación de estado de la materia oscura es  $w_{MO} = 3.59 \times 10^{-4}$  con  $\sigma_{w_{MO}} = 6.5 \times 10^{-3}$ . Mientras que para la ecuación de estado de la energía oscura se tiene que el valor de mejor ajuste es  $w_0 = -0.98$  y  $\sigma_{w_0} = 7 \times 10^{-2}$ , estos valores sugieren que constante cosmológica es un comportamiento que puede presentarse. En la figura (6.6 c) se muestra el ajuste para el parámetro de densidad de la energía oscura a edades tempranas del Universo. El valor de mejor de juste es  $\Omega_{de} = 2.3 \times 10^{-3}$  donde  $\sigma_{\Omega_{de}} = 3.7 \times 10^{-2}$ . Por otro lado, en la figura (6.7 a) se presenta la relación entre las ecuaciones de estado de materia oscura y energía oscura. En la (6.7 b) se muestra la relación entre la ecuación de estado de la materia oscura y el parámetro de densidad de la energía oscura para edades tempranas. Los contornos definen a las regiones de confianza para 1,2- $\sigma$ . Y en la figura (6.7 c) se muestra la relación entre los tres parámetros. Para este modelo se tiene  $\chi^2 = 46.69$ .

Puesto que se obtuvo que la materia oscura se comporta como polvo para los modelos aquí estudiados, se busca una alternativa a  $\Lambda$ CDM en la cual se tenga el comportamiento

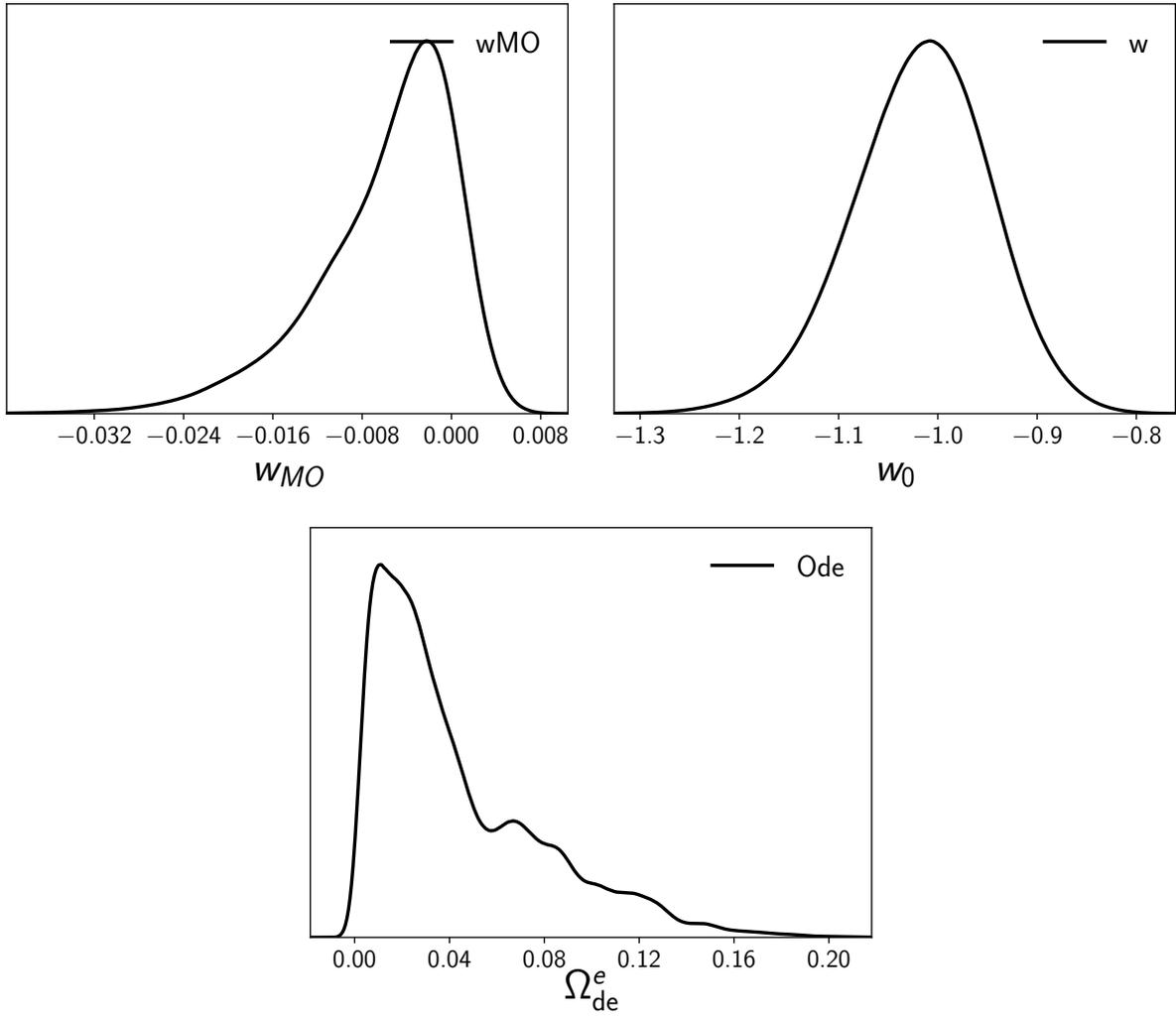


Figura 6.6: a) En el lado superior izquierdo se presenta el ajuste para el parámetro  $w_{MO}$  de la materia oscura. b) Arriba a la derecha se muestra el ajuste para  $w_0$  correspondiente a la energía oscura. c) Abajo se presenta el ajuste de  $O_{de}$  correspondiente a la densidad de energía oscura en edades tempranas del Universo.

