Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Programación Genética aplicada a la Cosmología Observacional

T E S I S

que para obtener el título de:

Física

presenta:

Jimena Vazquez Uribe

Tutor:

Dr. José Alberto Vázquez González

Ciudad Univesitaria, 2024

CONSTANCIA DE PRESENTACIÓN DE EXAMEN PROFESIONAL

En la Universidad Nacional Autónoma de México, en el AULA SOTERO PRIETO I de la FACULTAD DE CIENCIAS siendo las 11:00 horas del día 05 de junio de 2024, la alumna:

JIMENA VAZQUEZ URIBE

de nacionalidad MEXICANA con número de cuenta 312236942 se presentó con el fin de sustentar el examen oral para obtener el título de:

FÍSICA

en su modalidad de titulación por TESIS con el trabajo titulado: Programación Genética aplicada a la Cosmología Observacional. La alumna cursó sus estudios en el periodo 2015-1 a 2024-1 habiendo obtenido un promedio de 8.20 y cumpliendo con los requisitos académicos señalados en el plan de estudios 1081 aprobado por el H. Consejo Universitario.

El Jurado designado por el Comité Académico integrado por:

PRESIDENTE: DR. JOSE DE JESUS FRANCO LOPEZ
VOCAL: DRA. MARIANA CANO DIAZ
SECRETARIO: DR. JOSE ALBERTO VAZQUEZ GONZALEZ
SUPLENTE: DRA. MARIANA VARGAS MAGAÑA
SUPLENTE: DRA. ARY RODRIGUEZ GONZALEZ

Tras el interrogatorio y deliberación resolvió otorgarle la calificación de:

Aprobada

Procediendo a informarle el resultado, tomarle la Protesta Universitaria y dar por concluido el acto.

PRESIDENTE DEL JURADO | **SECRETARIO DEL JURADO** | **VOCAL DEL JURADO**

El Titular de la entidad académica hace constar que las firmas electrónicas que anteceden son válidas y corresponden a los miembros del jurado.

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR
DIRECTOR DE LA ENTIDAD ACADÉMICA

QR de verificación

Cadena de verificación digital
a38b94cd4e4d9d48ed6901108b0158cfaa894f212ad3894f78d51e5a5f3ef9d20a49cc92750400357e24794b4c5d42ce9ac3247def61016af0937258794f2319

Jurado

Presidente

Dr. José de Jesús Franco López.
Instituto de Astronomía, UNAM.

Tutor

Dr. José Alberto Vázquez González.
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM.

Vocal

Dra. Mariana Vargas Magaña
Intituto de Física, UNAM.

Secretario

Dr. Ary Rodríguez González.
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

Secretario

Dra. Mariana Cano Díaz.
Instituto de Astronomía, UNAM.

Dedicado a quien guio mis pasos y a quien los sigue

Agradecimientos

A mi papi José Antonio por creer siempre y ser incondicional a mí. Por toda su dedicación, tiempo, enseñanzas y principalmente por TODO el amor que me brindo en cada momento que la vida le permitió. A pesar de que ya no se encuentra en el mundo de los vivos, las bases que me dejo como persona son las que ahora me ayudan a enfrentarme a cualquier circunstancia. Gracias por tanto, porque sigues presente y no me desamparas en cada paso que doy. Te amo con todo mi corazón y sé que en algún lugar del universo, nos volveremos a encontrar.

A ReToño de mi corazón, ya que siendo un ser tan chiquito has sido un gran maestro para esto llamado vida. Por el esfuerzo que haces por entender que mami tiene que irse y no estar contigo todo el día en casa, eres muy valiente. A mi mami Gabriela por brindarme su apoyo, amor, esfuerzos y ser una buena abuela. ReToño y yo te lo agradeceremos de por vida. A mi hermana Lawi por hacer a mena mi vida y sacarme siempre una sonrisa cuando ya no estoy soportando, por siempre estar cuando la necesito. Eres la mejor hermana.

A Jovany mi amor, por no dejarme rendir incluso en los peores momentos, creer en mi y enseñarme las definiciones de trabajo en equipo y pareja. Por amarme, apoyarme y cuidarme siempre.

A mi Mushu (Puchi), que me enseño el amor a una mascota y la fidelidad tan grande que existe, por cada noche de desvelo que ha pasado a lado mio esperando me vaya acostar con él. A mis amigos, Jorge, Manuel y Manelick porque las clases y estancia en la facultad fue mejor con ellos.

Agradezco a mi asesor el Dr. José Alberto Vázquez, por ser tan buena persona, por compartir su conocimiento, su paciencia y amistad conmigo. Ha sido un buen ejemplo a seguir. Gracias por haberme ayudado en todo lo necesario para llevar a cabo este proyecto. A mis compañeros del grupo de trabajo porque en ellos encontré nuevos amigos dispuestos a enseñarme y apoyarme cuando lo he necesitado.

A cada uno de mis sinodales, por su tiempo dedicado a leer mi trabajo así como enriquecerlo con sus conocimientos.

Al Instituto de Ciencias Físicas (UNAM) y CONAHCYT, por otorgarme una ayuda y estimulo para continuar con mi formación académica y llevar a cabo este proyecto con clave CB 2017-2018-A1-S-21925.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN117723. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

En general agradezco a la vida.

Resumen

En el presente trabajo, el objetivo es determinar el valor del parámetro de Hubble H y analizar los datos de Supernovas Tipo Ia para encontrar un valor coherente para la energía oscura, compatible con el modelo ΛCDM. Para abordar cada uno de estos problemas, se emplea la programación genética como herramienta computacional.

A lo largo de este estudio, se proporciona una breve introducción a la programación genética, junto con algunos ejemplos que ilustran su eficacia, así como sus ventajas y desventajas. Se ha encontrado que la programación genética constituye una herramienta computacional útil para realizar reconstrucciones de datos observacionales, si bien presenta como desventaja el tiempo de cómputo.

La estructura del presente trabajo es la siguiente: en el capítulo uno, ¨Cosmología¨, se aborda la cosmología, incluyendo una breve reseña histórica, los principios fundamentales y los modelos actuales. En el capítulo dos, ¨Observaciones¨, se ofrece una introducción concisa a los Cronómetros Cósmicos y las Supernovas, así como su papel en la cosmología como evidencia de la expansión del universo. El capítulo tres, ¨Programación Genética¨, abarca los conceptos principales sobre esta técnica, explicando qué es, para qué se utiliza y cómo se aplica, además de describir su aplicación en el presente estudio. En el capítulo cuatro, ¨Funciones de prueba¨, se presentan ejemplos de funciones matemáticas simples, como la línea recta, la parábola y una función trigonométrica, con el fin de evaluar la eficiencia del método utilizado. En el capítulo cinco, Reconstrucciones", se detallan las reconstrucciones realizadas para H con los parámetros cósmicos y los datos de supernovas. Finalmente, en el capítulo seis se presentan las conclusiones.

Índice general

Agradecimientos II

Resumen IV

1 Cosmología 1

1.1 Introducción y Antecedentes Cosmológicos 1

1.2 La expansión del universo 2

1.3 Ecuaciones de Einstein 4

1.4 Principio Cosmológico 5

1.5 Modelo de Friedman 6

1.5.1 Ecuación de Continuidad 9

1.5.2 Componentes del Universo 10

1.6 Energía Oscura 12

1.6.1 La Expansión y la constante Λ 13

1.7 Modelo ΛCDM 14

1.8 Modelo CPL 15

2 Observaciones 17

2.1 Cronómetros Cósmicos 17

2.2 Supernovas 19

3 Programación Genética 22

3.1 Diagrama de árbol 23

3.2 Selección Natural 24

3.3 Población e individuos 26

3.4 Genotipo y Fenotipo 27
3.5 Función Fitness 27
3.6 Operadores Genéticos 28
3.7 Aplicaciones 30
3.7.1 Programación Genética en Python 31

4 Funciones de prueba **34**
4.1 Función Lineal 35
4.2 Función Cuadrática 46
4.3 Función Trigonométrica 54
4.4 Dos variables 62

5 Reconstrucciones **65**
5.1 Cronómetros Cósmicos 65
5.2 Supernovas 71
5.3 Parametrización 74

6 Conclusiones **77**

A Diagrama de Flujo **79**

B Código Python **80**

Índice de figuras

1.1 Diagrama teórico de Hubble. 2
1.2 Curvatura del universo. 6

2.1 Cronómetros Cósmicos. 18
2.2 Datos de Supernovas Tipo Ia. 21

3.1 Diagrama de árbol. 25
3.2 Selección Natural. 26
3.3 Mutación. 29
3.4 Cruce. 30

4.1 Línea recta con ruido. 36
4.2 Recta. Caso cruce. 38
4.3 Recta. Caso cruce. 39
4.4 Mejor solución para la recta con el cruce. 40
4.5 Recta, caso parsimonia. 41
4.6 Mejor solución recta, caso parsimonia. 42
4.7 Recta. Caso mutación. 43
4.8 Recta. Caso mutación. 44
4.9 Mejor solución recta, caso mutación. 44
4.10 Parábola con ruido. 46
4.11 Parábola. Caso cruce. 48
4.12 Parábola. Diagrama caso cruce. 48
4.13 Parábola, mejor solución caso cruce. 49
4.14 Parábola, mejor solución caso cruce. 50

4.15 Parábola, mejor solución caso cruce. 51
4.16 Parábola, caso mutación. 52
4.17 Parábola, caso mutación. 53
4.18 Función trigonométrica con ruido agregado. 54
4.19 Trigonométrica. Caso cruce. 55
4.20 Trigonométrica. Diagrama caso cruce. 56
4.21 Mejor solución caso cruce. 57
4.22 Trigonométrica. Caso parsimonia. 58
4.23 Mejor solución caso parsimonia. 58
4.24 Trigonométrica, caso mutación. 59
4.25 Diagrama de árbol, caso mutación. 60
4.26 Mejor solución, caso mutación. 60
4.27 Superficie de la función 4.9 63
4.28 Diagrama de árbol de la superficie. 64
4.29 Reconstrucción de la superficie 4.9 64

5.1 Datos observacionales de Cronómetros Cósmicos y modelo teórico de ΛCDM. 66
5.2 Solución a los Cronómetros Cósmicos. 70
5.3 Datos de Supernovas Tipo Ia. 71
5.4 Datos de Supernovas Tipo Ia con ajuste $\log(Z)$. 72
5.5 Solución a los datos de Supernovas Tipo Ia. 73
5.6 Datos de la parametrización 74
5.7 Mejor solución a los datos de la figura 5.6. 76
5.8 Diagrama de árbol obtenido para ω_5 76

A.1 Diagrama de Flujo 79

Capítulo 1

Cosmología

1.1. Introducción y Antecedentes Cosmológicos

El origen de la cosmología surge debido a la singularidad y complejidad que representa el universo.

En el año 1915, la cosmología dio un giro trascendental con la publicación de la Teoría de la Relatividad General de Albert Einstein. Esta innovadora teoría, acompañada de sus Ecuaciones de Campo [20], revolucionó la comprensión del espacio, el tiempo y la gravedad, proporcionando las herramientas necesarias para describir la geometría del universo a gran escala. Tiempo después, las observaciones de Edwin Hubble revelaron que el universo se encuentra en expansión al observar que las galaxias se alejaban unas de otras [7; 10].

Actualmente, para apoyar la teoría de la expansión acelerada del universo, las investigaciones se apoyan en el **Modelo Cosmológico Estándar** conocido también por las siguientes siglas: ΛCDM. Uno de los principales objetivos de este modelo es explicar los elementos del universo, y lo divide en dos componentes. La primera es Λ, la cual es conocida como la **constante cosmológica** y representa a la energía oscura (en inglés Dark Energy). La segunda parte CDM, corresponde a la materia oscura (en inglés Dark Matter). La expansión del universo se atribuye a la existencia de la energía oscura, la cual compone al universo aproximadamente un 70 % y de todos sus componentes [9; 12].

1.2. La expansión del universo

En 1912, Vesto Slipher fue pionero al observar líneas espectrales en galaxias, las cuales estaban desplazadas hacia el rojo, indicando que estas galaxias se estaban alejando [16]. Posteriormente, en 1929, el astrónomo inglés Edwin Hubble realizó observaciones que confirmaron la existencia de galaxias más allá de la Vía Láctea, además de notar que estas se alejaban con una cierta velocidad de nuestra galaxia. Considerando la distancia y el corrimiento al rojo de las galaxias, Hubble estableció una relación entre estos dos parámetros. En la figura 1.1 se puede observar el resultado obtenido por Hubble al graficar cz vs r,

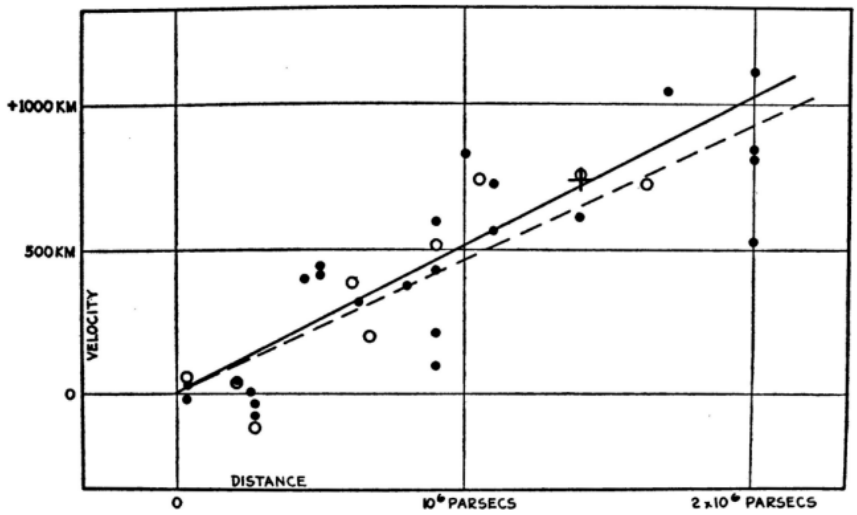


Figura 1.1: Gráfica original de Edwin Hubble de la relación entre el corrimiento al rojo (eje vertical) y la distancia (eje horizontal). Se puede notar que, en el eje vertical se tiene una relación de cz por las unidades, pues se encuentra dado en km [27].

obteniendo una función lineal. Esto llevó a la siguiente relación:

$$z = \frac{H_0}{c} r. \tag{1.1}$$

Donde z es el corrimiento al rojo, H_0 es la constante de Hubble, c es la velocidad de la luz y r la distancia.

El corrimiento al rojo (z) ocurre cuando la fuente de luz se aleja del observador, mientras que un corrimiento al azul indica que la fuente se acerca [9]. Este fenómeno se puede entender mejor mediante el Efecto Doppler, que describe cómo la frecuencia de la onda

cambia según la velocidad relativa entre la fuente y el observador [30]. Para describir el corrimiento al rojo, se utiliza la ecuación 1.2, la cual considera las longitudes de onda del observador (λ_{obs}) y del emisor (λ_{em}) [8].

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \tag{1.2}$$

Además, Hubble observó que existía una aproximación entre la velocidad y el corrimiento al rojo del objeto en relación con la velocidad de la luz [10], lo cual se expresa como:

$$v \approx cz. \tag{1.3}$$

Hubble formuló su ley, estableciendo una relación entre la distancia (r) de una galaxia en un cierto tiempo (t) y la velocidad (v) con la que se aleja dicha galaxia. En otras palabras, la velocidad aparente (v) de alejamiento es proporcional a su distancia (r) [11; 14].

$$v(t) = H_0 r. \tag{1.4}$$

La ecuación 1.4 es la Ley de Hubble, donde la constante de Hubble (H_0) tiene un valor estimado de [12; 15; 18; 22]:

$$H_0 = 70 \pm 7 \frac{km}{sMpc}. \tag{1.5}$$

Gracias a esta relación, Hubble concluyó que el universo se encuentra en expansión, ya que las galaxias, al tener una velocidad de recesión, indican que se están alejando del observador [2; 14]. Al combinar las relaciones 1.3 y 1.4, se obtiene:

$$r = \frac{cz}{H_0}. \tag{1.6}$$

De esta manera, el corrimiento al rojo (z) se puede expresar en términos de distancia [2], lo que permite estimar la distancia a la que se encuentra una galaxia al conocer su corrimiento al rojo.

1.3. Ecuaciones de Einstein

La Relatividad General, desarrollada por Albert Einstein, es una teoría que describe la naturaleza de la gravedad y la estructura del espacio-tiempo. Se basa en la premisa de que las leyes de la física deben permanecer invariantes bajo transformaciones de Lorentz, pero la Ley de Gravitación Universal de Newton no cumple esta condición. La Relatividad General resuelve esta discrepancia al unificar la gravedad con la geometría del espacio-tiempo, mostrando que la gravedad no es una fuerza en el sentido tradicional, sino que es la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de materia y energía [20; 23].