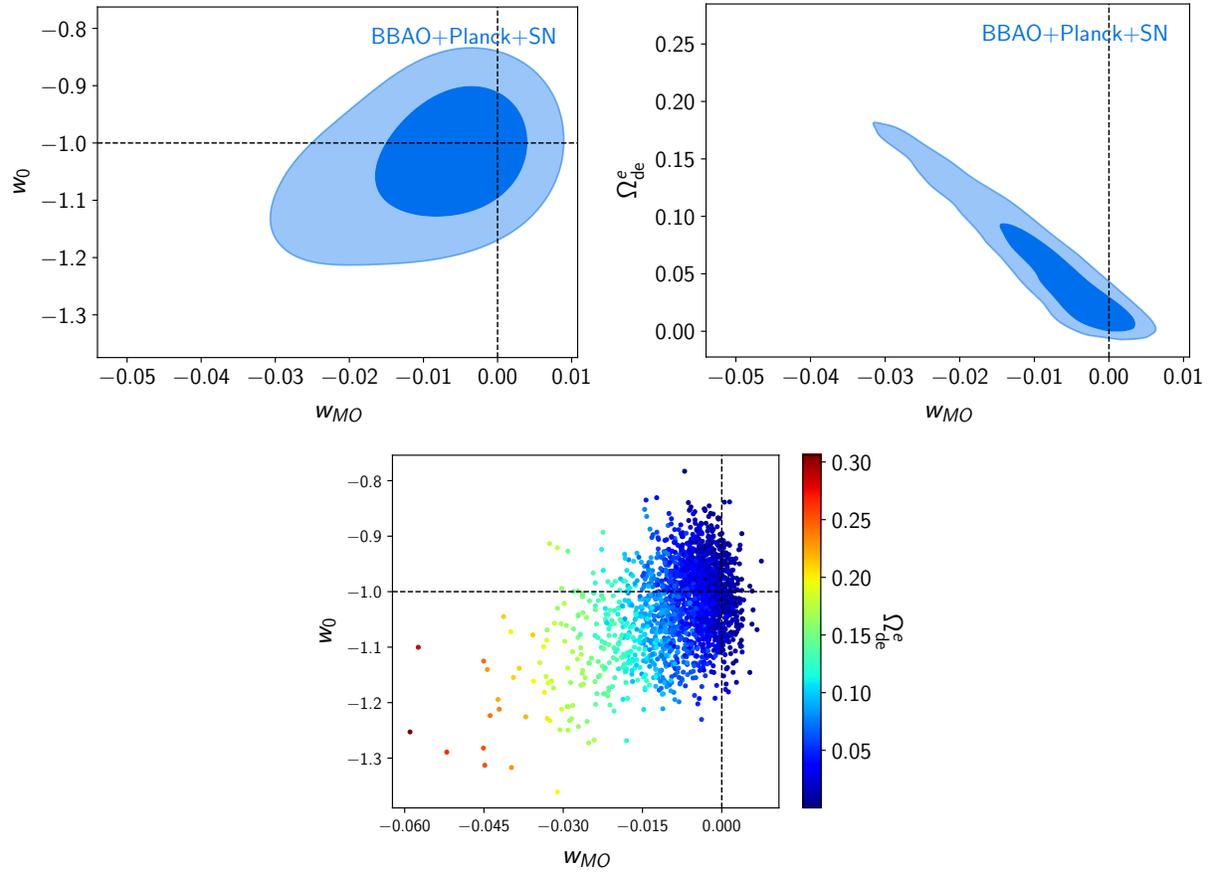


Figura 6.7: a) Arriba a la izquierda se presenta la relación entre  $w_{MO}$  de materia oscura y  $w_0$  de energía oscura. b) En el lado superior derecho se muestra la relación entre  $w_{MO}$  de materia oscura y  $\Omega_{de}^e$  para la energía oscura a edades tempranas del Universo. c) Abajo se presenta la relación entre los parámetros  $w_{MO}$  de materia oscura,  $w_0$  y  $\Omega_{de}^e$  de energía oscura.

ya mencionado, en particular se estudiará el modelo de materia oscura escalar.

Parámetro	Mejor ajuste	$\sigma$	Mejor ajuste $\Lambda$ CDM	$\sigma$
$\Omega_m$	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.0 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-1}$	$8.0 \times 10^{-3}$
$\Omega_b h^2$	$2.2 \times 10^{-2}$	$3.6 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$2.7 \times 10^{-4}$
$h$	$6.8 \times 10^{-1}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$6.8 \times 10^{-1}$	$6.4 \times 10^{-3}$

Tabla 6.4: En esta tabla se muestra el mejor ajuste para los parámetros de densidad de materia, bariones y la constante de Hubble usando este modelo y se compara con los obtenidos para  $\Lambda$ CDM.

## 6.2. Materia oscura escalar (SFDM).

Puesto que se obtuvo que la materia oscura se comporta como polvo para los modelos anteriores, se busca una alternativa a  $\Lambda$ CDM con el mismo comportamiento, en particular se estudiará el modelo de materia oscura escalar. Se estudian dos métodos distintos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que describe al modelo SFDM.

1. En el primer método, el cambio de variables usado permite observar las oscilaciones del campo escalar, como son muy bruscas se usa el método Adams-Bashforth-Moulton de orden 4 (ABM4) para resolver las ecuaciones. Las condiciones iniciales son los valores que tienen en la actualidad los parámetros de densidad de las componentes del Universo. Se resuelve el sistema del presente al pasado.
2. Mientras que en el segundo, se usa un cambio de variable distinto de tal forma que se evitan las oscilaciones del campo escalar. Esto permite que Runge-Kutta 4 sea suficiente para resolver el sistema. Se usan los valores actuales de los parámetros de densidad para hallar las condiciones iniciales en tiempos tempranos y así resolver el sistema desde el pasado hasta nuestros días [49].

Aunque la evolución de los parámetros de densidad considerando campo escalar con el potencial  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  ya ha sido estudiada y existen códigos para resolverlo en distintos lenguajes de programación, se estudia este problema con un código hecho en Python con la idea de incluirlo en SimpleMC para hallar constricciones a la masa del campo escalar. Comparando los algoritmos ya descritos se quiere hallar cuál de los dos es más rápido para que, al incluirlo a SimpleMc, la búsqueda de restricciones al modelo sea la óptima.

### 6.2.1. SFDM usando el método de Adams-Bashforth-Moulton de orden 4.

Se considera que las componentes del Universo son campo escalar como materia oscura, radiación, bariones y constante cosmológica como energía oscura. El campo escalar se comporta como un fluido perfecto cuyo tensor de energía-momento está dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (6.6)$$

Donde  $\rho$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión. Los fluidos perfectos obedecen la ecuación de estado

$$p = \omega\rho. \quad (6.7)$$

Para campo escalar se tiene

$$\rho_{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (6.8)$$

$$p_{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (6.9)$$

Como se se mencionó en la sección 5.3, suele agregarse un potencial que depende del campo escalar  $V(\phi)$ , en este trabajo se considera

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (6.10)$$

y que el campo escalar es real.

Se parte de las ecuaciones de Klein-Gordon, Friedmann y continuidad

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (6.11)$$

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) = 0 \quad (6.12)$$

$$\dot{\rho}_\gamma + 4H\rho_\gamma = 0 \quad (6.13)$$

$$\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \quad (6.14)$$

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (6.15)$$

Donde  $\rho_\gamma$  corresponde a radiación,  $\rho_b$  a bariones y  $\rho_\Lambda$  a constante cosmológica. Para resolver este sistema de ecuaciones se considera que  $\phi = \phi(t)$  y que el Universo es homogéneo e isotrópico. Se define la masa de Planck como

$$m_p^2 = \frac{1}{8\pi G}. \quad (6.16)$$

Y

$$\beta^2 = \frac{1}{6m_p^2}. \quad (6.17)$$

Y se hacen los siguientes cambios de variable

$$x = \beta\phi', \quad (6.18)$$

$$y = \frac{\beta}{H} \sqrt{2V(\phi)}, \quad (6.19)$$

$$z = \sqrt{2\rho_\gamma} \frac{\beta}{H}, \quad (6.20)$$

$$b = \sqrt{2\rho_b} \frac{\beta}{H}. \quad (6.21)$$

Donde  $x$  corresponde a la parte cinética del campo escalar y  $y$  a la parte potencial,  $z$  a radiación y  $b$  a bariones. Con  $\dot{q} = Hq'$ , donde  $q' = \frac{dq}{dlna}$ . La restricción para las variables anteriores es

$$x^2 + y^2 + z^2 + l^2 + b^2 = 1. \quad (6.22)$$

De lo anterior, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$x' = -3x + \frac{3}{2}\Pi x - sy \quad (6.23)$$

$$y' = \frac{3}{2}\Pi y + sx \quad (6.24)$$

$$z' = \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z \quad (6.25)$$

$$s' = \frac{3}{2}\Pi s \quad (6.26)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l \quad (6.27)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b \quad (6.28)$$

Donde

$$\Pi = 2x^2 + \frac{4}{3}z^2 + b^2. \quad (6.29)$$

Se ha introducido la variable  $s \equiv \frac{m}{H}$  como control de la dinámica de  $H$ .<sup>1</sup> La relación entre todas estas nuevas variables y los parámetros de densidad es

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 \quad (6.30)$$

$$\Omega_\gamma = z^2 \quad (6.31)$$

$$\Omega_\Lambda = l^2 \quad (6.32)$$

$$\Omega_b = b^2 \quad (6.33)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (6.23) se hizo un programa en python usando el método Adams-Bashforth-Moulton de orden 4 (ABM4), que es un algoritmo predictor/corrector, debido a que es más eficiente para resolver sistemas que no son bien comportados como en este caso. Para resolver el sistema de ecuaciones se usaron como condiciones

---

<sup>1</sup>La justificación de este parámetro está dada en [48].

iniciales los datos de WMAP año 5 y 7 (el subíndice cero significa que estos valores son al día de hoy) [2]

$$\Omega_{\phi 0}^{cin} = 0.2295 \quad (6.34)$$

$$\Omega_{\phi 0}^{pot} = 0.00043 \quad (6.35)$$

$$\Omega_{\gamma 0} = 0.000043 \quad (6.36)$$

$$\Omega_{\Lambda 0} = 0.73 \quad (6.37)$$

$$\Omega_{b 0} = 0.04 \quad (6.38)$$

Para la variable  $s$  se consideró el valor de 1000.