El concepto de espacio-tiempo implica que el tiempo se integra como una coordenada en un sistema de referencia, resultando en un espacio de cuatro dimensiones [22]. Dado que se menciona un espacio deformado, se refiere a una geometría no euclidiana del espacio, donde la presencia de materia influye en la curvatura del espacio-tiempo. En consecuencia, Albert Einsten elaboró sus ecuaciones de campo para la Relatividad General 1.7 junto con el Tensor de Einstein, ecuación 1.9:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{1.7}$$

Las ecuaciones se expresan con unidades geométricas, c =1 y G como la constante de gravitación universal [24], entonces la ecuación 1.7 queda de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{1.9}$$

con $R_{\mu\nu}$ como el Tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio. Los índices μ y ν representan las dimensiones que puede tener el espacio-tiempo. El tensor 1.9 describe la geometría del espacio; por último, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

Dado que existe un espacio curvo, la distancia entre dos puntos se establece como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1.10}$$

Asimismo, Einstein planteó una constante Λ, conocida como la constante cosmológica, y la añadió a su ecuación y, de esta forma, él pretendió suponer que el universo era estático.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.11}$$

Sin embargo, cuando Edwin Hubble demostró que el universo se encontraba en expansión, Einstein consideró que su constante era un error. Más tarde, la constante cosmológica fue reintroducida en el contexto de la cosmología para explicar la aceleración en la expansión del universo.

1.4. Principio Cosmológico

El Principio Cosmológico es una hipótesis muy importante en la cosmología, postula que el universo es homogéneo e isotrópico a "grandes escalas". Una gran escala se refiere a cientos de megaparsecs (Mpc) de distancia [24; 27].

La homogeneidad implica que no existe ningún observador en el universo que ocupe una posición privilegiada, es decir, si estuviéramos en una región diferente del universo, este nos parecería igual. Mientras tanto, la isotropía señala que no hay direcciones privilegiadas en el cosmos, lo que implica que no hay orientaciones preferenciales [2; 6]. Este principio es crucial en cosmología, ya que proporciona las bases teóricas para comprender la estructura y la evolución del universo.

1.5. Modelo de Friedman

Alexander Friedman y Robertson Walker, en 1922, desarrollaron una descripción del universo basada en las ecuaciones de campo de Einstein. Esta descripción se fundamenta en la métrica del espacio-tiempo, conocida como la Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que se expresa mediante la ecuación:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)]. \tag{1.12}$$

La ecuación 1.12 describe cómo se relacionan el tiempo (t) y las coordenadas espaciales r representa la distancia radial, θ el ángulo polar y ϕ el ángulo polar azimutal. El factor $a(t)$ es el factor de escala que determina cómo cambia el tamaño del universo con el tiempo, mientras que el parámetro k representa la curvatura del universo [32]. La variable k, representa la curvatura del universo y puede tomar 3 distintos valores:

$$k \begin{cases} > 0, & \text{Curvatura cerrada.} \\ = 0, & \text{Plano.} \\ < 0, & \text{Curvatura abierta.} \end{cases} \tag{1.13}$$

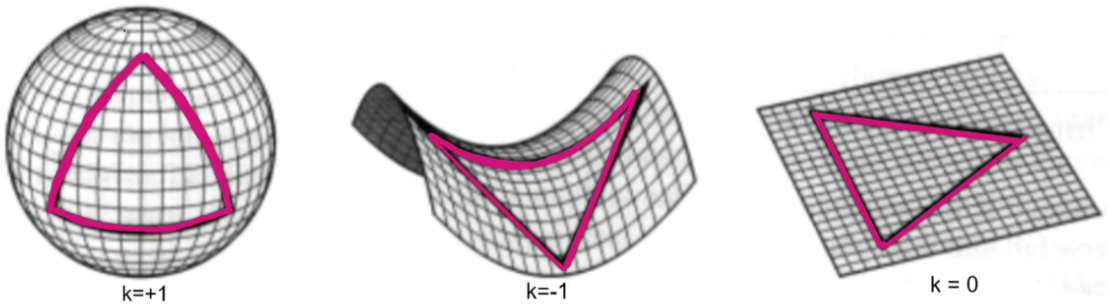


Figura 1.2: Los tres modelos del universo dependiendo del valor de la curvatura k.

La figura 1.2 ilustra los tres modelos del universo según su curvatura. Cuando $k > 0$ (positivo), la geometría asemeja una esfera, cuando $k = 0$ el universo es plano, es decir, sin curvatura y el último caso si $k < 0$ (negativo) la curvatura asemeja una silla de montar o un hiperboloide [2; 29; 32].

Si consideramos que el universo se comporta como un fluido perfecto, esto implica que cumple con ciertas características. En primer lugar, un fluido perfecto es homogéneo, lo que significa que su densidad es la misma en todos los puntos del espacio. Además, no posee viscosidad, lo que implica que no hay resistencia al flujo interno y las partículas del fluido pueden moverse sin fricción entre sí. Por último, un fluido perfecto es estacionario, lo que indica que la velocidad del fluido en cualquier punto permanece constante en el tiempo. Tomando en cuenta estas características, el postulado de Weyl asume que el universo cumple con tal uniformidad y puede ser descrito por el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, el cual está en términos de dos cantidades, la densidad (ρ) y la presión isotrópica (P). Hay que tomar en cuenta que los índices μ y ν van de 0 a 3, las componentes espaciales son iguales y distintas de cero, T^{11} =T^{22}=T^{33} mientras que las variables independientes son $T^{00} = \rho$ y $T^{ii} = P$ [23; 28], así el tensor $T_{\mu\nu}$ nos queda:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

en donde U_μ es la cuadrivelocidad del fluido, entonces si tomamos, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ la traza del tensor la podemos calcular como:

$$T^\mu_\nu = g^{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

así el tensor se simplifica a $T^\mu_\nu = (-\rho, P, P, P)$ lo reescribimos:

$$T = -\rho + 3P. \tag{1.16}$$

Ahora en la ecuación de Einstein 1.8, podemos sustituir la definición del tensor de Einsten $G_{\mu\nu}$ (1.9):

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}T), \tag{1.18}$$

y tomando en cuenta que T es la traza calculada anteriormente y que $T_{00} = -\rho$, así como el valor del tensor de Ricci para la componente $\mu\nu = (00)$, donde $R_{\mu\nu} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$, podemos reescribir:

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G(-\rho - \frac{1}{2}(-\rho + 3P)) \tag{1.19}$$

$$= 8\pi G(\frac{-\rho}{2} - \frac{3P}{2}), \tag{1.20}$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3P), \tag{1.21}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \tag{1.22}$$

El factor $H^2 = (\frac{\dot{a}}{a})^2$ es el parámetro de Hubble, el cual representa la tasa de expansión o de contracción del universo [23]. Por lo tanto, la ecuación resultante 1.22 es una de las soluciones de Friedman, con la cual se describe el movimiento de expansión/contracción del universo.

Ahora, si quisiéramos ocupar la ecuación de Einstein 1.11 con la constante (Λ) propuesta por él, debemos tomar otra vez la definición del tensor $G_{\mu\nu}$ y el tensor de Ricci y el escalar de Ricci igual a:

$$R = 6(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}), \tag{1.23}$$

entonces

$$3(\frac{\ddot{a}}{a})^2 + \frac{3k}{a^2} - \Lambda = 8\pi G\rho \tag{1.24}$$

y así,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{1.25}$$

obteniendo a la ecuación de Friedman de igual modo para un universo en movimiento.

1.5.1. Ecuación de Continuidad

Se ha considerado al universo como un fluido perfecto y para esto debe cumplirse que haya conservación de la energía. Usando el tensor de energía - momento, se tienen que conservar ambas cantidades [28; 29; 33], y para esto:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{1.26}$$

Por relatividad general, podemos escribir la expresión como:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0, \tag{1.27}$$

siendo $\Gamma^\mu_{\mu\lambda}$ y $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ símbolos de Christoffel. Si consideramos que la evolución de la densidad de energía corresponde a $\nu = 0$, reescribimos:

$$\partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0, \tag{1.28}$$

y dado que por isotropía $T^i_0 = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \Gamma^\mu_{\mu 0}\rho - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0, \tag{1.29}$$

lo que nos conduce a la ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \tag{1.30}$$

Hasta ahora hemos tratado al universo como un fluido perfecto para su descripción. Sin embargo, necesitamos una ecuación de estado que relacione la presión P con la densidad ρ. Proponemos la siguiente ecuación:

$$P = \omega\rho, \tag{1.31}$$

en la cual estamos sugiriendo que la presión se encuentra en términos de la densidad, entonces la variable ω queda $\omega(\rho)$ [24; 29].

1.5.2. Componentes del Universo

Para continuar estudiando el universo, es necesario conocer cuáles son sus componentes y la ecuación que se asocia a cada uno de ellos. Para obtener la ecuación de cada componente, vamos a usar la relación barotrópica [29]:

$$P_i = (\gamma_i - 1)\rho_i, \tag{1.32}$$

en donde γ_i tiene un valor para cada componente.

Materia

El universo se encuentra formado por partículas que se encuentran bastante separadas entre sí, por lo tanto, no hay interacción entre ellas, como consecuencia, no ejercen fuerza. Lo que provoca que la presión sea nula, i.e. $P_M = 0$; también se le asigna $\gamma_M = 1$. Usando la ecuación de continuidad 1.30 y sustituyendo el valor de P,

$$\dot{\rho}_M + 3H\rho_M = 0, \tag{1.33}$$

con $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\frac{\dot{\rho_M}}{\rho_M} = -3\frac{\dot{a}}{a}, \tag{1.34}$$

así, la ecuación de estado estará dada por la siguiente proporción:

$$\rho_M \propto a^{-3}. \tag{1.35}$$

Los tipos de materia que contiene el universo son, materia bariónica y materia oscura.

La materia bariónica, como bien lo dice su nombre, está formada por bariones que son los protones y neutrones. Esta materia forma a las estrellas, galaxias, planetas y todo lo que se puede observar del universo; también es conocida como materia ordinaria.

La materia oscura, se cree que este tipo de materia es la que más abunda en el universo y que tiene interacción con la materia bariónica por forma gravitacional; sin embargo, no emite ni absorbe luz. Existen dos tipos de materia oscura, la "*caliente*", que se refiere a que está compuesta por partículas relativistas y la "fría"la cual se compone por partículas no relativistas. La materia oscura es un tema de gran relevancia e incertidumbre en él mundo de la cosmología, ya que hasta el momento no se tiene evidencia de su inexistencia, pero tampoco se ha podido demostrar su existencia, lo que ha generado un gran debate [28; 33].

Radiación

En cosmología, la radiación se considera como partículas relativistas, por lo tanto, él valor de $\gamma = \frac{4}{3}$, y en este caso, la presión $P_r = \frac{1}{3}\rho_r$. Entonces, usando la ecuación de continuidad 1.30

$$\dot{\rho}_r + 3(\frac{\dot{a}}{a})(\rho_r + \frac{1}{3}\rho_r) = 0, \tag{1.36}$$

y obtenemos que:

$$\frac{\dot{\rho}_r}{\rho_r} = -4\frac{\dot{a}}{a}, \tag{1.37}$$

por lo tanto, la ecuación para la radiación está dada por:

$$\rho_r \propto a^{-4}. \tag{1.38}$$

Los elementos de la radiación son:

- Fotones: Los fotones son partículas elementales que transportan a la fuerza electromagnética.

- Neutrinos: Los neutrinos también son partículas elementales. No tienen carga eléctrica y su interacción con la materia es muy débil, pero su energía cinética es muy grande.

Hasta el momento hemos hablado sobre dos elementos del universo; sin embargo, falta uno, la última componente del universo es la energía oscura.

1.6. Energía Oscura

En el capítulo de relatividad general se hizo mención de que Einstein introdujo a la constante cosmológica Λ pensando en que el universo era estático. Años más tarde, Edwin Hubble descubrió que el universo se encontraba en expansión, lo cual provoco que Einstein pensará que su constante era un total error. Sin embargo, después de algunos años, se empezó a considerar que Λ no era en error y que su valor no era cero, sino que tenía un valor positivo y se asociaba a la expansión que mostraba tener el universo [6; 41].
De este modo, la energía oscura empezó a ser la explicación al fenómeno de la expansión del universo y se cree que es la mayor componente que hay en el universo.

Para obtener una ecuación de estado para esta componente se asume que $\gamma = 0$, entonces al sustituir este valor en 1.32,

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, \tag{1.39}$$

por lo tanto, la presión de la energía oscura es negativa y al derivar a la densidad con respecto al tiempo,

$$\dot{\rho}_\Lambda = 0, \tag{1.40}$$

lo cual indica que la densidad de la energía oscura es constante en el tiempo. Como evidencias de la energía oscura se tienen a las Supernovas Tipo Ia, el Fondo Cósmico de Microondas (CMB), el parámetro de Hubble y las Oscilaciones Acústicas de Bariones (BAO) [6].

1.6.1. La Expansión y la constante Λ

Recordemos que, en capítulos anteriores llegamos a la ecuación de Friedmann 1.25 la cual involucra a la constante cosmológica Λ, a la densidad ρ y a la curvatura k, de este modo la curvatura y el parámetro de expansión se encuentran relacionados, y cuando la curvatura $k = 0$ se puede definir una densidad crítica:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{1.41}$$

teniendo entonces el parámetro de densidad

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \tag{1.42}$$

el subíndice i indica para qué componente se está utilizando, ya sea, la radiación (r), masa (m), energía oscura (Λ) o curvatura (k).

Entonces, ahora tenemos un nuevo parámetro para el cual le asociaremos un parámetro de densidad Ω_k

Siendo así el parámetro de densidad asociado a (Λ)

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \tag{1.43}$$

De acuerdo con lo anterior, la ecuación paramétrica de Friedmann se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{M,0}a^{-3} + \Omega_{k,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \tag{1.44}$$

Por lo tanto, el modelo que plantea Friedmann, esta determinado por los siguientes parámetros: H_0, Ω_M, Ω_r, Ω_k y Ω_Λ [24].

1.7. Modelo ΛCDM

El modelo **ΛCDM, (Lamdba - Cold Dark Matter)** fue propuesto en 1997 [6]. Surge a partir de la teoría de la expansión del universo y como un modelo de apoyo a la teoría del Big Bang. Este modelo propone de una manera general cómo está formado el universo, en donde Λ describe la parte de la energía oscura y CDM es la componente de la materia oscura fría [35]. Como la energía oscura es un valor constante, su ecuación de estado se define:

$$\omega = \frac{P_\Lambda}{\rho_\Lambda} = -1, \tag{1.45}$$

Estableciendo una relación entre el corrimiento al rojo y el factor de escala a mediante la ecuación 1.2

$$1 + z = \frac{1}{a}, \tag{1.46}$$

Asumiendo un universo plano ($k = 0$), la ecuación de Friedmann 1.44 se expresa en términos de densidades y corrimiento al rojo de la siguiente manera:

$$H^2 = H_0^2[\Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}], \tag{1.47}$$

en donde Ω_0 es la densidad del universo actual.

El parámetro $\Omega_{\Lambda,0}$ corresponde a la densidad de la energía oscura y tiene un valor de 0.7, lo cual corresponde a un 70 % que ocupa en el universo y $\Omega_{M,0}$ es la densidad de materia, la cual tiene un valor de 0.30, en donde 0.25 corresponde a la materia oscura y el 0.05 a la materia bariónica. Por lo tanto, en el universo hay un 30 % de materia.

Estos dos parámetros cumplen:

$$\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1. \tag{1.48}$$

Actualmente, este es el modelo estándar de la cosmología. Sin embargo, un problema de este modelo es que no explica la naturaleza de la energía oscura y la materia oscura. A pesar de que es una componente fundamental para este modelo, hasta el momento no se ha podido obtener evidencia de ella.

1.8. Modelo CPL

En vista de que el modelo ΛCDM se basa en la existencia de la energía oscura y la materia oscura, y que hasta el momento no se ha podido confirmar de manera definitiva su existencia, surgen inconsistencias a pequeñas escalas. Esto ha motivado la propuesta de modelos alternativos para explicar el comportamiento de la energía oscura, como el modelo **CPL**.

El modelo **CPL**, denominado así por las iniciales de quienes lo propusieron, Chevallier, Polarski y Linder [6], propone una parametrización a la ecuación de estado ω realizando una expansión de Taylor:

$$\omega_a = \sum_{i=0}^{N} (1-a)^i w_i, \tag{1.49}$$

con $N = 1$

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a(1-a) = \omega_0 + \omega_a(\frac{z}{1+z}) \tag{1.50}$$

con a como el factor de escala, ω_0 representa el valor actual de la ecuación de estado y ω_a es la derivada de $\omega(z)$ [33; 44]. Esta ecuación tiene como propósito estar descrita por una evolución temporal.

Entonces, la densidad de energía oscura estará descrita por ω_0, ω_a y Ω_Λ de la siguiente forma:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} = \Omega_\Lambda (1+z)^{3(1+\omega_0+w_a)} e^{\frac{-3\omega_a z}{1+z}}. \tag{1.51}$$

Con la parametrización de $\Omega(z)$ y ρ, se reescribe el modelo cosmológico 1.47 como:

$$H(z)^2 = H_0^2[\Omega_{M,0}(1+z)^3 + (1-\Omega_{M,0})(1+z)^{3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{(-\frac{3\omega_a z}{1+z})}]. \tag{1.52}$$

Capítulo 2

Observaciones

En el campo de cosmología se utilizan diversos conjuntos de datos observacionales como evidencia de la expansión del universo.
A continuación se describirá un poco sobre los usados en el presente proyecto.

2.1. Cronómetros Cósmicos

El parámetro de Hubble $H(z)$, que depende de la edad del universo y puede medirse con ayuda de los cronómetros cósmicos.

Los cronómetros cósmicos son herramientas que nos permiten medir el paso del tiempo en el universo y se basan en la evolución de galaxias.
La medición de estos datos observacionales se lleva a cabo mediante espectroscopia que permite determinar el corrimiento al rojo (z) de las galaxias. Las galaxias que se utilizan son rojas, es decir, que son galaxias viejas y elípticas. Se busca observar diferentes corrimientos al rojo en estas galaxias que tuvieron un brote temprano en el universo y así poder determinar su edad [56].
Este corrimiento al rojo representa un cambio infinitesimal (dz) en la longitud de onda de

la luz debido a la expansión del universo en una diferencial de tiempo (dt) [53].

Estos cronómetros se definen por la función:

$$H(z) = -\frac{1}{1+z}\frac{dz}{dt}. \tag{2.1}$$

En este proyecto se utilizaron 25 datos que corresponden al parámetro de Hubble. En la figura 2.1 se muestran los datos en función del corrimiento al rojo. Estos datos fueron tomados de [37]

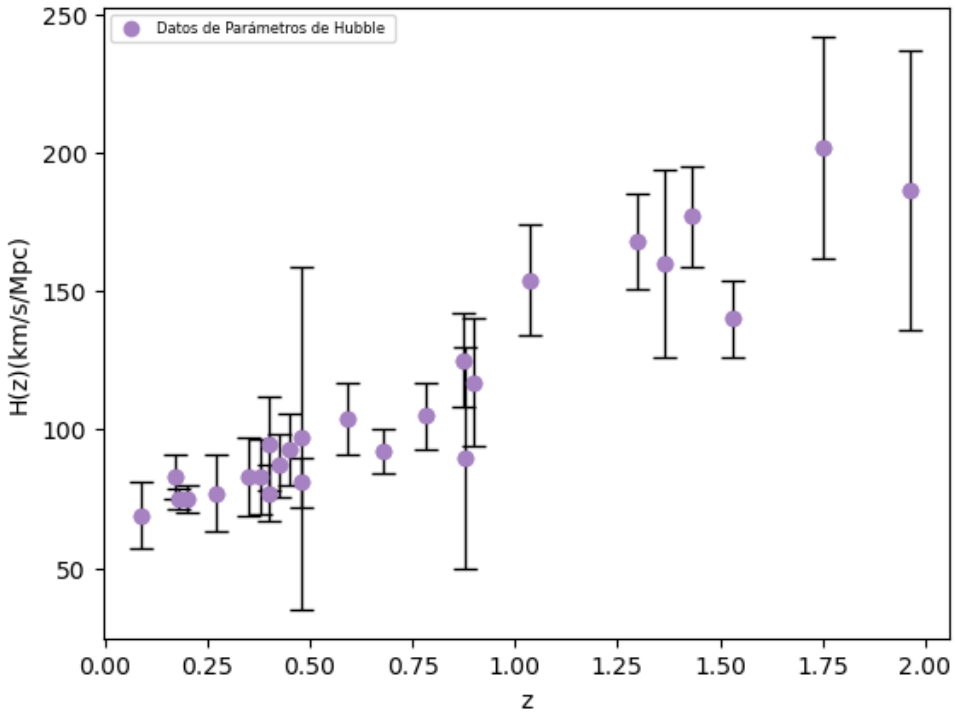


Figura 2.1: Cronómetros Cósmicos.

2.2. Supernovas

Como sabemos, entre los cuerpos celestes del universo se encuentran las estrellas. Estas son objetos que se forman a partir de nubes de gas y polvo en las cuales abunda él hidrógeno, tienen brillo propio por proceso de fusión nuclear en su interior [13; 20]. Las estrellas tienen un ciclo de vida y una fase final dependiendo su masa. Las estrellas de menos de $8M_\odot$ - $10M_\odot$ terminan como una nebulosa planetaria con una enana blanca central. Las estrellas con masas mayores $8M_\odot$ - $10M_\odot$ terminan su vida en una explosión de supernova con una estrella de neutrones en el centro. Cuando las estrellas tienen masas mayores a $100M_\odot$ se cree que en vez de formar una estrella de neutrones formarán un agujero negro. Pero las supernovas no solo provienen de estrellas masivas, también hay un tipo de supernovas denominadas SnIa, cuyo progenitor es una enana blanca que recibe masa de una compañera y el núcleo de carbono de la enana blanca termina explotando por la acumulación del material que absorbe de la compañera. Los detalles del mecanismo de la explosión, en este caso no están bien establecidos, sin embargo, la luminosidad y evolución de las SnIa es muy regular.

La luminosidad de las supernovas puede llegar hasta una magnitud de 10^{10} $L_\odot$ [30] y se pueden clasificar de la siguiente manera:

- **Tipo Ia**: Como dijimos, este tipo de supernovas, provienen de enanas blancas que son forzadas a explotar por la acumulación del material. No presentan líneas de Hidrógeno y Helio en sus espectros, pero sí presentan absorciones de silicio ionizado.
- **Tipo Ib, Ic**: Estas supernovas se forman por el colapso de las estrellas masivas. Presentan principalmente líneas de emisión de helio.
- **Tipo II** : Al igual que las supernovas tipo Ib y Ic se forman por el colapso estelar, sin embargo, estas sí presentan líneas de hidrógeno y su brillo es menor comparado con las de tipo I.

Como dijimos, las Supernovas Tipo Ia (SnIa), tienen un espectro homogéneo y, además,

todas las supernovas de este tipo presentan un pico similar en su curva de luz.
El pico de luminosidad de una SnIa se define como el momento en que la supernova alcanza su máximo brillo. A diferencia de otros tipos de supernovas, las SnIa presentan un pico de luminosidad notablemente uniforme. Esto significa que, independientemente de la distancia a la que se encuentre la supernova, su brillo máximo será similar. Esta propiedad convierte a las SnIa en **Estandares de Luminosidad (Standard Candles)** y son indicadores de distancia utilizando la siguiente relación:

$$d_L = (\frac{L}{4\pi l})^{\frac{1}{2}}, \tag{2.2}$$

en donde L es la luminosidad absoluta y l es la luminosidad aparente. Sin embargo, d_L se puede reescribir en términos del modelo ΛCDM y el corrimiento al rojo (z):

$$d_L(z, H_0, \Omega_M, \Omega_\Lambda) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \tag{2.3}$$

En la figura 2.2 se observan los datos utilizados que fueron tomados de [31]. Los datos son corrimiento al rojo (z) contra el modulo de distancia ($\mu(z)$), este se define:

$$\mu(z) = 5log d_L(z) + \mu_0, \tag{2.4}$$

con μ_0 como el modulo de distancia absoluta.

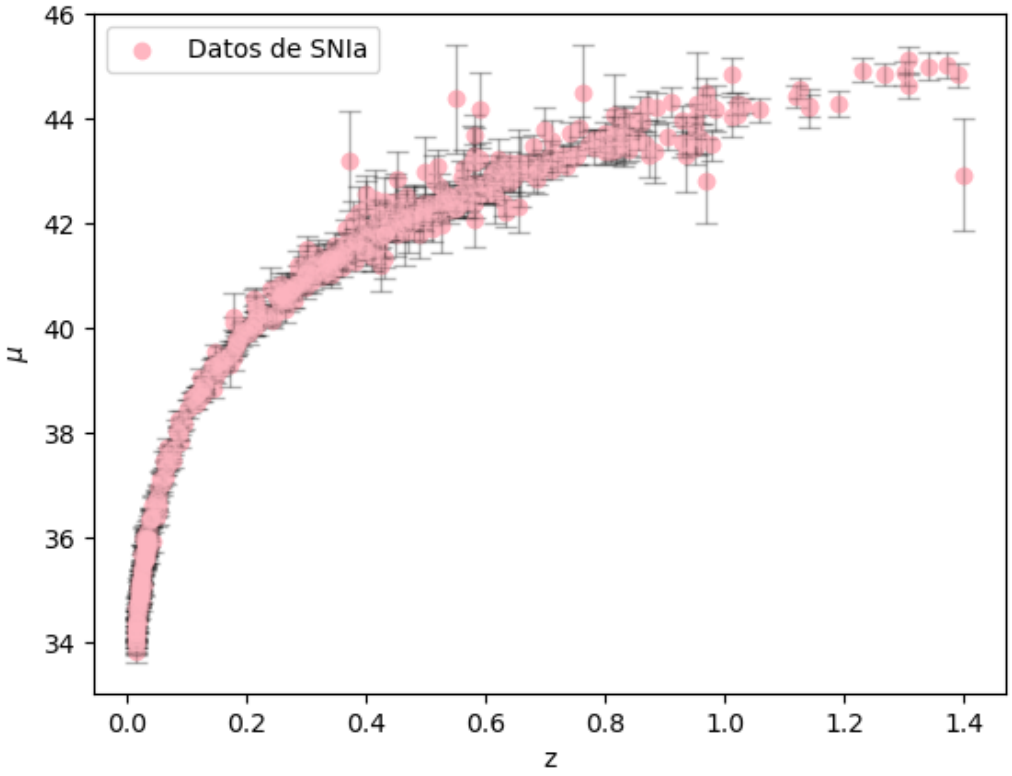


Figura 2.2: Datos de Supernovas Tipo Ia.

Capítulo 3

Programación Genética

En los últimos años, se han producido grandes avances en la aplicación de técnicas computacionales. Se han generado nuevas ideas y formas para que una máquina trabaje, e incluso se puede afirmar que el avance ha sido tan significativo que las máquinas ya pueden trabajar de forma automática. El área encargada de esto es el Aprendizaje Automático (en inglés, Machine Learning).

El Aprendizaje Automático es una rama de la Inteligencia Artificial (IA), que se dedica a realizar tareas de manera automática mediante modelos matemáticos con conjuntos de datos dados. Dicho de otra manera, con el aprendizaje automático se entrena a una máquina mediante un algoritmo para que realice tareas automáticamente [21], por lo mismo esta técnica tiene la capacidad de aprender distintos tipos de algoritmos computacionales. Ahora bien, un algoritmo es una serie de pasos, los cuales nos describen un proceso para darle una solución a un problema específico [36]. También se tiene, el concepto de cómputo evolutivo en el cual se aplica la teoría de la evolución y genética natural. Un caso particular del computo evolutivo es la **Programación Genética.**

La historia de la programación genética comienza alrededor del año 1950 con el concepto de evolución en una máquina automatizada, el concepto fue propuesto por Alan Turing [52]. John Holland demostró que el proceso evolutivo podía ayudar a resolver diversos

problemas y desarrolló los algoritmos genéticos. Más adelante, John R. Koza, estudiante de John Holland [51], desarrolló los algoritmos genéticos de tal modo que innovó con la programación genética. El objetivo era que las computadoras tuvieran la capacidad de resolver problemas con menos restricciones que con los algoritmos genéticos [53]. La programación genética (GP) es una técnica computacional actual que tiene como base a los algoritmos genéticos. Sin embargo, los algoritmos genéticos son solo un método de optimización, mientras que la programación genética, además de la optimización, nos permite descubrir los modelos que mejor describen al fenómeno que se quiere estudiar [36]. Por lo tanto, para resolver los problemas dados se utilizan modelos computacionales con los cuales se busca realizar una tarea definida. Estas tareas pueden ser muy sencillas y el usuario puede conocer inicialmente la solución o también pueden ser demasiado complejas en donde el usuario desconoce la estructura de la solución [36; 38].

El código genético está compuesto por una población en donde cada individuo representa una solución favorable para el problema. Conforme hay una reproducción, aparecen nuevos individuos, los cuales se espera que hayan heredado las mejores características de sus ancestros conforme al objetivo del problema a resolver. En los algoritmos genéticos, la reproducción implica la selección de dos individuos con base en su capacidad de adaptación. Estos individuos pasan a formar parte de la siguiente generación o combinan sus características genéticas para crear descendencia con un código híbrido. En otras palabras, se produce un intercambio de información genética entre los individuos seleccionados [38].

Para mostrar las soluciones del problema dado, la programación genética ocupa un diagrama de árbol.

3.1. Diagrama de árbol

Como se mencionó, las soluciones están dadas por diagramas de árbol [51]. Estos diagramas son estructuras que nos muestran la solución más óptima. Las estructuras se pueden

utilizar directamente para la regresión de fenómenos [21].

El diagrama de árbol está formado por nodos que se conocen como argumento cero, se tiene un nodo principal, de este nodo salen ramificaciones (ramas) o subárboles. En los nodos interiores se encuentran los operadores, que son las operaciones básicas como: suma (+), resta (-), producto (*) y división (/). También pueden ser operadores funciones como: coseno, seno, exponencial o raíz cuadrada; y los nodos terminales son las variables o números [51].

Los diagramas de árboles están formados por nodos que se conocen como argumento cero. Se tiene un nodo principal, del que salen ramificaciones (ramas) o subárboles. En los nodos interiores se encuentran los operadores, que son las operaciones básicas como: suma (+), resta (-), producto (*) y división (/). También pueden ser operadores funciones como: coseno, seno, exponencial o raíz cuadrada; y los nodos terminales son las variables o números [51].

Por ejemplo, en la figura 3.1 observamos que del nodo principal salen dos subárboles y el nodo del lado izquierdo se vuelve a dividir en donde uno es terminal y tiene la variable 9, mientras que el otro vuelve a ser un nodo interno y tiene al operador /, salen otros dos nodos los cuales son terminales. Del lado derecho se tiene un nodo que tiene un operador $-$ y se divide en dos teniendo un nodo terminal 1, y un nuevo operador sin y tiene el nodo terminal con la variable x. Por lo tanto, este árbol lo podemos interpretar con la siguiente función: $(9 + \frac{x}{2}) + (1 - \sin(x))$.

3.2. Selección Natural

A lo largo de los años, hemos podido constatar que, al igual que en el universo, también existe evolución en los seres vivos y en los ecosistemas. En efecto, si reflexionamos, todo cambia con el paso del tiempo. El científico que propuso el término de evolución en los seres vivos fue Charles Darwin.

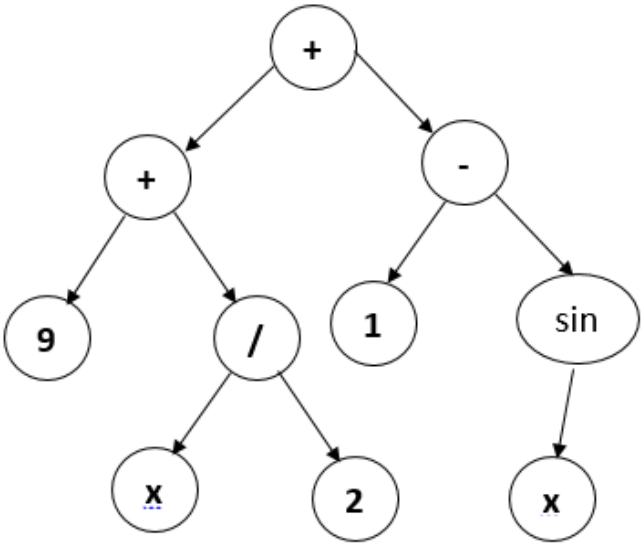


Figura 3.1: Ejemplo de la resolución de un diagrama de árbol. La solución es: $(9 + \frac{x}{2}) + (1 - \sin(x))$.

Charles Robert Darwin, científico inglés, formuló la teoría de la evolución, descrita en su obra El origen de las especies en 1859. En esta obra, propone que la diversidad de las especies es consecuencia de la evolución a través de procesos de adaptación [40]. Sus dos grandes contribuciones son las siguientes:

- 1. Las especies no son estáticas en el tiempo, evolucionan.
- 2. La selección natural es el mecanismo que permite la evolución.

La selección natural tiene como propósito explicar el porqué se da la evolución en las especies. Darwin daba el ejemplo de las jirafas, estás hace mucho tiempo eran de diferentes complexiones, conforme pasaba el tiempo tuvieron que evolucionar sobreviviendo las que tuvieran el cuello y patas más largas para poder alimentarse de las ramas más altas de los árboles en tiempos de escasez [43], en la figura 3.2 podemos observar el diagrama de este ejemplo. Efectivamente, la evolución de una especie está estrechamente ligada a su capacidad de adaptación al entorno en el que habita. En este sentido, la selección natural juega un papel crucial como mecanismo impulsor del cambio evolutivo. Dicho proceso se caracteriza por una dinámica competitiva entre los individuos de una población,

donde aquellos con características más favorables para la supervivencia y reproducción en un ecosistema determinado tienen mayores probabilidades de transmitir sus genes a las siguientes generaciones. Con el paso del tiempo, esta selección diferencial conduce a un aumento gradual de las características ventajosas en la población, lo que se traduce en un proceso evolutivo que permite a la especie adaptarse a las condiciones cambiantes de su entorno [41; 42; 43].