En la figura (6.8 a) se presentan las partes cinética y potencial del campo escalar, donde se ha reducido la resolución de estas para poder observar las oscilaciones que presentan y cómo quedan cubiertas por una envolvente resultante de sumar ambas contribuciones. Luego, en la figura (6.8 b), se muestra la evolución de los parámetros de densidad para radiación, campo escalar, constante cosmológica y bariones. El tiempo que tarda este algoritmo en resolver el sistema de ecuaciones diferenciales es  $7.7s$ . En la figura (6.9) se compara el resultado de *SFDM* con  $\Lambda$ *CDM*, puede observarse el mismo comportamiento en ambas gráficas. Esto sugiere que materia oscura escalar es buen sustituto para materia oscura fría pues es capaz de mimetizarlo.

El siguiente paso fue modificar el código de modo que se resuelve el mismo sistema de ecuaciones sin embargo no se considera un único valor inicial para la masa del campo escalar. El código recibe un arreglo con distintos valores iniciales para la masa de tal forma que resuelve el sistema de ecuaciones tantas veces como valores reciba. Esto se hace con el objetivo de estudiar cómo cambia la evolución de los parámetros al variar el valor de la masa.

En la figura (6.10 a) se presenta la evolución de los parámetros de densidad cuando el valor de la variable  $s$  es de 10, 100 y 1000. Para  $s = 10$  se presentan oscilaciones en todas las componentes aunque esto no se ha observado. Para el caso  $s = 100$  se observa

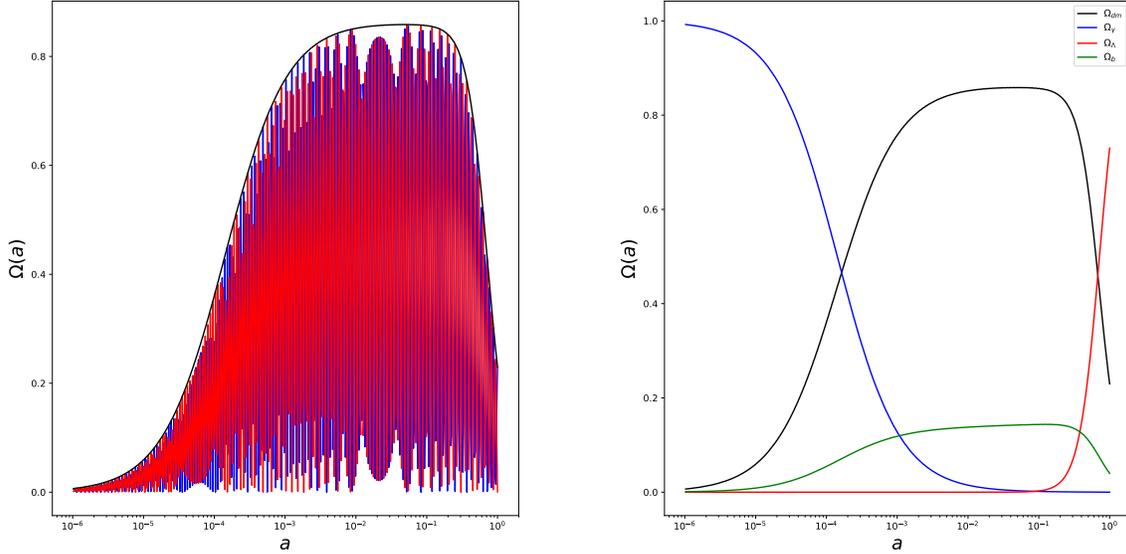


Figura 6.8: a) En la izquierda se presentan la suma de la parte cinética y potencial del campo escalar, y cada componente por separado. La suma de ambas contribuciones se comporta como una envolvente para cada una de ellas. b) En la derecha se tienen los parámetros de densidad para materia oscura, energía oscura, bariones y radiación. En el eje horizontal se tiene el factor de escala y el eje vertical es el parámetro de densidad del campo escalar.

que la amplitud para el campo escalar disminuye mientras que el correspondiente para bariones aumenta, en comparación con el caso  $s = 1000$  donde la amplitud para campo escalar es más grande y la de los bariones es más pequeña. También se consideró el valor  $s = 100000000$  pero el sistema de ecuaciones diferenciales con este valor de la masa no puede ser resuelto. Con esta modificación al código, tarda 14s en resolver el sistema cuatro veces. Por otro lado, en la figura (6.11) se presenta la ecuación de estado del campo escalar para los casos arriba mencionados. Debe tomarse en cuenta que en la naturaleza no se observan estas oscilaciones sino su promedio temporal, que en este caso es cero por lo cual se considera que el campo escalar se comporta como polvo.

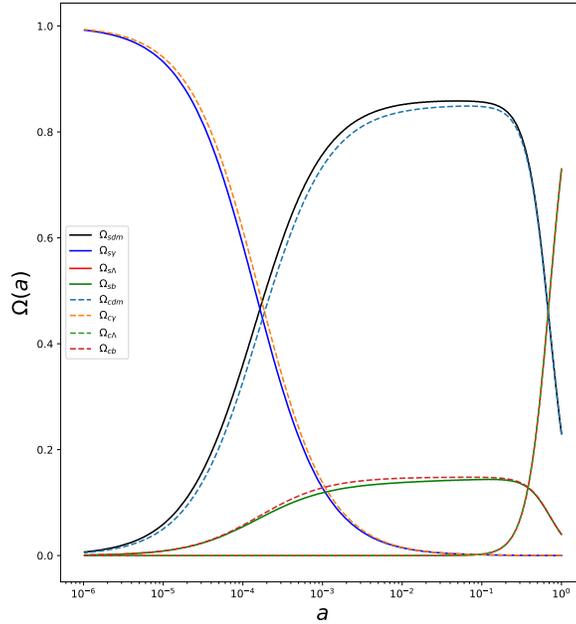


Figura 6.9: Se compara la evolución de los parámetros de densidad para SFDM (líneas sólidas) y para  $\Lambda$ CDM (líneas discontinuas). Se observa que materia oscura escalar mimetiza el comportamiento de materia oscura fría.

### 6.3. Campos escalares, otro método.

Los resultados que se presentarán a continuación se obtuvieron usando un código en Python que está basado en la referencia [49]. De nuevo, la idea de escribirlo en Python es poder introducirlo a SimpleMC para poder hallar restricciones usando datos observacionales. La diferencia con el método presentado en la sección anterior es que las condiciones iniciales que se usan son en la actualidad y se resuelven las ecuaciones diferenciales de el presente hacia atrás. Mientras que en este método se utilizan los valores actuales para hallar los del pasado y usarlos como condiciones iniciales para poder resolver el sistema de ecuaciones pero del pasado hasta ahora.

Se utiliza el mismo potencial  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ . Sin embargo el cambio de variables para

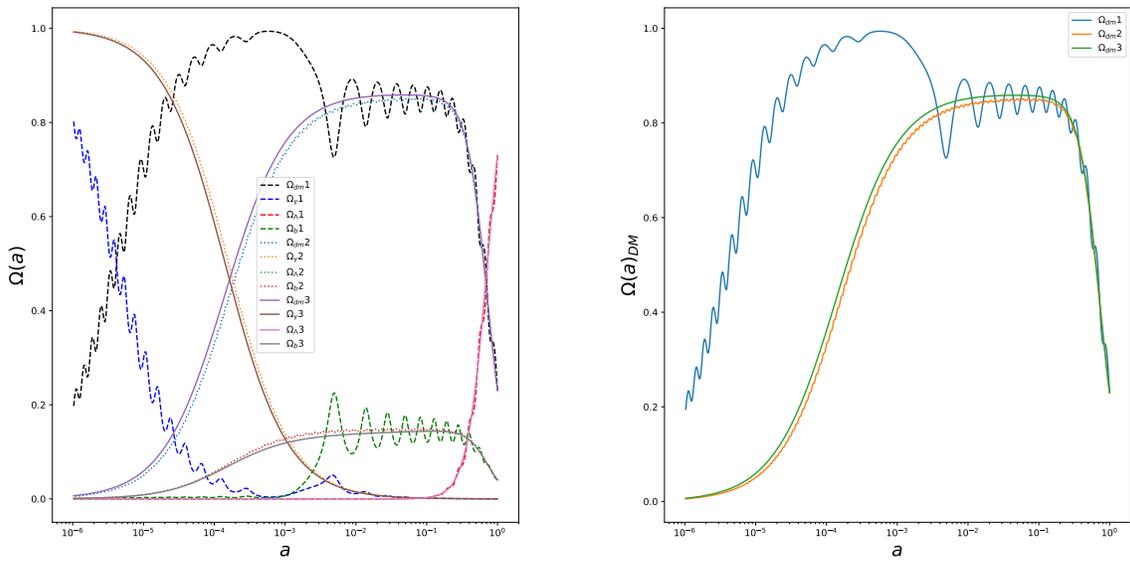


Figura 6.10: a) Izquierda: se presentan los parámetros de densidad para materia oscura, energía oscura, bariones y radiación considerando  $s = 10$  (líneas discontinuas), 100 (líneas punteadas), 1000 (líneas sólidas). b) Derecha: se muestra solo el parámetro de densidad para materia oscura. En el eje horizontal se tiene el factor de escala y en el eje vertical se tiene el término del parámetro de densidad.

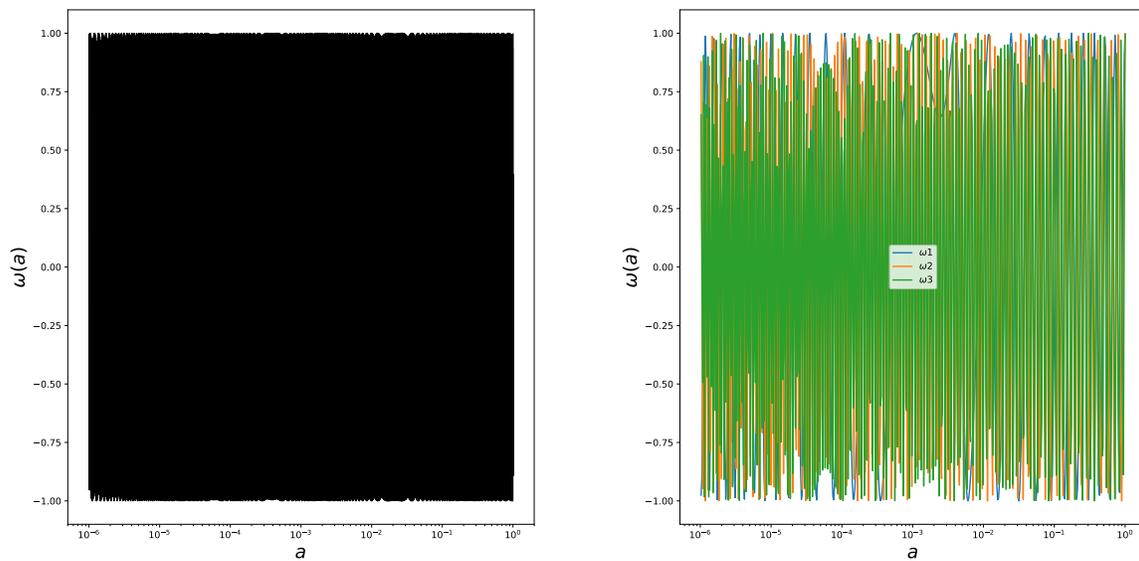


Figura 6.11: Se muestran las ecuaciones de estado del campo escalar para un único valor de la masa (izquierda) y para el caso con tres valores distintos (derecha). Se pueden observar, en ambos casos las oscilaciones del campo escalar. Para la figura de la derecha se ha bajado la resolución mientras que para la otra figura no. En el eje horizontal se tiene el factor de escala y en el eje vertical se tiene la ecuación de estado del campo escalar.

reescribir la parte del campo escalar en las ecuaciones diferenciales es distinto. Se parte de las ecuaciones (6.11) y se usa

$$x \equiv \frac{\kappa\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \quad (6.39)$$

$$y \equiv -\frac{\kappa m\phi}{\sqrt{6}H} \quad (6.40)$$

$$y_1 \equiv 2\frac{m}{H} \quad (6.41)$$

Con este cambio puede escribirse la ecuación de Klein-Gordon como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$x' = -\left(3 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right)x + \frac{1}{2}yy_1 \quad (6.42)$$

$$y' = -\frac{\dot{H}}{H^2}y - \frac{1}{2}xy_1 \quad (6.43)$$

$$y_1' = -\frac{\dot{H}}{H^2}y_1 \quad (6.44)$$

Se ha usado  $\dot{q} = Hq'$ , donde  $q' = \frac{dq}{dlna}$ . En la sección 6.2.1 el cambio de variables usado permitió observar las oscilaciones del campo escalar en sus partes cinética y potencial. En esta sección se pretende resolver el sistema de tal forma que estas oscilaciones no sean observadas y se obtenga solamente la envolvente que resulta al sumar ambas contribuciones. Para dicho fin se hace

$$x = \Omega_\phi^{\frac{1}{2}} \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (6.45)$$

$$y = \Omega_\phi^{\frac{1}{2}} \text{cos} \left( \frac{\theta}{2} \right). \quad (6.46)$$

Donde  $\Omega_\phi^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{\kappa^2 \rho_\phi}{3H^2}$ . De forma análoga se reescribe la constricción de Friedmann y la ecuación de aceleración

$$1 = \sum_j \Omega_j + \Omega_\phi \quad (6.47)$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2}(1 + \omega_{tot}). \quad (6.48)$$

Donde  $j$  representa a las componentes del Universo que se consideran, en este caso radiación, constante cosmológica y bariones. Además

$$\Omega_j \equiv \frac{\kappa^2 \rho_j}{3H^2} \quad (6.49)$$

$$\omega_{tot} \equiv \sum_j \Omega_j \omega_j + \Omega_\phi \omega_\phi. \quad (6.50)$$

En las expresiones anteriores  $\omega_j$  representa la ecuación de estado de la  $j$ -ésima componente. En particular, para el campo escalar se tiene

$$\omega_\phi \equiv \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -\cos(\theta). \quad (6.51)$$

Con lo anterior, el sistema de ecuaciones de Klein-Gordon queda como

$$\theta' = -3\text{sen}(\theta) + y_1 \quad (6.52)$$

$$y_1' = \frac{3}{2}(1 + \omega_{tot}) y_1 \quad (6.53)$$

$$\Omega_\phi' = 3(\omega_{tot} - \omega_\phi) \Omega_\phi. \quad (6.54)$$

Y el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$\theta' = -3\text{sen}(\theta) + y_1 \quad (6.55)$$

$$y_1' = \frac{3}{2}(1 + \omega_{tot})y_1 \quad (6.56)$$

$$\Omega_\phi' = 3(\omega_{tot} - \omega_\phi)\Omega_\phi \quad (6.57)$$

$$\Omega_b' = 3(\omega_{tot} - \omega_b)\Omega_b \quad (6.58)$$

$$\Omega_r' = 3(\omega_{tot} - \omega_r)\Omega_r \quad (6.59)$$

$$\Omega_l' = 3(\omega_{tot} - \omega_l)\Omega_l \quad (6.60)$$

$$(6.61)$$

Las condiciones actuales son los datos de WMAP año 5 y 7 [2]:

$$\Omega_{\gamma actual} = 0.000043 \quad (6.62)$$

$$\Omega_{\Lambda actual} = 0.73 \quad (6.63)$$

$$\Omega_{b actual} = 0.04 \quad (6.64)$$

Las condiciones iniciales (pasado) se obtienen a prueba y error de tal forma que al resolver el sistema se tengan los valores de arriba [49]

$$\Omega_{\gamma inicial} = 0.99 \quad (6.65)$$

$$\Omega_{\Lambda inicial} = 1.86 \times 10^{-31} \quad (6.66)$$

$$\Omega_{b inicial} = 9.8 \times 10^{-6}. \quad (6.67)$$

Las condiciones iniciales para las nuevas variables son calculadas por el código a partir de las expresiones dadas en la referencia [49].