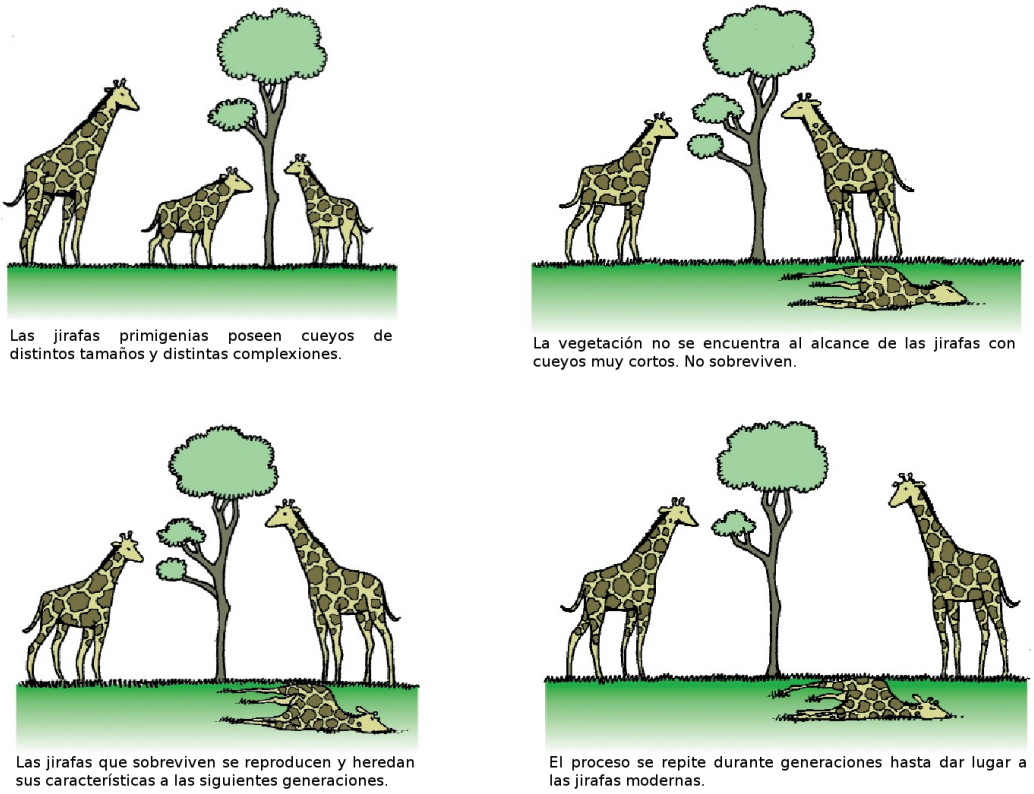


Figura 3.2: Ejemplo de la selección natural de las jirafas. Solo van a sobrevivir y a evolucionar aquellas que se adaptaron a su ecosistema.[Imagen tomada de: https://www.greenteach.es/seleccion-natural-especies-afectada-cambio-climatico]

3.3. Población e individuos

En la programación genética, la población es el conjunto de datos que se dan en el problema y cada individuo representa una solución al problema asignado [36].Para crear nuevas generaciones se aplican a la población operadores genéticos con los cuales se busca

crear nuevos individuos y de este modo encontrar a los individuos candidatos para ser la mejor solución. Para cada tipo de problema existe un óptimo, ya sea máximo o mínimo, el cual también es conocido como "Fitness"[19].

3.4. Genotipo y Fenotipo

Cada individuo de la población tiene su propia información genética, en ella participan el genotipo y fenotipo. El genotipo se conforma por un conjunto de "genes", en donde estos contienen la información de las cadenas o secuencias del ADN. El fenotipo es la expresión del genotipo. Es decir, nos va a indicar las características morfológicas como, el color, longitud, talla, comportamiento [40].

3.5. Función Fitness

Cada individuo dentro de una generación posee un conjunto de genes que define sus características hereditarias, lo que se conoce como algoritmo genético. Este conjunto genético es evaluado en función de su capacidad para conferir a su portador ventajas adaptativas al entorno en el que habita. Dicha evaluación recibe el nombre técnico de fitness.

La función fitness es aquella función indicadora de qué tan buenas o malas son las soluciones encontradas con el modelo o soluciones encontradas para el problema dado [19].

Para encontrar este valor se toman en cuenta las condiciones de cada problema, pues no todas las soluciones halladas serán aptas para que el problema sea resuelto. Así que, se toman los mejores valores encontrados para cada nueva generación y a través de un proceso estadístico se evalúan, encontrando así al "más óptimo"[36].

3.6. Operadores Genéticos

Con el objetivo de generar nuevas generaciones, se emplean operadores genéticos. Estos operadores, comúnmente denominados GO (por sus siglas en inglés), constituyen herramientas fundamentadas en los principios de la evolución biológica. Su función principal consiste en modificar las características de los individuos y de la población en general. Los operadores genéticos básicos son la selección, el cruce y la mutación [36; 39].

- **Selección**

  Este operador realiza una búsqueda entre los individuos para elegir cuáles podrían reproducirse y cuáles no. Para realizar la clasificación, el algoritmo da prioridad a los individuos más aptos para reproducir. Así que la elección de un individuo va a depender de su valor de ajuste. El valor de ajuste es, saber qué tan buenas son las aptitudes del individuo para el problema. Entre mayor sea este valor, el desempeño del individuo también es mejor. Sin embargo, los individuos menos aptos no se quedan de lado, también se ocupan para crear una nueva generación, pues de otro modo la población sería muy homogénea [36; 38].

- **Mutación**

  La mutación biológica se refiere a un cambio aleatorio en la organización del ADN. Con esto se busca obtener una variación en las características de un ser vivo y no necesariamente se hereda a la generación siguiente. Y la mutación como un operador genético, es un cambio aleatorio sencillo de aplicar, ya que solo se busca cambiar parte de un genotipo y crear uno nuevo.

  Mutación puntual: Se escoge un nodo y se intercambia por otro del mismo tipo.

  Mutación por subárbol aleatorio: En este caso se cambia aleatoriamente toda una ramificación del árbol.

  En la figura 3.3, podemos observar los dos casos de mutación; en la parte superior de la imagen, se tiene el caso de la mutación por subárbol, en este caso se puede ver que

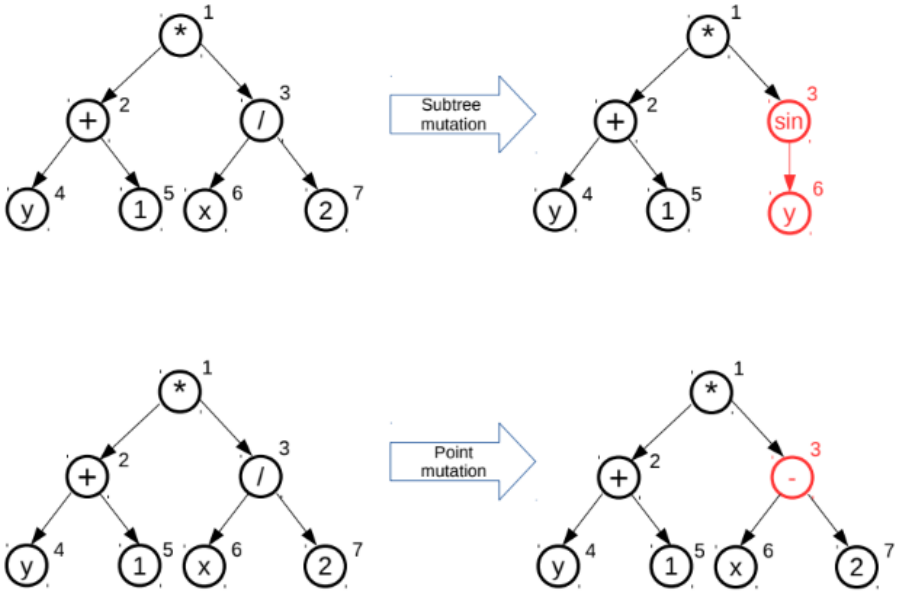


Figura 3.3: En la figura de arriba se tiene el caso de mutación por subárbol y en la parte inferior se tiene el caso de mutación puntual. Imagen tomada de [36].

se cambia la ramificación que contiene al nodo 3, al nodo 6 y al nodo 7 lo eliminó. En la mutación puntual (caso de abajo en la figura) únicamente se tomó al nodo número 3 de manera aleatoria y se le cambió el operador, respetando la jerarquía y orden que lleva la estructura del árbol.

- **Cruce**

  El cruce es una recombinación, con la cual se crean nuevos individuos a partir de la población original que se tiene. Utilizando la información genética que contiene cada individuo de la población, se hace dicha combinación. Se toma la mejor información de un padre y una madre para poder obtener un mejor nuevo individuo. De este modo, se van creando nuevas generaciones, ya que en cada combinación se toma lo mejor de los padres, creando un nuevo hijo y así sucesivamente. En la figura 3.4 se tiene el ejemplo de cómo se aplica el operador cruce. En este caso, se mezclan dos árboles que tienen la función de padres, dando como resultado un nuevo árbol con información de ambos árboles.

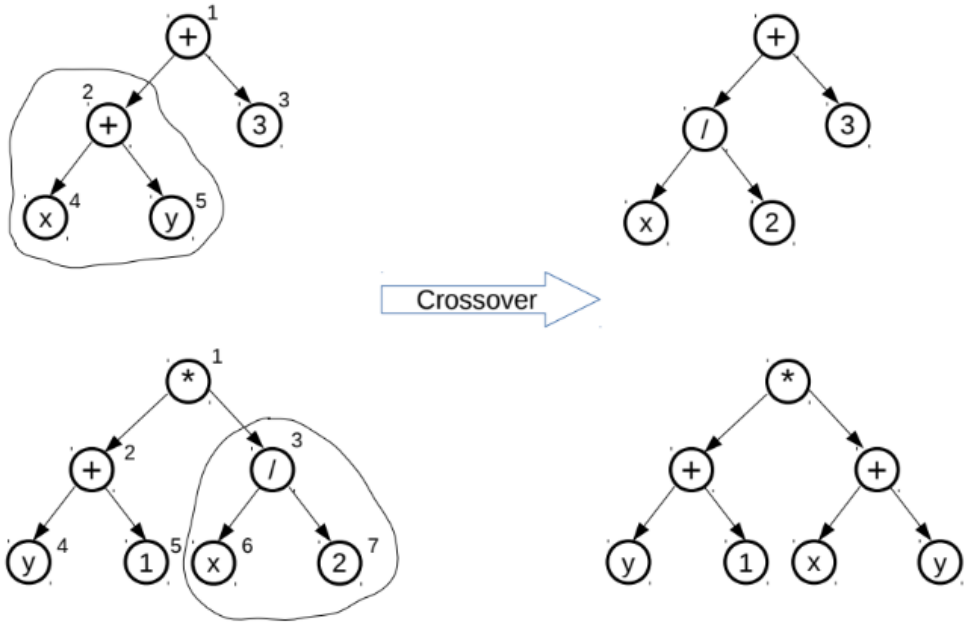


Figura 3.4: Cruce. En la ilustración observamos dos árboles que actúan como progenitores. Estos se combinan mediante un proceso denominado cruce para generar un nuevo árbol que fungirá como descendencia. Imagen tomada de [36].

3.7. Aplicaciones

La Programación Genética actualmente es una herramienta funcional para diversas áreas. Tomando en cuenta que el proceso para resolver problemas es la optimización, algunas de sus aplicaciones son en el área de finanzas, pues con el algoritmo genético se puede predecir el modelo económico y de este modo planificar conociendo los posibles resultados [45]. Otra aplicación es en el área biológica, en este caso mediante la programación genética se puede hacer la simulación de como evolucionan los procesos para el descubrimiento de nuevos medicamentos, y en el caso del área de la salud la programación genética ayuda a brindar información sobre las células cancerígenas [46]. En el área de astronomía, la programación genética es aplicada para modelar y predecir sistemas estelares o conocer órbitas de cuerpos celestes como asteroides, cometas o satélites [47]. En general, podría aplicarse a cualquier tipo de problema que sea de optimización.

Sin embargo, así como la programación genética tiene múltiples aplicaciones y que suena un método favorable para encontrar soluciones o predicciones, el método tambien tiene desventajas. La programación genética requiere ajustar varios parámetros, como el tama-

ño de la población, las tasas de mutación y cruce y encontrar los valores óptimos para estos parámetros puede ser complicado y requiere la realización de múltiples pruebas, lo cual complica y retarda el proceso, también tiene un costo computacional alto lo cual dependiendo el tamaño del problema y de los parámetros puede dificultar el proceso de búsqueda.

3.7.1. Programación Genética en Python

Anteriormente, se mencionó que este trabajo fue realizado mediante el método de programación genética (GP) en el lenguaje de programación Python. Utilizando como base las librerías Symbolic Regression y GPlearn. La librería Symbolic Regression en español, Regresión Simbolica, tiene como enfoque analizar datos y encontrar patrones y de este modo descubrir la expresión matemática que mejor describe la relación entre las variables. La regresión simbólica nos brinda la ventaja de obtener una representación transparente del modelo, lo que permite una mejor comprensión del fenómeno en estudio.
GPlearn tiene su algoritmo basado en programación genética [19]. Esta librería realiza un modelo de regresión lineal, y de este modo se obtienen dos variables, una dependiente y una independiente, $f(x) = y$. Además, en este caso, para cada solución se debe agregar un ruido ϵ. Es decir:

$$f(x) = x + \epsilon. \tag{3.1}$$

El ruido ϵ representa datos falsos en nuestro problema para que con ayuda de estos podamos asemejar un problema con datos reales y no simular un problema ideal, esto ayudará a evitar que la función converja antes de encontrar a la solución más óptima. En términos simples, si un algoritmo converge prematuramente, significa que deja de explorar nuevas posibilidades o soluciones antes de haber examinado exhaustivamente todo el conjunto de soluciones disponibles y en lugar de encontrar la mejor solución global para un problema, se queda atascado en una solución que puede ser localmente óptima pero no necesariamente la mejor en todo el espacio de búsqueda [19].

Un concepto importante en este proceso es el criterio de convergencia. Este criterio le

dice al algoritmo en que momento debe detenerse porque su búsqueda ha finalizado. Los parámetros que puede tomar en cuenta son:

- Número de generaciones. El algoritmo se detiene cuando se han realizado todas las generaciones.
- Fitness. Si en el fitness no hay algún cambio, el algoritmo se dentedrá.
- Stall de generaciones. El algoritmo puede detenerse antes de alcanzar el número de generaciones establecidas si no hay cambios en la solución.

Así, al tener el conjunto de datos, se aplican los siguientes parámetros para poder empezar con la búsqueda de soluciones:

- Población: Número de individuos con los que se creara la población, en donde cada individuo es una solución.
- Generaciones: Número de generaciones que se quieren obtener.
- Criterio de convergencia: El valor métrico requerido para detener el programa antes de tiempo (criterio de convergencia).
- Cruce: Se cruzarán los mejores individuos.
- Mutación: Se mutarán los mejores individuos.
- Conjunto de funciones: Aquí se definen los operadores que se pueden ocupar para dar un resultado (adición, sustracción, cociente, funciones trigonométricas...).
- Coeficiente Parsimonía: La parsimonia se refiere al principio de preferir soluciones más simples o más compactas cuando hay múltiples soluciones igualmente buenas para un problema.

A cada parámetro se le asigna un valor, dependiendo de la función que se busca reconstruir. Cabe destacar que entre los parámetros de cruce, mutación y parsimonía los valores asignados corresponden a un porcentaje, lo cual su suma no puede exceder o ser igual a 1.

Como cada problema tiene su necesidad particular, es necesario ir realizando pruebas con distintos valores en cada parámetro. En el Apéndice A, se encuentra un diagrama de flujo del código utilizado y en el Apéndice B se tiene el código.

Capítulo 4

Funciones de prueba

En este capítulo, se presentan reconstrucciones previas realizadas sobre funciones matemáticas simples y conocidas, tales como la línea recta, la parábola y una función trigonométrica. El objetivo principal es evaluar la eficacia del método de programación genética para reconstruir ecuaciones. Posteriormente, este método se aplicará a datos observacionales para identificar su forma funcional.

Para trabajar con las funciones matemáticas agregamos un ruido de la forma $a * \epsilon$. En donde a puede tener un valor de $1, 2, 3...20$ el cual se definió conforme a las necesidades de búsqueda, mientras que ϵ son 100 puntos aleatorios en un rango de $[-10, 10]$ con una distribución normal estándar.

La distribución normal estándar, también conocida como distribución normal unitaria o distribución gaussiana, es fundamental en inferencia estadística y pruebas de hipótesis. Esta distribución proporciona un marco para calcular probabilidades y comparar datos normalizados. Se representa por una curva simétrica en forma de campana y está completamente definida por dos parámetros: la media y la desviación estándar

4.1. Función Lineal

El primer caso que realizamos fue una función lineal, también conocida como: Línea Recta. Recordemos que la ecuación de una línea recta es:

$$f(x) = mx + b, \tag{4.1}$$

con m = la pendiente y b = ordenada al origen.

Nuestra ecuación teórica y que se busca reconstruir, es:

$$f(x) = 4x + 20, \tag{4.2}$$

y al agregarle el ruido, tenemos:

$$f(x) = 4x + 20 + (a * \epsilon), \tag{4.3}$$

en donde a y $\epsilon \in$ [-10,10] son el ruido agregado.