$$\theta_{inicial} = \frac{2ma_{inicial}^2}{5H_0\Omega_{\gamma actual}^{\frac{1}{2}}} \quad (6.68)$$

$$y_{inicial} = \theta_{inicial} \quad (6.69)$$

$$\Omega_{\phi inicial} = a_{inicial} \frac{\Omega_{\phi actual}}{\Omega_{\gamma actual}} \left[ \frac{4\theta_{inicial}^2}{\pi^2} \left( \frac{9 + \frac{\pi^2}{4}}{9 + \theta_{inicial}^2} \right) \right]^{\frac{3}{4}} \quad (6.70)$$

$$(6.71)$$

El resultado que se obtiene es

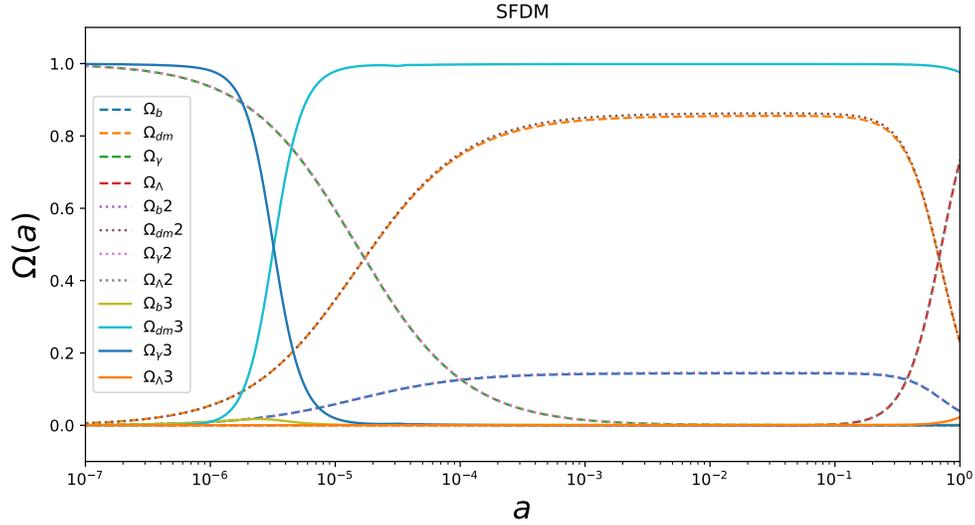


Figura 6.12: Se presentan los parámetros de densidad para materia oscura, energía oscura, bariones y radiación para  $m = 10^{-20}eV$  (líneas discontinuas),  $m = 10^{-19}eV$  (líneas punteadas) y  $m = 10^{-25}eV$  (líneas sólidas). En el eje horizontal se tiene el factor de escala.

De la figura (6.12) se observa que usando este método se obtiene el mismo resultado que en 6.2.1. Sin embargo, debido a los cambios de variable presentados en esta sección, no se observan las oscilaciones en el campo escalar sino que tiene el comportamiento de la envolvente. Este algoritmo tarda 84s en resolver una vez el sistema de ecuaciones. El aumento considerable del tiempo de ejecución se debe al método de shooting. En la figura (6.13) se presenta la ecuación de estado del campo escalar con los tres valores distintos de la masa.

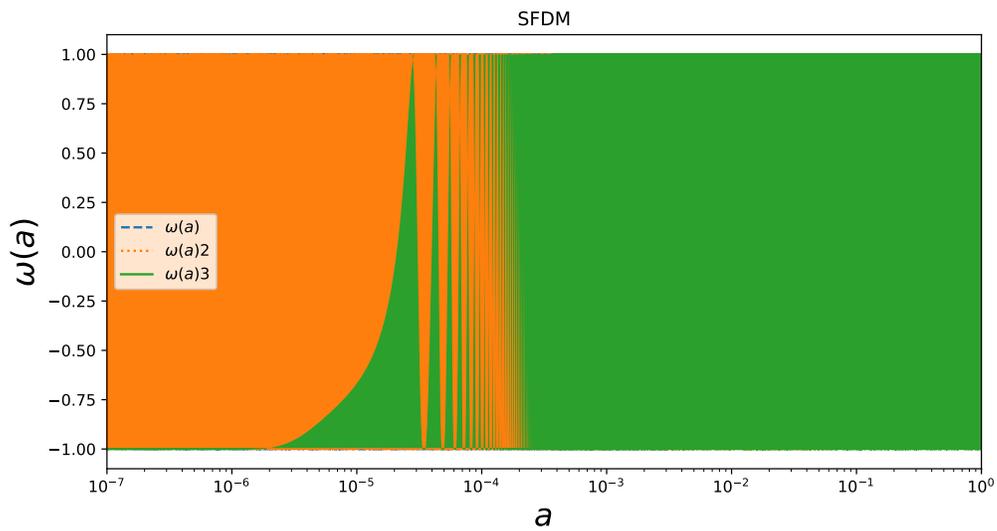


Figura 6.13: Se presentan las ecuaciones de estado del campo escalar para la gráfica anterior. En el eje horizontal se tiene el factor de escala y en el vertical la ecuación de estado.

# Capítulo 7

## Conclusiones.

### 7.1. Restricción de parámetros usando SimpleMC.

El programa SimpleMC permite hallar restricciones de modelos cosmológicos usando datos observacionales. En este trabajo se estudiaron tres modelos diferentes. En el primero se considera materia oscura fría con constante cosmológica como energía oscura donde la ecuación de estado de la materia oscura se deja como un parámetro libre para que pueda ser ajustado con los datos de BAO's, Supernovas y del Fondo Cósmico de Microondas. En el segundo modelo ya no se usa constante cosmológica como energía oscura sino que se considera la parametrización CPL y materia oscura fría. En el primer caso, se deja como parámetro libre la ecuación de estado de la materia oscura y el primer parámetro de la energía oscura, el segundo se deja fijo en cero. Mientras que en el segundo caso se permite variar, además de los anteriores, el segundo parámetro de la energía oscura. Y el tercer modelo corresponde a Early Dark Energy donde también se considera materia oscura fría, se dejan como parámetros a ajustar las ecuaciones de estado de energía y materia oscuras, y el parámetro de densidad de la contribución que la energía oscura tiene en edades tempranas del Universo.

Para el primer modelo (sección 6.1.1) se obtuvo que la materia oscura puede comportarse como polvo pues la ecuación de estado de este último ( $\omega = 0$ ) cae dentro del rango

del mejor ajuste obtenido.

Para el primer caso del segundo modelo (sección 6.1.2), también se obtuvo que la materia oscura puede comportarse como polvo. Respecto a la energía oscura, el ajuste hecho a su ecuación de estado sugiere que puede ser constante cosmológica. Se halló que sí existe una correlación entre ambos parámetros. Para el segundo caso (sección 6.1.3) también se encontró que la materia oscura puede ser polvo. Si se observa la gráfica (6.5 c) se tiene que, para que la materia oscura se comporte como polvo (línea vertical) y la energía oscura como constante cosmológica (línea horizontal),  $w_a$  (segundo parámetro del modelo CPL) debe ser cero (color naranja). Sin embargo se tiene que puede tomar valores distintos de cero. Esto indica que la energía oscura puede presentar dinámica y no ser constante cosmológica. Aún deben usarse más datos y ajustar el tamaño de los pasos en las cadenas de Markov para tener un mejor ajuste de este parámetro. Se observa que existe correlación entre los tres parámetros ajustados.

Para el último modelo (sección 6.1.4) se obtuvo también que la materia oscura se puede comportar como polvo. Mientras que el ajuste de la ecuación de estado para la energía oscura sugiere que, al menos en el presente, esta se comporta como constante cosmológica. También se obtuvo que la contribución de la energía oscura en edades tempranas del Universo es pequeña.

Como en los modelos anteriores se tiene que la materia oscura se comporta como polvo se buscó una alternativa a  $\Lambda$ CDM donde esta tuviera el mismo comportamiento. Por eso se estudió el modelo de materia oscura escalar. Por otro lado, como la energía oscura no es necesariamente constante cosmológica, se deben estudiar otros modelos donde se tenga dinámica. Un ejemplo de ellos es en donde también se considera que la energía oscura es un campo escalar.

## 7.2. Materia oscura escalar.

Se usaron dos métodos distintos para hallar la evolución de los parámetros de densidad. El primero de ellos es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales usando el método predictor/corrector Adams-Bashforth-Moulton de orden 4. Python tiene muchas funciones ya incluidas que resuelven ecuaciones diferenciales (por ejemplo `odeint`) sin embargo estas no fueron capaces de resolver el sistema para materia oscura escalar debido a las oscilaciones que el campo presenta. Se consideraron como componentes del Universo materia oscura escalar, radiación, bariones y constante cosmológica como materia oscura. Las condiciones iniciales fueron los valores que tienen estos parámetros el día de hoy y el sistema de ecuaciones se resolvió del presente hacia atrás. El potencial que se usó fue  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$ . Se obtuvo que tanto la parte cinética como la potencial del campo escalar presentan oscilaciones a lo largo de toda su evolución. Sin embargo estas se anulan cuando se suman ambas contribuciones y solo queda la envolvente cuyo comportamiento es similar al que presenta la materia oscura en el modelo  $\Lambda$ CDM. Esto significa que *SFDM* puede ser un buen sustituto del modelo cosmológico estándar.

Luego, se presenta una modificación del código. El método para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales es el mismo, la diferencia radica en que ahora se recibe un arreglo con diferentes valores para la masa del campo escalar con el fin de estudiar como se comporta el sistema con distintas masas. El código aún es burdo pues los valores que se usaron fueron arbitrarios. Sin embargo, se halló que cambiar los valores afecta considerablemente la evolución de los parámetros de densidad pues se observó que para algunos los parámetros de la radiación y de los bariones mostraban oscilaciones al igual que el campo escalar aunque esto no se observa en la naturaleza. Esto nos lleva a descartar este valor de la masa. Por otro lado, para otros valores solo se encontraron ligeras alteraciones como que las gráficas solo se movían hacia la izquierda. También se halló que para valores de la masa muy grandes no es posible resolver el sistema de ecuaciones.

Por otro lado se estudió un método diferente basado en la referencia [49]. La idea de

este método es usar los valores que tienen los parámetros de densidad en la actualidad para hallar los que tuvieron en el pasado para usarlos como condiciones iniciales y así resolver las ecuaciones para *SFDM* desde el pasado hasta nuestros días. Además, se hace un cambio de variable distinto al usado en el primer algoritmo de tal forma que las oscilaciones del campo escalar puedan ser evitadas, esto permitió que el sistema fuera resuelto usando únicamente Runge-Kutta de orden 4. Es por esto que en la gráfica la materia oscura solo se tiene la envolvente. La evolución de los parámetros de densidad que se obtiene es la misma que en el modelo anterior. La idea de probar ambos métodos es encontrar cuál de los dos es el más rápido en términos computacionales pues el siguiente paso es implementar el modelo *SFDM* en el programa SimpleMC considerando que la masa del campo escalar es un parámetro que puede ser restringido usando datos observacionales. Python permite conocer el tiempo de ejecución de los códigos. Usando un procesador Intel inside CORE i5 y una memoria RAM de 8 GB para ambos algoritmos se obtuvo que el usado en la sección 6.2.1 cuando se considera un solo valor de la masa tarda 7.7s. El algoritmo con la modificación se ejecutó con cuatro valores y tardó 14s en resolver y graficar cuatro veces el sistema. Por otro lado, el segundo algoritmo presentado resuelve el sistema de ecuaciones para un único valor de la masa. El tiempo que tarda es 84s, esto debido al método de shooting con el que se hayan los valores de los parámetros de densidad en el pasado pues debe ejecutarse tantas veces sean necesarias para hallar los valores más óptimos. Esto lo hace muy lento comparado incluso con la modificación que resolvió el sistema cuatro veces. Puesto que con ambos algoritmos se obtienen los mismos resultados, se concluye que el método ABM4 es más rápido.

- La diferencia principal entre los métodos es el cambio de variables. En el primero se pueden observar las oscilaciones (bruscas) del campo escalar mientras que en el segundo, con las nuevas variables, se evitan.
- Lo anterior hace que sea necesario implementar ABM4 para resolver el sistema en el primer método. Mientras que para el segundo es suficiente usar RK4.

- El primer método resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales de forma más rápida que el segundo debido a que este último tiene el algoritmo extra para hallar las condiciones del campo escalar en el pasado.
- Para usar el primer método solo se necesita conocer los valores actuales de los parámetros de densidad que pueden ser obtenidos de los experimentos. Mientras que para el segundo método, además de los anteriores, se deben hallar por prueba y error los valores a tiempos tempranos del Universo tales que al resolver las ecuaciones diferenciales se obtengan los valores en el presente.
- El primer método solo puede resolver el sistema para valores pequeños de  $s$ . Por ejemplo, no puede resolver  $s = 10^8$  pero si  $s = 10^3$ . En caso contrario, el segundo método sí admite valores grandes de  $s$  pero tiene problemas con más pequeños.



# Capítulo 8

## Perspectivas.

El trabajo a futuro es implementar el algoritmo de la sección 6.2.1 en SimpleMC para restringir el valor de la masa del campo escalar usando datos observacionales. Además de probar potenciales distintos. También se pretende agregar un nuevo campo escalar que represente a la energía oscura y estudiar cómo evolucionan los parámetros de densidad cuando estos campos interactúan entre ellos y cuando no lo hacen. Es decir, estudiar modelos de unificación entre materia y energía oscura.

Por otro lado, también se desean estudiar las ecuaciones de estado de la materia y energía oscura para otros modelos, en particular aquellos donde estas tienen interacción. Así como modelos de Early Dark Energy con distintos potenciales. Además se planea repetir los ajustes utilizando los datos recién liberados de la colaboración Planck 2018.



# Apéndice A: SimpleMC.

SimpleMC es un código de Cadenas de Markov Monte Carlo que permite hallar estimaciones de parámetros cosmológicos. Fue escrito por Anze Slosa y José Vázquez. Permite agregar modelos cosmológicos o modificar los que ya trae por defecto al agregar nuevos parámetros. Puede descargarse desde <https://github.com/ja-vazquez/SimpleMC>. Para usarlo debe tenerse Python 2.7 (con Python 3 se tienen problema debido al cambio de sintaxis) y pip, este último permite instalar de forma sencilla las librerías que pudieran hacer falta para correr SimpleMC. También es necesario tener instalado Jupyter Notebook.

Para correrlo se debe entrar, desde la terminal, a la carpeta donde esté la subcarpeta Run. Luego debe ejecutarse

- `python Run/driver.py phy Modelo Datos1 + Datos2 + ...`

Por ejemplo, si se desean ajustar los parámetros del modelo  $\Lambda$ CDM (ya incluido por defecto) con los datos de BAO's y del Fondo Cósmico de Microondas (Planck) se debe escribir:

- `python Run/driver.py phy LCDM BBAO+Planck`

Esto generará las cadenas de Markov cuyo resultado se guardará en la carpeta chains con el nombre (para este ejemplo): `LCDM_phy_BBAO+Planck_1.txt`. La estructura de este archivo, donde se guardan los datos, es

weight (peso del valor)   like (-log likelihood)   parámetro1   parámetro2   ...