Para llevar a cabo la reconstrucción de la ecuación, compilamos distintas veces el código variando $(a*\epsilon)$, es decir, el ruido. Primero elegimos el valor para a. En un rango de 1 a 1000, empezamos a variar el valor en intervalos de 1 en 1, después de 10 en 10 y de 100 en 100. Así estuvimos observando cómo variaban gráficamente la distribución de los 100 puntos y qué tan dispersos se encontraban con respecto a la función original. Pudimos notar que, con valores muy grandes como 200, 300, 400 en adelante, el orden en que los puntos recrean la figura de la línea recta se dispersaba mucho con respecto a la función teórica, así que descarté dichos valores grandes para a, además de que el árbol de solución que se generaba con estos valores tenía muchas ramificaciones, lo que hace que la solución sea complicada de interpretar. Para el rango con a entre 1 y 20, obtuve que el diagrama de árbol era sencillo de interpretar, porque no tenía muchas ramificaciones ni ciclos periódicos; por lo tanto, la solución la pudimos interpretar sin ninguna dificultad. Como última prueba, usamos a = 20, 30...100. En estos casos, el diagrama de árbol tenía una mayor cantidad de ramificaciones en comparación con el caso anterior con valores pequeños, entonces al

resolver el diagrama de árbol, notamos que había muchas ramas periódicas nuevamente. Ya que las ramas son periódicas, también hace que los árboles sean más complicados de resolver, entonces, entre menos ramas tenga el árbol, también es un factor a considerar, ya que es más sencillo trabajar con árboles con un menor número de ramas que uno con muchas. Por lo tanto, concluimos que para trabajar las pruebas si el ruido es mayor a $a = 20$ da como resultado árboles con muchas ramificaciones y en muchos casos son periódicas, así que decidimos trabajar con los valores pequeños (menores de 20) para a. Elegimos un caso para la ecuación (4.2), cuando $a = 5$. En la figura 4.1, se tiene a la función teórica y los puntos azules dispersos son el ruido agregado a la función.

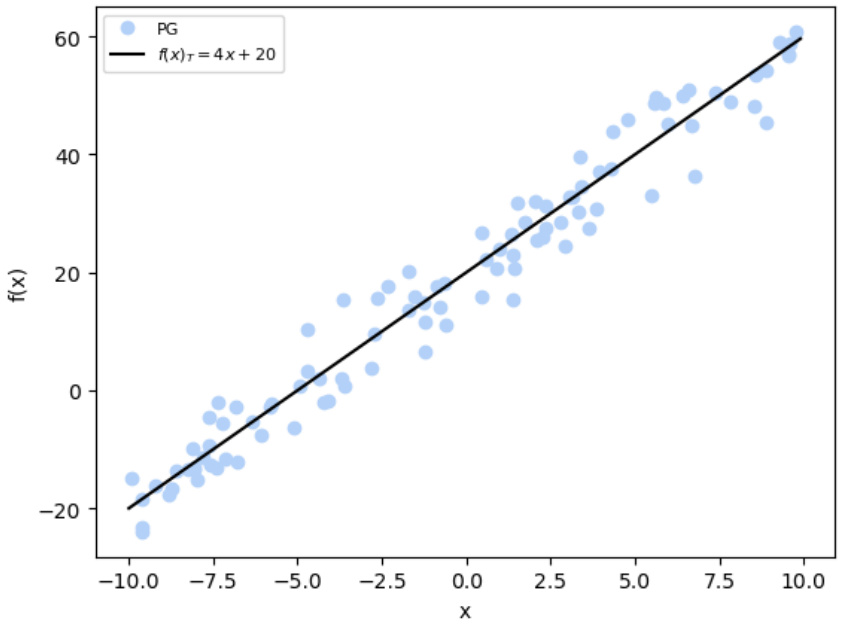


Figura 4.1: Gráfica de la ecuación teórica $4x + 20$. Los puntos azules son los 100 datos de valores aleatorios y representan el ruido agregado a la función.

Otros parámetros que se decidieron fueron el número de población, cuántas generaciones iban a ser y qué porcentaje se aplicaría a los operadores genéticos de cruce, mutación y al coeficiente de parsimonia. Para elegir el número de población, lo fuimos variando de manera aleatoria con valores desde 10 individuos hasta 3000, notando que el resultado no variaba mucho cuando ya se tenía una población con 1000 individuos. Si bien había algunas modificaciones en las ramas, al final siempre daba el mismo resultado o uno similar al resolver el diagrama de árbol. Así que, el tamaño de la población lo tomamos igual a 1000

individuos. Las generaciones se eligieron de un modo similar: probamos con valores de 10 hasta 100 generaciones, viendo que las soluciones obtenidas después de las 30 generaciones ya generaban el mismo valor. Otro factor importante que tomamos para elegir el número de generaciones fue el tiempo de cómputo. Entre más generaciones, el tiempo era mayor y al no tener resultados nuevos, no era necesario hacer tantas generaciones, por lo cual se decidió trabajar con 30 generaciones. Los demás parámetros, como el cruce, la mutación y la parsimonia, los fuimos variando por tamaño de magnitud con el propósito de analizar las soluciones y conocer el beneficio de tener un cruce, una mutación o parsimonia con un cierto valor. El tipo de cruce que se utiliza en este caso es un cruce por árbol. Como los individuos están representados por diagramas de árbol, el cruce se realiza cambiando subárboles entre ellos. La mutación es de tipo subárbol aleatorio, es decir, que va seleccionando ramas de manera aleatoria del mismo árbol y las va modificando.

Empezamos a trabajar con la ecuación de la recta (4.2), con los parámetros fijos mencionados anteriormente. El ruido era igual a $a * \epsilon(-10, 10)$, con a=5, la población era igual a 1000, se usaron 30 generaciones y la tasa de cruce se fue variando partiendo de 0.7 (considerado un valor grande) y disminuyendo el orden de magnitud hasta 0.00007 (un valor pequeño). Se mantuvieron fijos los valores de mutación (0.01) y parsimonia (0.09). Estos valores se seleccionaron tomando en cuenta que la suma de los parámetros no debe ser mayor a 1 y basándonos en el ejemplo de la página de gplearn [51], donde se sugieren estos valores al realizar un ejemplo de 3 dimensiones.

En la tabla 4.1, se encuentran las soluciones obtenidas para los valores elegidos. En la figura 4.2, se observan las soluciones gráficas y en la figura 4.3, se encuentra el diagrama de árbol de la mejor solución. A cada solución se le calculó el valor del error (S^2), utilizando el ajuste de mínimos cuadrados. Esta técnica funciona para realizar un ajuste entre los valores teóricos y los valores predichos por el modelo mediante la siguiente relación:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - X)^2}{N}, \tag{4.4}$$

con x_i como el valor de datos teóricos, X el valor de los valores obtenidos o predichos y N el número de datos.

El ajuste de datos mediante mínimos cuadrados es muy útil cuando se trabaja con modelos lineales, pero también puede aplicarse a modelos no lineales ajustando los parámetros del modelo para minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias. Entre menor sea el valor de S^2, indica que el modelo es más efectivo.

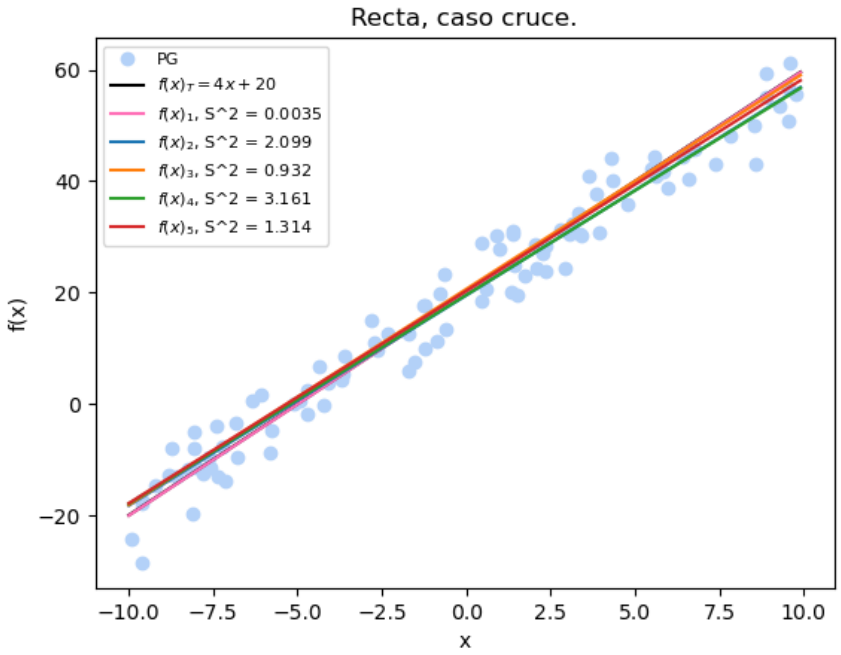


Figura 4.2: Soluciones obtenidas al variar el cruce de 0.7 a 0.00007 en la ecuación $4x + 20 + a * \epsilon[-10, 10]$.

$f(x)$	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.7	0.09	0.01	$4x + 19.940$	0.0035
$f(x)_2$	0.07			$3.776x + 19.490$	2.099
$f(x)_3$	0.007			$3.879x + 20.629$	0.932
$f(x)_4$	0.0007			$3.7152x + 19.567$	3.161
$f(x)_5$	0.00007			$3.817x + 20.310$	1.314

Tabla 4.1: Resultados obtenidos al variar el cruce de 0.7 a 0.00007, la parsimonia y la mutación se quedaron con valores fijos para la ecuación de la recta 4.2. La solución resaltada fue seleccionada como la mejor.

En este primer análisis, se puede notar que las soluciones que obtuvimos tienen la forma de la función original, aunque existen algunas variantes en el valor de la pendiente y de la ordenada al origen. Al calcular el valor S^2 para cada solución, se encontró que el valor

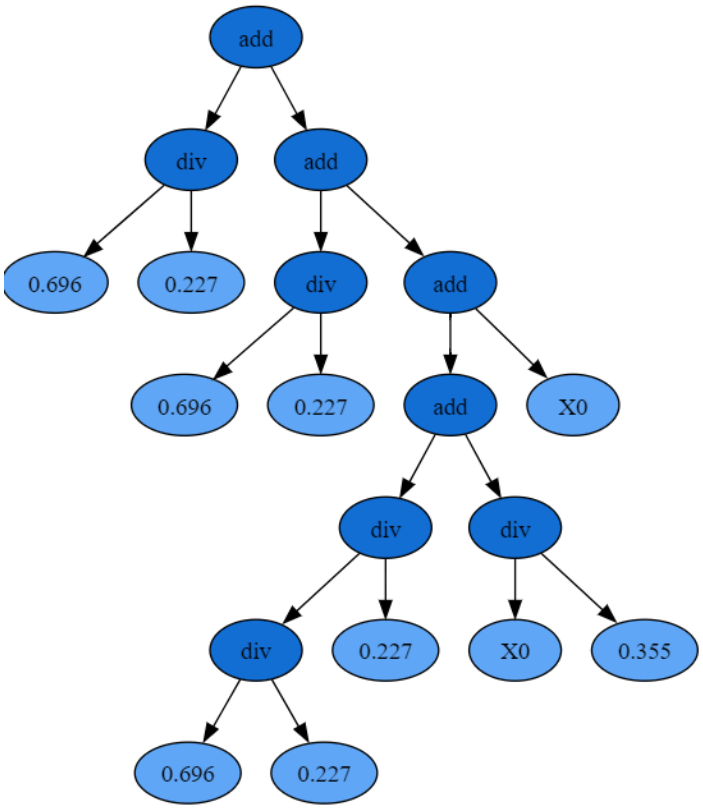


Figura 4.3: Diagrama de árbol para la solución $4x + 19.940$ con $S^2 = 0.0035$, cuando el cruce tiene un valor de 0.7

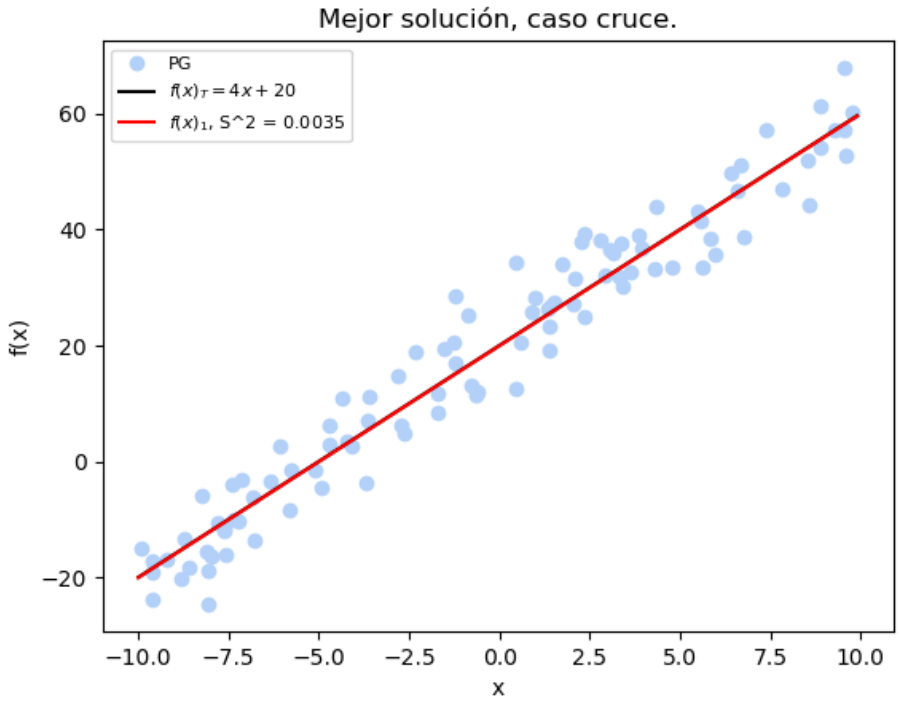


Figura 4.4: En la gráfica tenemos la mejor solución para el caso del cruce. La gráfica negra es la gráfica original y la roja es la solución reconstruida $f(x)_1$.

más pequeño de error, S^2 =0.0035, se obtiene cuando el cruce tiene un valor igual a 0.7. Por lo tanto, esta sería nuestra mejor solución. En la figura 4.2 se tiene la gráfica de las soluciones obtenidas de la tabla 4.1, y en 4.3 se tiene el diagrama de árbol de la solución cuando el cruce tiene un valor igual a 0.7.

En la figura 4.4, podemos observar a la mejor solución que obtuvimos al ir variando la magnitud del cruce. Se puede notar que casi todos los puntos de la función original y la solución reconstruida $f(x)_1$ coinciden. Esto quiere decir que para el conjunto de datos que tenemos se necesita que haya más intercambios de información genética entre los individuos que fueron seleccionados como padres.

El proceso de variar la tasa del cruce lo repetimos, pero en esta ocasión estuvimos variando el valor de la magnitud de la parsimonia de 0.9 a 0.00009, mientras que el valor del cruce y de la mutación se dejaron fijos, igual a 0.1 y 0.05 respectivamente. En el caso del cruce se usó este valor porque si usábamos el valor predeterminado del ejemplo (0.7) la suma de los parámetros daba mayor o igual a 1 y cuando eso sucede el código marca error, por lo antes mencionado de que los valores de los parámetros representa una tasa. En la

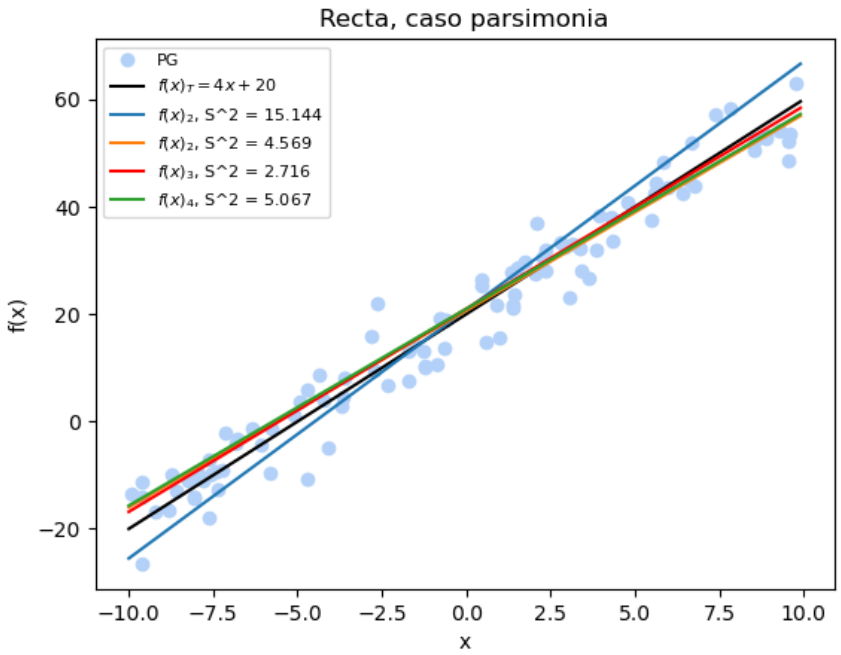


Figura 4.5: En la figura tenemos las gráficas de las soluciones obtenidas (ver en la tabla 4.2) al ir variando la magnitud de la parsimonia.

tabla 4.2 se tienen las soluciones con su respectivo valor de S^2. Las soluciones en estos rangos mantienen la forma de la ecuación original solo cambiando el valor de la pendiente y la ordenada al origen. En la figura 4.5 se observan las gráficas de las soluciones obtenidas. En este caso al realizar la última prueba con el valor 0.00009, la solución que obtuvimos no se acercaba a la forma de la función original; esto pasa porque la parsimonia tiene como objetivo dar la solución más sencilla al problema; sin embargo, cuando se forzá a que haga una búsqueda mayor entre las soluciones y como tal ya no hay una mejor solución en ese rango empieza a generar soluciones con diferentes ramas en el diagrama de árbol de manera aleatoria. En este caso de la línea recta, no es necesario una parsimonia con una magnitud tan pequeña como el rango antes mencionado, pero si es necesaria una de magnitud igual a 0.009, ya que aunque nuestros datos no tienen una forma tan compleja, para tener una mejor exactitud si se requiere que haya una mejor exploración entre las soluciones después de realizar los procesos de cruce y mutación.