A partir de la tercer columna se guardan los valores para los parámetros del modelo que se desea ajustar. SimpleMC ya tiene algunos nombres reservados para parámetros por defecto:

- **Obh2** → Parámetro de densidad de bariones multiplicado por  $h^2$ .
- **Om** → Parámetro de densidad de Materia Oscura más bariones más neutrinos masivos.
- **Ob** → Parámetro de densidad de bariones.
- **h** → Constante de Hubble.
- **Nnu** → Número de especies masivas de neutrinos.
- **mnu** → Cota de la suma de las masas de neutrinos.
- **Ok** → Parámetro de densidad de curvatura.
- **w, wa** → Parámetros de la ecuación de estado de la energía oscura bajo la parametrización CPL.
- **wDM** → Parámetro de la ecuación de estado de la materia oscura escalar.

Sin embargo pueden agregarse tantos parámetros como necesite el modelo. Por ejemplo, para los modelos presentados en este trabajo, se agregó el parámetro

- **wMO** → Parámetro de la ecuación de estado de la materia oscura escalar.

Para esto fue necesario modificar los modelos originales. Para saber cómo modificar un modelo cosmológico o crear uno nuevo, es suficiente con abrir el código (en Python) de alguno de los modelos predeterminados de SimpleMC, están en la carpeta models. Sólo se

debe definir el parámetro nuevo y agregarlo en la parte correspondiente en el código. Por suerte los códigos de los modelos están bien estructurados y en cada sección se especifica qué debe agregarse. Luego debe modificarse la sección que corresponde a las ecuaciones del modelo. Por ejemplo, para el modelo de materia oscura variable y parametrización CPL aquí mostrado se tomó como base el modelo `owa0CDMCosmology.py`, se definió un nuevo parámetro que sería la ecuación de estado para materia oscura y se modificó la función que contiene la ecuaciones de tal forma que se agregó la ecuación de estado variable para materia oscura. El nuevo parámetro también debe ser definido en el archivo `ParamDefs.py` (que también está en la carpeta `models`), para realizar esto basta con seguir la sintaxis de como fueron definidos los parámetros por defecto. Además, el nuevo modelo debe agregarse al archivo `RunBase.py` dentro de la carpeta `Run` donde se le pondrá un nombre corto y este será asociado con el archivo que lo contiene. Por ejemplo, para llamar al modelo  $\Lambda$ CDM se escribe `LCDM` y al ejecutarse, se llama al archivo `LCDMCosmology.py`.

Para analizar los datos, SimpleMC cuenta con un programa especial. Este se encuentra en la carpeta `getdist`, se llama `dr12_constraints.ipynb` y debe abrirse con jupyter notebook. Ahí se encuentran un montón de herramientas para poder hacer los ajustes de los datos obtenidos al ejecutar SimpleMC. Es importante mencionar que este notebook utiliza en particular la librería `getdist` pues esta permite analizar datos cuando son obtenidos por medio de cadenas de Markov Monte Carlo. Lo único que debe hacerse es especificar la dirección en la que están guardadas las cadenas. Este notebook cuenta con muchos ejemplos de lo que se puede hacer con los datos (incluso graficarlos). Sólo es necesario revisarlos, aplicarlos a nuestros datos y disfrutar.



# Apéndice B: Ecuaciones diferenciales para SFDM 1.

A continuación se muestra el proceso para llegar al sistema de ecuaciones diferenciales de la sección 6.2.1. Se parte de las ecuaciones de Klein-Gordon, continuidad y Friedmann

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2\phi}{a^2} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (8.1)$$

$$\dot{\rho} + 3H(1 + \omega)\rho = 0 \quad (8.2)$$

$$H^2 - \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) = 0. \quad (8.3)$$

Luego, se considera que  $\phi = \phi(t)$  y que el Universo es homogéneo e isotrópico. Con lo anterior la ecuación de Klein-Gordon se reduce a

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (8.4)$$

Aplicando el cambio de variable  $\dot{q} = Hq'$ , donde  $q' = \frac{dq}{d\ln a}$ , se puede reescribir (8.4) como

$$\phi'' + \left( 3 + \frac{H'}{H} \right) \phi' + \frac{1}{H^2} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (8.5)$$

Por otro lado, el parámetro de densidad para el campo escalar está dado por

$$\Omega_\phi = \frac{4\pi G}{3H^2} \dot{\phi}^2 + \frac{8\pi G}{3H^2} V(\phi). \quad (8.6)$$

Se define la masa de Planck como

$$m_p^2 = \frac{1}{8\pi G}. \quad (8.7)$$

Y

$$\beta^2 \frac{1}{6m_p^2} \quad (8.8)$$

Con lo anterior podemos reescribir (8.6) como

$$\Omega_\phi = \beta^2 \phi'^2 + 2\beta^2 \frac{V(\phi)}{H^2}. \quad (8.9)$$

Se hace el siguiente cambio de variables

$$x = \beta\phi', \quad (8.10)$$

$$y = \frac{\beta}{H} \sqrt{2V(\phi)}. \quad (8.11)$$

Donde  $x$  corresponde a la parte cinética del campo escalar y  $y$  a la parte potencial. Esto nos da las ecuaciones

$$y' = -\frac{H'}{H}y + \frac{1}{\sqrt{2V}} \frac{1}{H} \frac{dV}{d\phi} x, \quad (8.12)$$

$$x' + \left(3 + \frac{H'}{H}\right)x + \frac{\beta}{H^2} \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (8.13)$$

Considerando el potencial (6.10) se reescriben las ecuaciones anteriores como

$$y' = -\frac{H'}{H}y + \frac{m}{H}x, \quad (8.14)$$

$$x' = -\left(3 + \frac{H'}{H}\right)x - \frac{m}{H}y. \quad (8.15)$$

Por otro lado, se tiene que la densidad de cualquiera de las componentes cumple

$$\dot{\rho} = -3H(1 + \omega)\rho \quad (8.16)$$

Donde  $\omega$  es la ecuación de estado. Si se hace  $\gamma = 1 + \omega$  y se usa  $\dot{q} = Hq'$  se reescribe la expresión anterior como

$$\rho' = -3\gamma\rho. \quad (8.17)$$

La expresión (8.17) es general, es decir, se cumple para todas las componentes. Sólo es necesario especificar el valor de  $\omega$  y por lo tanto de  $\gamma$  para obtener la ecuación diferencial de dicha componente. Por ejemplo, para radiación debe sustituirse  $\omega = \frac{1}{3}$  y  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Para simplificar aún más las ecuaciones se hará el cambio de variable

$$z = \sqrt{2\rho} \frac{\beta}{H}. \quad (8.18)$$

Con esto se reescribe (8.17) como

$$z' = -\frac{3}{2}\gamma z - \frac{H'}{H}z \quad (8.19)$$

Por otro lado se tiene

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (8.20)$$

Usando los cambios de variable anteriores se reescribe esta ecuación como

$$\frac{H'}{H} = -3 \left( \frac{\gamma}{2}z^2 + x^2 \right). \quad (8.21)$$

Para el caso de constante cosmológica se usa la variable  $l$  y para bariones se usa  $b$ . La restricción para las variables anteriores es

$$x^2 + y^2 + z^2 + l^2 + b^2 = 1. \quad (8.22)$$

Como la variable  $\frac{\dot{H}}{H}$  no es completamente autónoma porque  $H$  es un parámetro externo entonces, para poder cerrar el sistema de ecuaciones, se agrega el parámetro  $s$  dado por<sup>1</sup>

$$s \equiv \frac{m}{H} \quad (8.23)$$

La ecuación diferencial para  $s$  es

$$s' = -s \frac{H'}{H}. \quad (8.24)$$

De lo anterior, se obtiene la relación

$$\frac{s'}{s} = -\frac{H'}{H} = \frac{3}{2}\Pi. \quad (8.25)$$

Donde

$$\Pi = 2x^2 + \frac{4}{3}z^2 + b^2. \quad (8.26)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver es

$$x' = -3x + \frac{3}{2}\Pi x - sy \quad (8.27)$$

$$y' = \frac{3}{2}\Pi y + sx \quad (8.28)$$

$$z' = \frac{3}{2} \left( \Pi - \frac{4}{3} \right) z \quad (8.29)$$

$$s' = \frac{3}{2}\Pi s \quad (8.30)$$

$$l' = \frac{3}{2}\Pi l \quad (8.31)$$

$$b' = \frac{3}{2}(\Pi - 1)b \quad (8.32)$$

La relación entre todas estas nuevas variables y los parámetros de densidad es

---

<sup>1</sup>Para revisar la justificación de este parámetro puede verse la referencia [48].

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2 \tag{8.33}$$

$$\Omega_\gamma = z^2 \tag{8.34}$$

$$\Omega_\Lambda = t^2 \tag{8.35}$$

$$\Omega_b = b^2 \tag{8.36}$$



## Apéndice C: Método ABM4.

Es un método que se usa para aproximar funciones por medio de polinomios. Los métodos de Euler, Taylor y Runge-Kutta, por ejemplo, son métodos de un paso pues para calcular el valor en el punto actual solo se necesita conocer el valor en el último punto anterior. El método ABM se denomina multipaso porque requiere conocer varios valores previos al punto actual antes de calcularlo. Si se consideran tres puntos anteriores entonces el grado del polinomio con que se va a aproximar la función es cuadrático. En este trabajo se utilizó el método ABM4 por lo tanto se necesitan conocer los cuatro primeros pasos y esto dará un polinomio de orden cúbico. Los métodos de Adams se dividen en dos grupos: el de Adams-Bashforth (método explícito) de  $n$  pasos y el de Adams-Moulton (método implícito) de  $n$  pasos. La idea del primero es usar un polinomio que pase por  $n$  puntos. Mientras que la idea del segundo es usar un polinomio que pase por  $n+1$  puntos. Suelen combinarse ambos métodos para tener mejores aproximaciones. La combinación de un método explícito y uno implícito del mismo orden se llama método predictor corrector.

La fórmula predictora (Adams-Bashforth) de cuarto orden es

$$y_{i+1}^* = y_i + \frac{h}{24} (55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}). \quad (8.37)$$

Y la fórmula correctora (Adams-Moulton) de cuarto orden es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (9f_{i+1}^* + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \quad (8.38)$$

Donde  $f$  es la función que se desea aproximar,  $f_i = f(t_i, y_i)$ ,  $f_{i+1}^* = f(t_{i+1}, y_{i+1}^*)$ .

Primero se usa el predictor y luego el corrector. Como se usó un método de cuarto orden, se necesitan conocer los cuatro primeros valores de la función. Para dicho fin se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

# Bibliografía

- [1] Vázquez-González A., Matos T., Rev. Mex. Fís. E 54 (2) (2008) 193–202.
- [2] Magaña J., Matos T., Robles V. H., Suárez A., 2012, arXiv: astro-ph/1201.6107v1.
- [3] A. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, John Wiley and Sons Ltd, Second Edition (2003).
- [4] D. Baumann, *Cosmology. Part III Mathematical Tripos.*, University of Cambridge.
- [5] H. V. Peiris, *Cosmology Part I: The Homogeneous Universe.*, University College London.
- [6] B. Boen, *Supermassive Black Hole Sagittarius A\**, NASA, 2013. Web. Última versión Agosto, 7, 2017. [https://www.nasa.gov/mission\\_pages/chandra/multimedia/black-hole-SagittariusA.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/multimedia/black-hole-SagittariusA.html)
- [7] *NASA Telescopes Find Galaxy Cluster with Vibrant Heart.*, Jet Propulsion Laboratory, 2015. <https://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?feature=4715>
- [8] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [9] P. A. M. Dirac, *General Theory of Relativity*, Princeton University Press (1996).
- [10] Lahav O., Liddle A. R., 2014, arXiv: 1401.1389v1.
- [11] Freedman W.L. et al., 2000, arXiv:astro-ph/0012376.

- [12] Riess A. G. et al., 2016, arXiv: 1604.01424.
- [13] Ade P.A.R. et al., 2013, arXiv:1303.5076
- [14] Riess A. G. et al., 1998, arXiv:astro-ph/9805201.
- [15] Garnavich P. et al., 1998, arXiv:astro-ph/9806396.
- [16] Perlmutter S. et al., 1999, arXiv:astro-ph/9805201
- [17] Conley A. et al., 2011, *Astrophys. J. Supp.* 192,1.
- [18] Sullivan M. et al., 2011, *Astrophys. J.* 737, 102.
- [19] Scott D., Smoot G. F., *Cosmic Microwave Background*, University of British Columbia, 2003. <http://pdg.lbl.gov/2004/reviews/microwaverpp.pdf>
- [20] Eidelman S. et al. (Particle Data Group), 2004, *Phys. Lett. B* 592, 1.
- [21] Bassett B. A., Hlozek R., 2009, arXiv: 0910.5224.
- [22] Aubourg É. et al., 2005, arXiv: 1411.1074.
- [23] Cole S. et al., 2005, *MNRAS* 362, 505.
- [24] Eisenstein D. et al., 2011, *Astrophys. J.*, 633, 560.
- [25] Sanchez A. et al., 2013, arXiv: 1303.4396.
- [26] *Planck*, European Space Agency. [https://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/Planck](https://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck)
- [27] *Planck Science Team Home*, European Space Agency. <https://www.cosmos.esa.int/web/planck/home>

- [28] *Looking back to the dawn of time Planck.*, European Space Agency. <http://people.na.infn.it/~barbarin/MaterialeDidattico/0+approfondimenti%20corso%20Fisica%20astroparticellare/1-CMB/Planck-div.pdf>
- [29] Ji S. U., Sin S. J., 1994, *Phys. Rev. D*, 50, 3650.
- [30] Guzmán F. S., Matos T., *Astron. Nachr.*, 320, 97.
- [31] Guzmán F. S., Matos T., 2000, *Class. Quantum Grav.*, 17, L9-L16.
- [32] Lee J., Koh I., 1996, *Phys. Rev. D*, 53, 2236.
- [33] Matos T., Ureña L. A., 2001, *Phys Rev D*, 63, 063506.
- [34] Hu W., Barkana R., Gruzinov A., 2000, *Phys. Rev. Lett.*, 85, 1158.
- [35] Lundgren A. P., Bondarescu M., Bondarescu R., Balakrishna J., 2010, *ApJ*, 715, L35.
- [36] Matos T., Vázquez-González A., Magaña J., 2009, *MNRAS*, 389, 13957.
- [37] Rodríguez-Montoya I., Magaña J., Matos T., Pérez-Lorenzana A., 2010, *APJ*, 721, 1509.
- [38] Suárez A., Matos T., 2011, *MNRAS*, 416, 87.
- [39] Arbey A., Lesgourgues J., Salati P., 2003, *Phys. Rev. D*, 68, 023511.
- [40] Bernal A., Matos T., Núñez D., 2008, *Rev. Mex. A. A.*, 44, 149.
- [41] Harko T., 2011, *MNRAS*, 413, 3095.
- [42] Lesgourgues J., Arbey A., Salati P., 2002, *New Astron. Rev.*, 46, 791.
- [43] Robles V. H., Matos T., 2012, *arXiv: 1201.3032*.
- [44] Alcubierre M., Guzmán F. S., Matos T., Núñez D., Ureña L. A., 2002, Wiederhold P., *Class Quant Grav*, 19, 5017.

- [45] Lee J. W., Lim S., 2010, JCAP, 1001, 007.
- [46] Linden S., Virey J., 2008, arXiv: 0804.0389.
- [47] Scherrer R. J., 2015, arXiv: 1505.05781.
- [48] Matos T., Vázquez-González A., Magaña J., 2009, Mon. Not. R. Astron. Soc., 393, 1359-1369.
- [49] Ureña-López L. A., Gonzalez-Morales A. X., 2017, arXiv: 1511.08195.
- [50] Doran M., Robbers G., 2006, arXiv:astro-ph/0601544.