Por lo mismo que el valor de la parsimonia es pequeño y se requieren más intercambios de información entre las ramas de los árboles, este diagrama de árbol es muy grande y no

$f(x)$	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.9	0.05	$4.629x + 20.787$	15.144
$f(x)_2$		0.09		$3.663x + 20.651$	4.569
$f(x)_3$		0.009		$3.78x + 20.976$	2.715
$f(x)_4$		0.0009		$3.665x + 20.976$	5.067

Tabla 4.2: Resultados obtenidos al variar la parsimonia 0.9 a 0.0009. Los valores del cruce y la mutación se quedaron con valores fijos para la ecuación de la recta 4.2. La solución resaltada fue seleccionada como la mejor en base a la magnitud de su error.

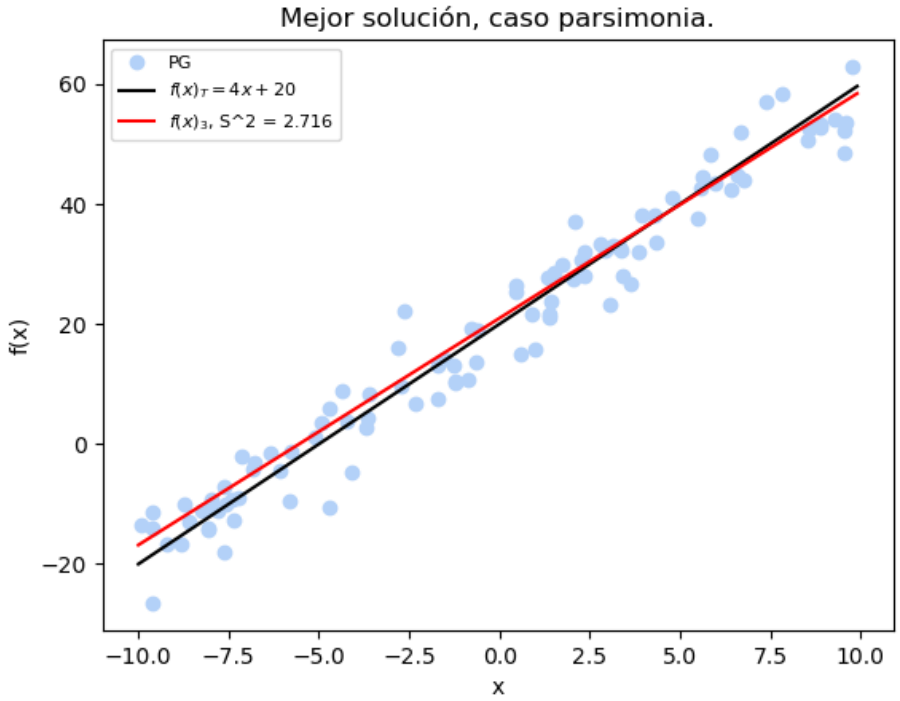


Figura 4.6: En la gráfica tenemos a la mejor solución obtenida con un valor de parsimonia igual a 0.009 y un error $S^2 = 2.715$ de color rojo y a la función teórica con la que estamos comparando de color negro.

se puede mostrar la imagen del diagrama de la mejor solución. En la figura 4.6 se tiene la mejor solución encontrada (en rojo) y la función original (en negro). Se observa que al principio las rectas no coinciden en todos sus puntos, pero al final de la recta estas terminan coincidiendo.

Al final, repetimos el proceso, pero en esta ocasión variamos el parámetro de mutación de 0.5 a 0.00005. En la tabla 4.3 se muestran los resultados y en la figura 4.7 se observan las gráficas correspondientes. En esta ocasión, la mejor solución se obtuvo cuando la mutación

tuvo un valor igual a 0.005 y el valor del error $S^2 = 0.581$. Esto nos indica que nuestro caso necesita una cierta cantidad de valores aleatorios, pero no requiere que sea mínima. Por eso, los valores cuando la mutación es pequeña no son los mejores y cuando la mutación es muy grande, como hay mucha variedad de información genética aleatoria, la solución se aleja de la función original.

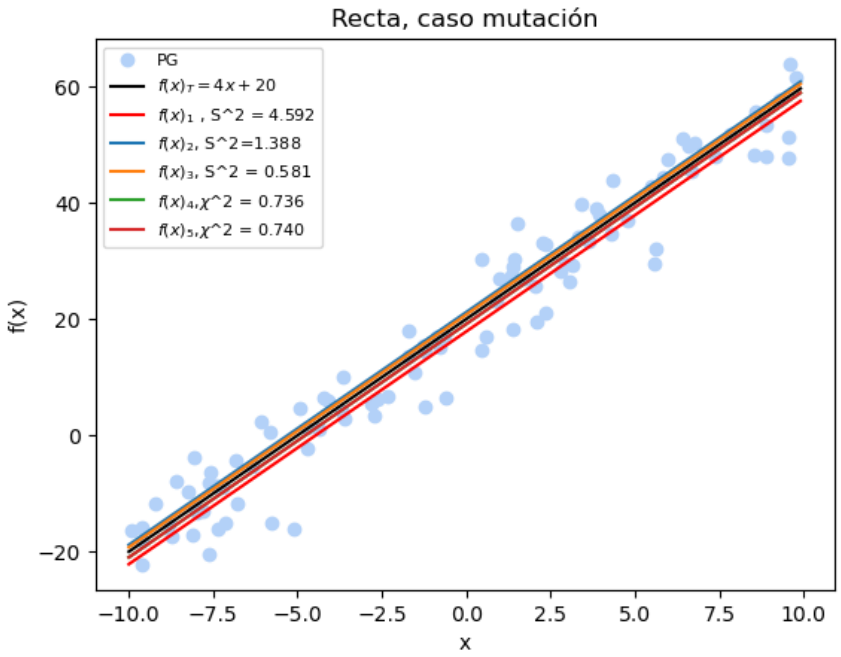


Figura 4.7: Soluciones obtenidas al variar la mutación de 0.1 en 0.1 en la ecuación $4x + 20 * a * \epsilon[-10, 10]$.

$f(x)$	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.09	0.5	$4x + 17.857$	4.592
$f(x)_2$			0.05	$4x + 21.178$	1.388
$f(x)_3$			0.005	$4x + 20.762$	0.581
$f(x)_4$			0.0005	$4.0121x + 19.144$	0.736
$f(x)_5$			0.00005	$4x + 19.139$	0.740

Tabla 4.3: Resultados obtenidos al variar la mutación de 0.5 a 0.00005 con el cruce igual a 0.1 y parsimonia igual a 0.09 para la ecuación de la recta 4.2. La mejor solución se encuentra resaltada.

En la figura 4.9 podemos ver que la función original (negra) y la función reconstruida (roja) se ven muy similares, pero se alcanzan a distinguir ambas rectas.

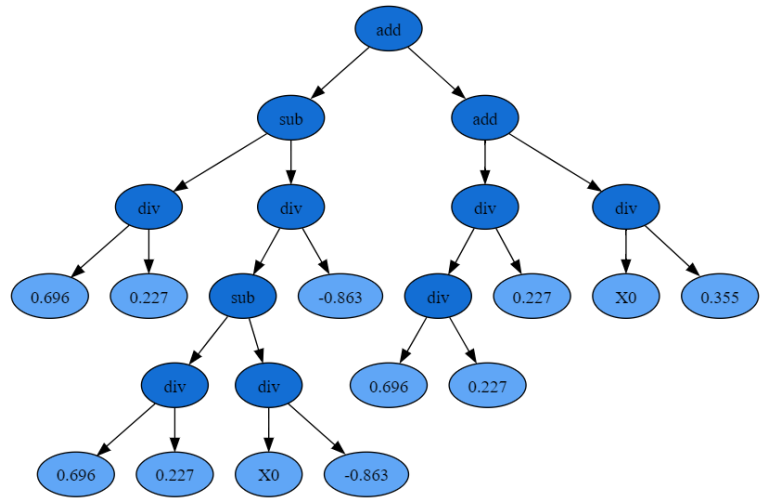


Figura 4.8: Diagrama de árbol de la mejor solución cuando la mutación vale 0.005. El resultado del diagrama es $4x + 20.762$ con $S^2 = 0.581$.

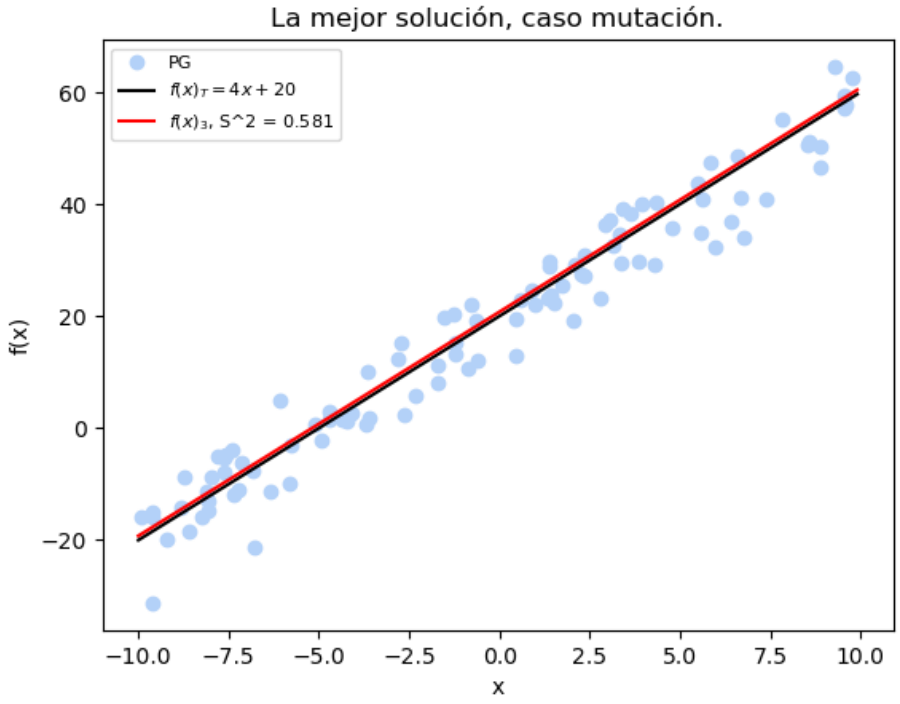


Figura 4.9: En la gráfica tenemos la mejor solución para el caso del cruce. La gráfica negra es la gráfica original y la roja es la solución reconstruida $f(x)_3$.

Analizando los resultados de cada una de las mejores soluciones mediante el valor de S^2, se puede notar que para este tipo de datos con forma de línea recta se necesitan un cruce grande donde haya mayor diversidad de información genética entre los padres, una

mutación en la que sí haya variación aleatoria, pero no mucha ni tampoco mínima. Por último, una parsimonia no muy pequeña, ya que los datos no requiere una solución muy compleja.

4.2. Función Cuadrática

El siguiente caso que realizamos fue reconstruir una función cuadrática de la forma:

$$f(x) = x^2 + 10, \tag{4.5}$$

la cual describe una parábola desplazada 10 unidades del origen. A esta función le agregaremos de igual modo un ruido a * $\epsilon[-10, 10]$, con el mismo tipo de distribución normal, entonces la ecuación nos queda:

$$y(x) = x^2 + 10 + (a * \epsilon), \tag{4.6}$$

con $a = 2$.

En la figura 4.10 se observa la gráfica de la función 4.5 junto con los puntos que representan el ruido que se está agregando. Se puede notar que la mayor cantidad de puntos o ruido de la función se encuentra en el vértice de la parábola.

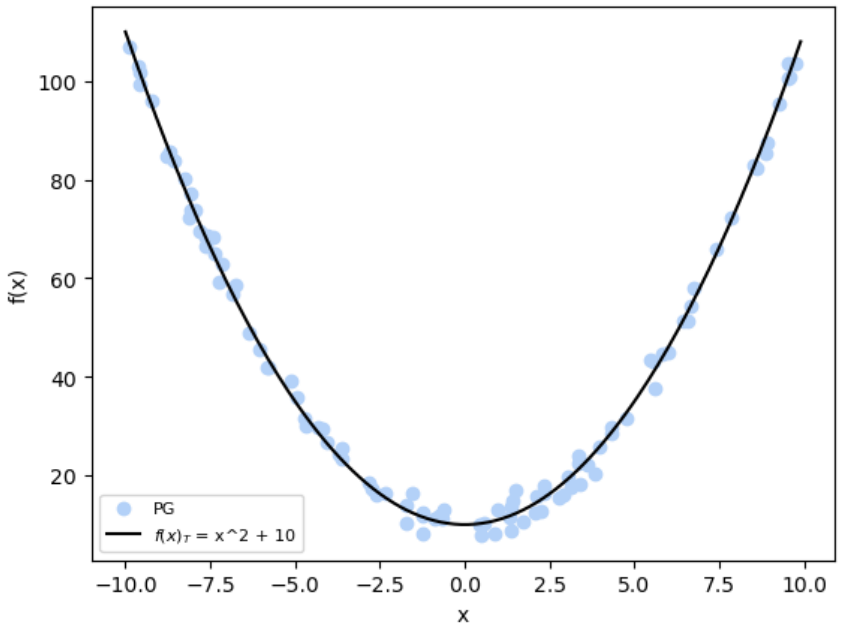


Figura 4.10: Gráfica de la función teórica $x^2 + 10$. Los puntos azules representan el ruido agregado a la función.

Como en el caso anterior, variamos los hiperparámetros de cruce, mutación y parsimonia

para reconstruir la ecuación 4.5. En la tabla 4.4 se encuentran las soluciones obtenidas al variar el cruce de magnitud de 0.7 a 0.00007, manteniendo la mutación y la parsimonia fijas. También se incluye el valor de S^2 para cada función resultante. Las soluciones obtenidas fueron un poco variadas, pues la mayoría de los casos mantuvieron la forma de la función inicial y en todos los casos se mantuvo el grado del polinomio. La mejor solución de este primer caso se obtiene cuando el cruce tiene un valor igual a 0.7. La función correspondiente es $x^2 + 9.88$ y su valor de $S^2 = 0.014$.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.7	0.09	0.01	$x^2 + 9.88$	0.014
$f(x)_2$	0.07			$x^2 + 9.578$	0.178
$f(x)_3$	0.007			$1.051x^2 + 9.309$	4.168
$f(x)_4$	0.0007			$1.157x^2$	44.336
$f(x)_5$	0.00007			$1.162x^2 + 1.307$	35.613

Tabla 4.4: Resultados al ir variando el parámetro cruce 0.7 a en 0.00007 para la ecuación $x^2 + 10$, con un valor de parsimonia y mutación fijos. La mejor solución se encuentra resaltada.

En la figura 4.11 se encuentran las gráficas correspondientes a las funciones obtenidas como solución. Se puede observar que todas las gráficas son similares, ya que tienen la misma forma. Sin embargo, en algunos casos se encuentran desplazadas hacia el origen con respecto a la función original. Por otro lado, en la figura 4.12 se tiene el diagrama de árbol que se obtuvo como la mejor solución.

En la figura 4.13 tenemos una comparación entre la función $f(x)_1$ que fue nuestra mejor solución representada por el color rojo y la función teórica $f(x)_T$ de color negro. Se puede distinguir que la solución obtenida coincide prácticamente en todos los puntos de la función teórica. Lo cual nos indica que este conjunto de datos necesita un mayor cruce o mejor dicho, una mayor diversidad de información entre los padres para poder dar un mejor resultado.

Ahora, en la tabla 4.5 tenemos las soluciones de ir variando el parámetro de parsimonia, de 0.9 en 0.0009, mientras el cruce y mutación los mantuvimos fijos con los mismos valores que en el problema de la línea recta. En este caso, sucedió de manera similar que al correr el código con una parsimonia de magnitud más pequeña, la respuesta generada ya no tenía

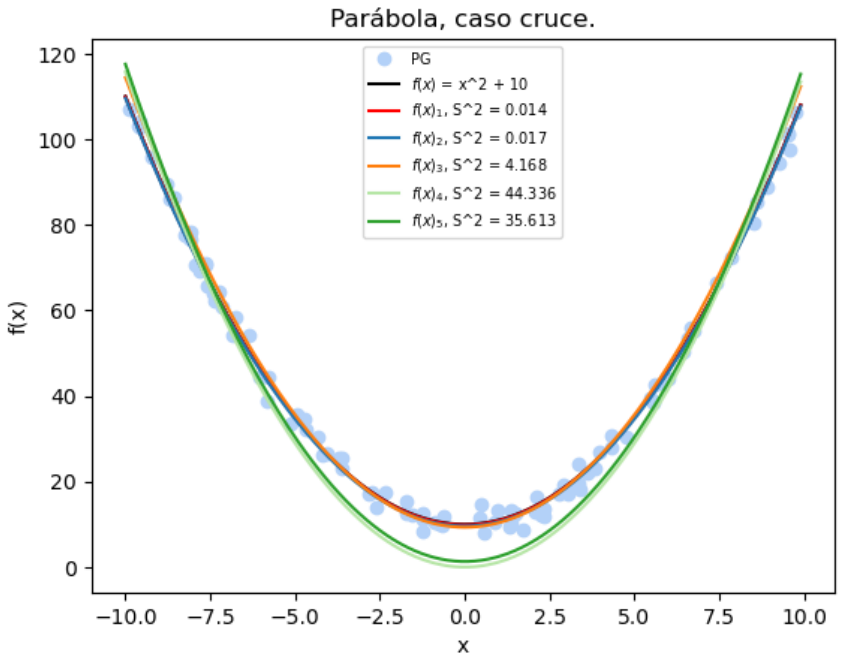


Figura 4.11: En la figura (a) se puede observar la gráfica de las soluciones obtenidas de la tabla 4.4.

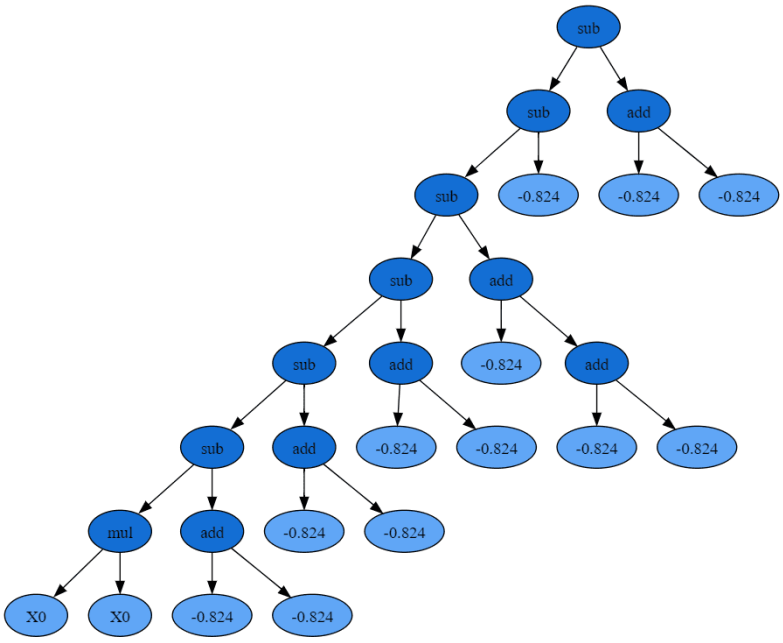
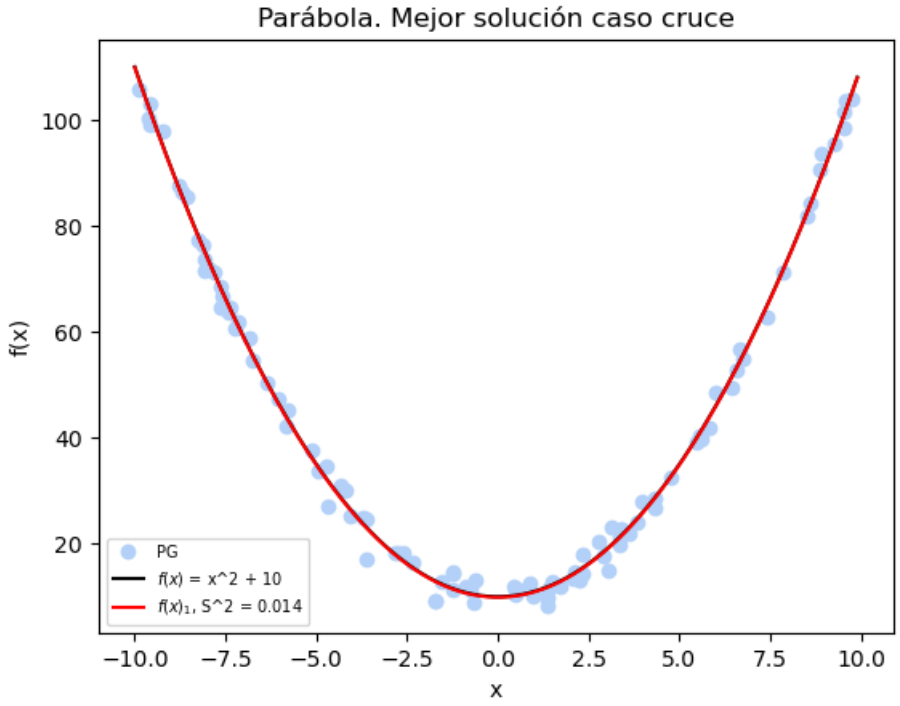


Figura 4.12: En la figura se puede observar la gráfica de las soluciones obtenidas de la tabla 4.4.



(a) Parábola, mejor solución caso cruce.

Figura 4.13: En esta gráfica se tiene a la mejor solución que fue la función $f(x_1$ (roja) y la función teórica $f(x)_T$ (negra).

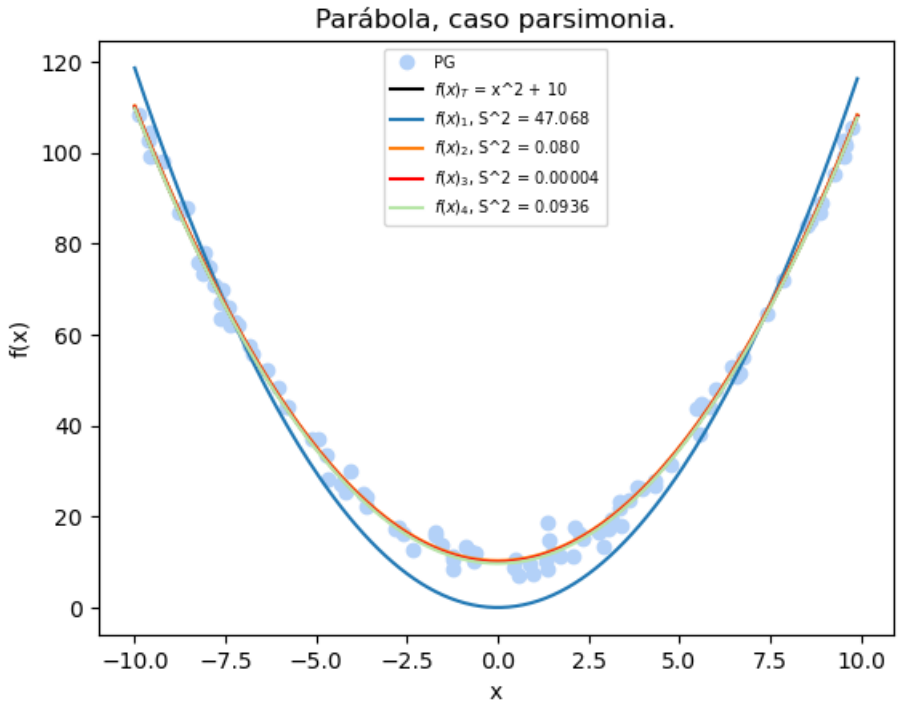


Figura 4.14: En la figura se puede observar la gráfica de las soluciones obtenidas de la tabla 4.5.

similitud con la función original. Las soluciones que tenemos en la tabla 4.5 mantienen el grado de la función original y siguiendo el análisis de S^2 podemos decir que la mejor solución en este caso es cuando la parsimonia tiene un valor igual a 0.009 y da como resultado una función $x^2 + 9.993$ con un error $S^2 = 0.00004$.

En la figura 4.14 se pueden ver las gráficas de las soluciones obtenidas, se distingue que nuevamente las funciones resultantes tienen la misma tendencia y forma, solo en algunos casos hay un poco de desplazamiento hacia al origen, muy similar a las gráficas del caso del cruce. En este caso no se colocó el diagrama de árbol de la mejor solución, ya que como en el caso de la línea recta, al ser una parsimonia pequeña el árbol tiene demasiadas ramificaciones y no se logra obtener por completo la figura del diagrama. En la gráfica de la figura 4.15 se tiene la gráfica de la mejor solución para el caso de la parsimonia. Comparando nuevamente con el caso de la línea recta, la mejor solución otra vez se tuvo con la misma magnitud igual a 0.009.

Por último caso, la mutación de igual modo la fuimos variando de 0.5 a 0.00005 dejando los otros hiperparámetros fijos. Las funciones resultantes las podemos observar en la tabla

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.9	0.05	$1.186x^2$	47.068
$f(x)_2$		0.09		$x^2 + 10.284$	0.080
$f(x)_3$		0.009		$x^2 + 9.993$	0.00004
$f(x)_4$		0.0009		$x^2 + 9.694$	0.093

Tabla 4.5: Resultados obtenidos al variar la parsimonia de 0.9 en 0.0009 y el cruce y mutación fijos para la ecuación de la parábola 4.5. La mejor solución de las pruebas realizadas esta resaltada de color amarillo.

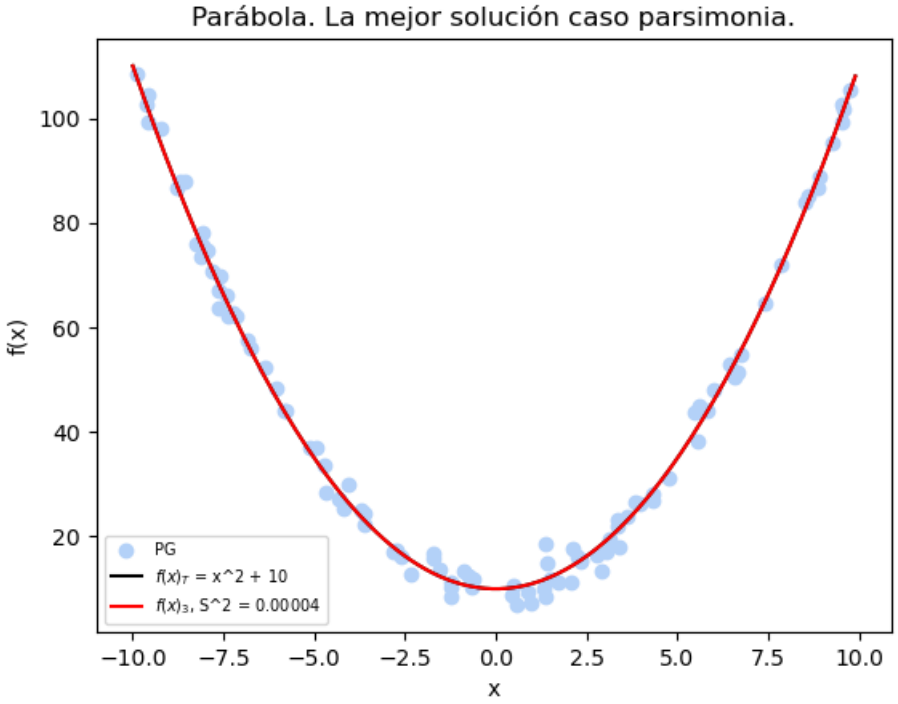


Figura 4.15: Gráfica de la mejor solución obtenida $f(x)_3$ (rojo) con un error del $S^2 = 0.00004$ y de la función teórica $f(x)_T$ (negra).

4.6 y sus gráficas correspondientes en la figura 4.16.

En este caso, cuando la mutación es igual a 0.005 tenemos a la mejor solución, con la función $x^2 + 10.9.911$ y $S^2 = 0.0079$. En la figura 4.16 (a) se tienen las gráficas de las soluciones y en la figura 4.17 se encuentra el diagrama de árbol para la mejor solución.

Analizando las tres mejores soluciones que obtuvimos para la parábola, podemos afirmar que el valor más pequeño de S^2 se obtiene cuando la parsimonia tiene un valor igual a 0.009. Esto nos indica que este conjunto de datos necesita una búsqueda un poco más profunda entre las soluciones para poder obtener el mejor resultado que se aproxime a la

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.09	0.5	$1.1x^2 + 5.529$	11.329
$f(x)_2$			0.05	$x^2 + 9.94$	13.516
$f(x)_3$			0.005	$x^2 + 9.911$	0.0079
$f(x)_4$			0.0005	$1.172x^2$	45.292
$f(x)_5$			0.00005	$1.08x^2 + 7.129$	6.840

Tabla 4.6: Resultados obtenidos al variar la mutación de 0.5 a 0.00005 con el cruce igual a 0.1 y parsimonia igual a 0.09. La mejor solución se encuentra resaltada.

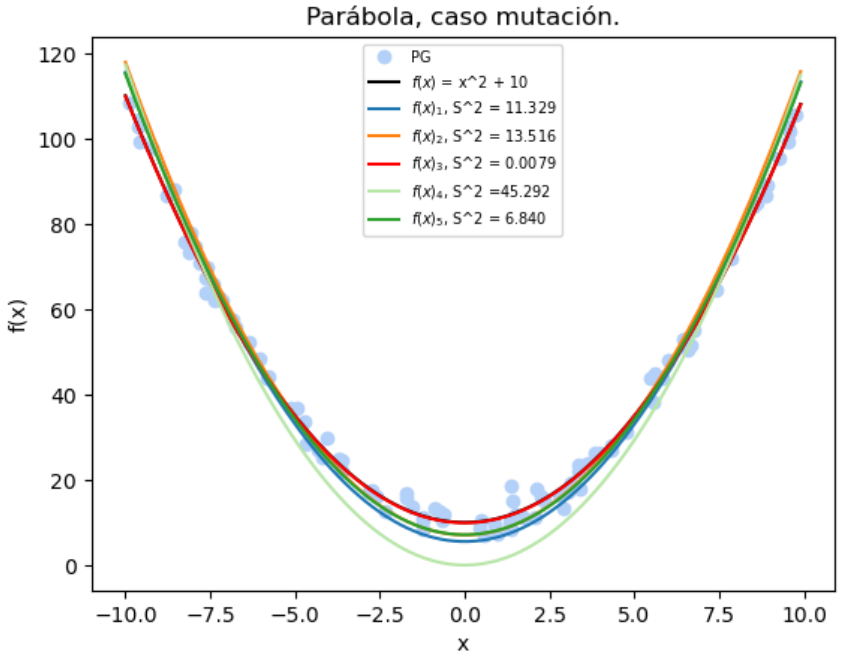


Figura 4.16: En la figura se puede observar la gráfica de las soluciones obtenidas de la tabla 4.4.

función teórica 4.5.

Al comparar los resultados de la línea recta con respecto a la magnitud en este caso de una función cuadrática, se observó que las mismas magnitudes fueron útiles para resolver el segundo caso de reconstrucción de la ecuación de una parábola. Esto puede deberse a que los datos que estamos utilizando tienen una forma simple.

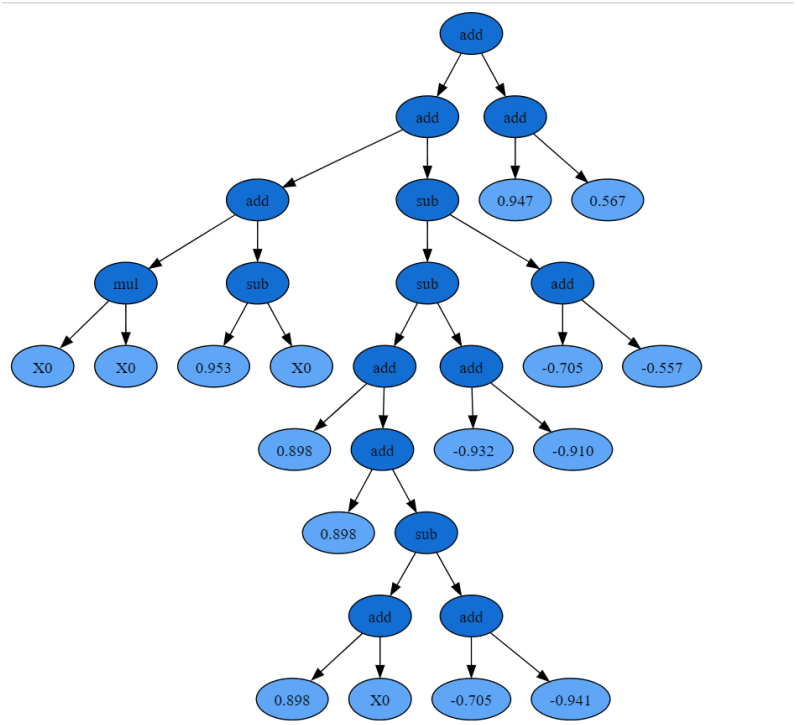


Figura 4.17: Se tiene el diagrama de árbol para la mejor solución que es cuando la mutación vale 0.04, al resolverlo nos da la función $x^2 + 10.029$, con un valor $S^2 = 0.00008$.

4.3. Función Trigonométrica

La función trigonométrica que reconstruiremos es de la forma :

$$f(x) = \sin^2(x). \tag{4.7}$$

y a esta función se le agregó el siguiente ruido,

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{\epsilon[-2, 2]}{20} \tag{4.8}$$

En la figura 4.18 se muestra la gráfica de la función junto con el ruido agregado, representado por los puntos azules. Los puntos se observan muy poco dispersos con respecto a la función original (línea negra), solo en algunas zonas como las partes máximas y mínimas de la función, donde se observan más puntos encimados o dispersos. Esto indica que en esas zonas hay más ruido.

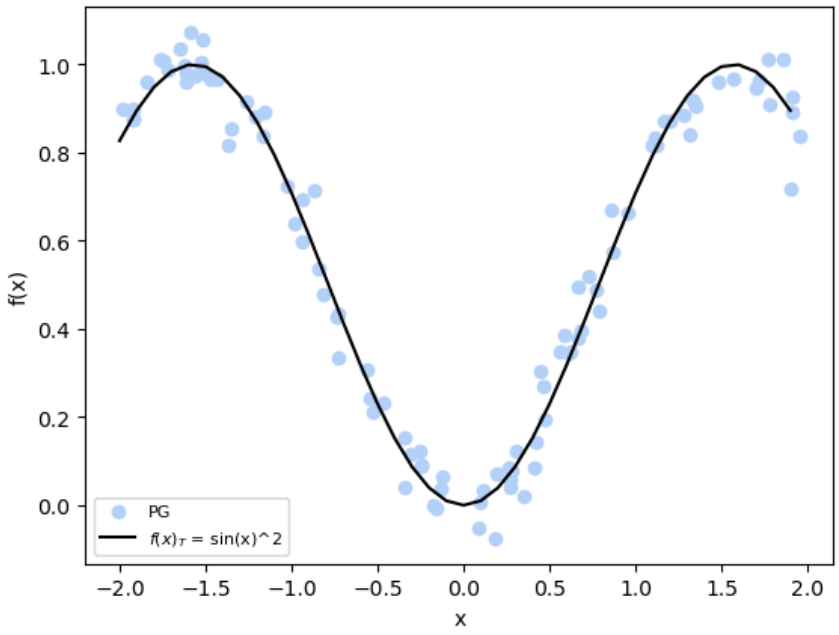


Figura 4.18: En esta figura se tiene la gráfica de la función $f(x) = \sin^2(x)$. El ruido se representa por los puntos azules.

Como en los casos anteriores, variamos el cruce, la mutación y la parsimonia para encontrar la mejor solución de la función en función de la magnitud del parámetro. Man-

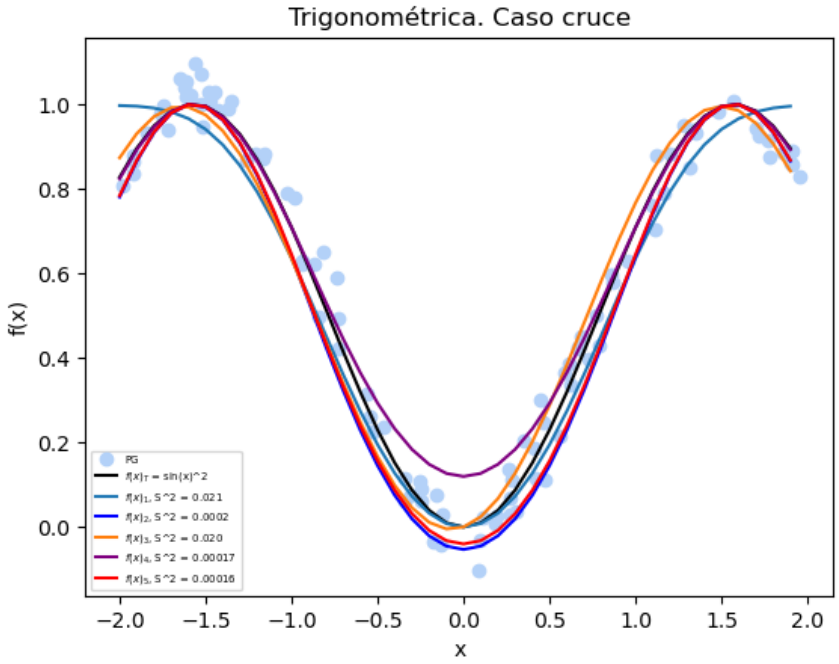


Figura 4.19: En la figura (a) se pueden observar las soluciones obtenidas al variar el cruce para la función $\sin^2(x)$.

tuvimos el mismo número de individuos en la población (1000) y el mismo número de generaciones (30). Al ejecutar el código variando el cruce de 0.7 a 0.00007 y dejando fijos los valores de la mutación y la parsimonia, los resultados fueron bastante buenos, como en los casos anteriores. Los resultados se pueden observar en la tabla 4.7 y las gráficas en la figura 4.19. En la figura 4.20 se encuentra el diagrama de árbol que se obtuvo como la mejor solución para este caso, que se obtiene cuando el cruce tiene un valor de 0.00007 con un valor de $S^2 = 0.00016$. Esto significa que este caso necesita un cruce muy pequeño. Cuando el cruce es muy pequeño, hay muy pocos cambios de genes entre los padres.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.7	0.09	0.01	$\sin(0.818x\sin(x))$	0.021
$f(x)_2$	0.07			$\cos(1.624x\cos(x))$	0.0002
$f(x)_3$	0.007			$\sin(x+0.145)\sin(x)$	0.020
$f(x)_4$	0.0007			$\cos(1.451(\cos(x)))$	0.00017
$f(x)_5$	0.00007			$\cos(1.611\cos(x))$	0.00016

Tabla 4.7: Resultados al variar el cruce de 0.7 a 0.00007 para la ecuación $f(x) = \sin^2(x)$, con un valor de parsimonia y mutación fijos. Con una población de 1000 individuos y 30 generaciones. La mejor solución se encuentra resaltada.

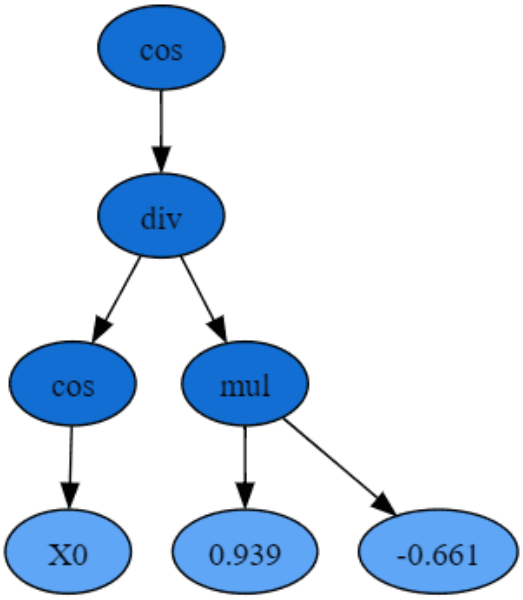


Figura 4.20: Se tiene el diagrama de árbol de la mejor solución, al resolverlo nos da $f(x)_5 = \cos(1.611\cos(x))$ con $S^2 = 0.00016$.

Podemos comparar la mejor solución con la ecuación teórica en la figura 4.21. Se puede notar que la función solución $f(x)_5$ (curva roja) no coincide exactamente en todos los puntos de la función teórica (curva negra), sino solo un poco en los máximos, pero aun así la función reconstruida sigue la forma de la función original.

Posteriormente, variamos el parámetro de parsimonia. Sin embargo, en este caso, el número de generaciones que habíamos establecido no fue adecuado para la resolución del problema. Al ejecutar el código, la solución se estancaba y generaba un número constante o simplemente me mostraba la función original. Esto significa que eran muy pocas generaciones y no había suficiente información genética para encontrar una solución al problema. Dado esto, se decidió aumentar las generaciones a 50. Nuevamente, seguimos el procedimiento de ir variando la magnitud de la parsimonia de 0.9 a 0.00009. Las soluciones se encuentran en la tabla 4.8 y las gráficas de dichas soluciones en la figura 4.22. Se puede observar que todas las soluciones tienen la misma tendencia, solo que algunas están desplazadas respecto al origen. La mejor solución para este caso es cuando la parsimonia tiene una magnitud igual a 0.00009 con $S^2 = 0.016$, con una solución de la forma $f(x)_5 = \sin(0.7x\sin(x))$. La mejor solución la tenemos en la figura 4.23, en este caso las

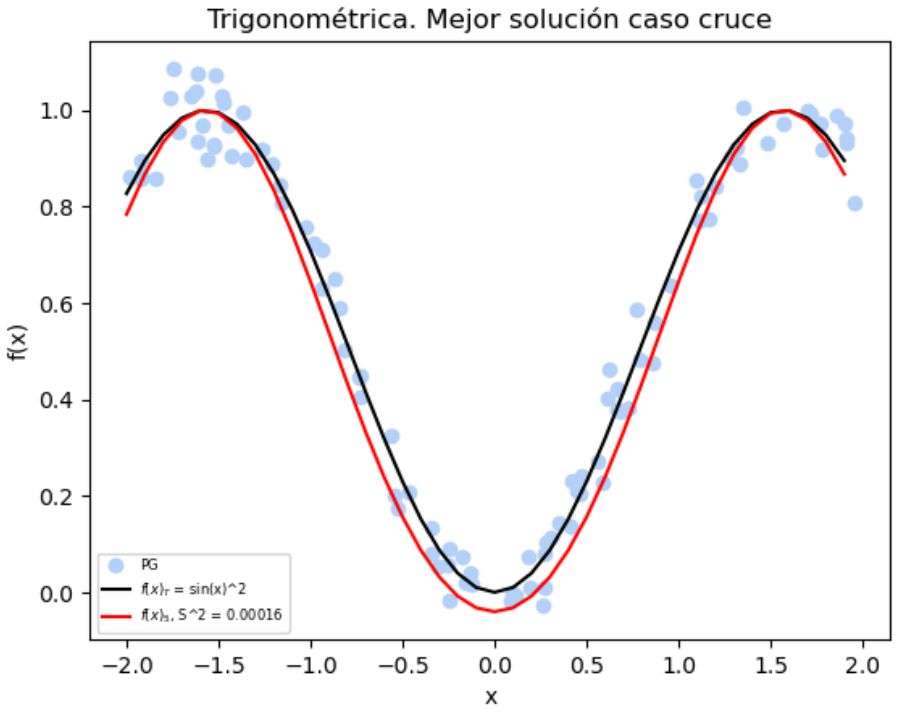


Figura 4.21: Gráfica de la mejor solución $f(x)_5$ (roja) y la función teórica $f(x)_t$ (negra).

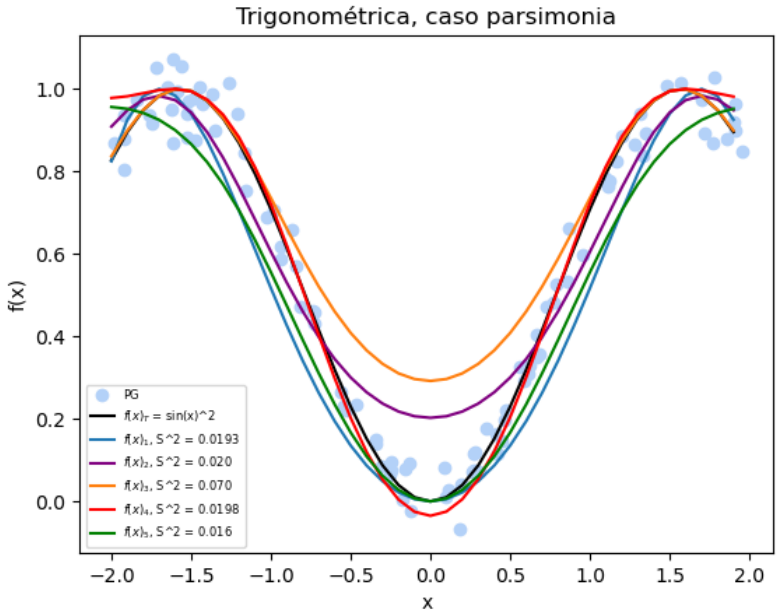
gráficas coinciden en el mínimo de la función.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.9	0.05	$\sin(0.543x^2)$	0.0193
$f(x)_2$		0.09		$\cos(\cos(x)+0.262)*\cos(\sin(\cos(x)))$	0.020
$f(x)_3$		0.009		$\cos^2(\cos(x))$	0.070
$f(x)_4$		0.0009		$\sin((x+0.002)\sin(x)-0.035)$	0.0198
$f(x)_5$		0.00009		$\sin(0.7x\sin(x))$	0.016

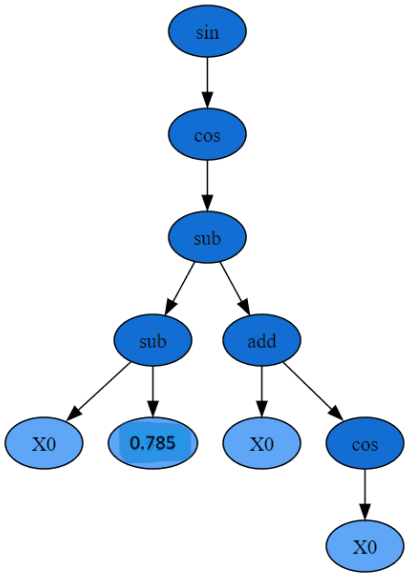
Tabla 4.8: Resultados obtenidos al variar la magnitud de la parsimonia de 0.9 a 0.00009 con el cruce y mutación fijos. La mejor solución se encuentra resaltada.

En este problema, nuestro código sí pudo calcular o encontrar una solución con una parsimonia igual a 0.00009, caso que con la línea recta y la parábola no se encontró, lo que nos indica que los datos de este problema son más complejos.

Para concluir, realizamos el análisis del caso de la mutación, variando su valor de 0.5 a 0.00005. Los resultados se encuentran en la tabla 4.9, y la mejor solución se obtuvo cuando la mutación tiene un valor de 0.5, con un valor de S^2 =0.0001. Las gráficas que



(a) Trigonométrica. Caso parsimonia.



(b) Diagrama de árbol.

Figura 4.22: En la figura (a) se pueden observar las soluciones obtenidas al variar la parsimonia para la función $f(x)_T = \sin^2(x)$. En la figura (b) se tiene el diagrama de árbol de la mejor solución $f(x)_5 = \sin(0.7x \sin(x))$.

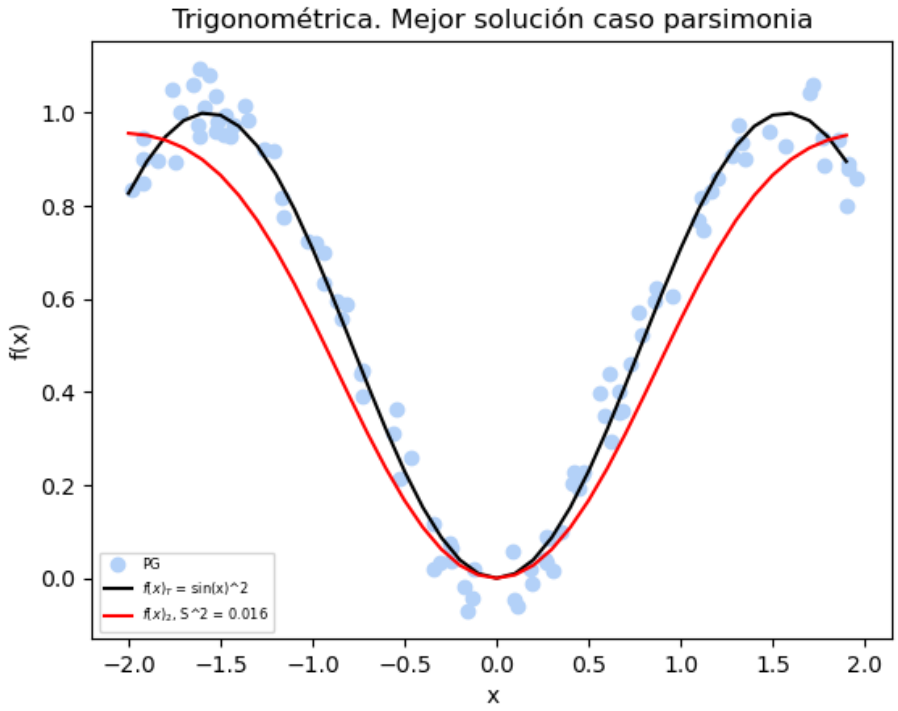


Figura 4.23: Gráfica de la mejor solución $f(x)_5$ (roja) y la función teórica $f(x)_T$.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	S^2
$f(x)_1$	0.1	0.09	0.5	$0.893\sin(x) * \sin(x + 0.027)$	0.0001
$f(x)_2$			0.05	$\sin((x - 0.07) * \sin(x))$	0.020
$f(x)_3$			0.005	$(\sin(0.702x^2)$	0.030
$f(x)_4$			0.0005	$\sin(\sin(x)^2)$	0.0002
$f(x)_5$			0.00005	$\sin((1.3711 - \cos(x))(\cos(\cos\sin(x)))$	1

Tabla 4.9: Resultados obtenidos al variar la mutación de 0.5 a 0.00005 con el cruce igual a 0.1 y parsimonia 0.09.

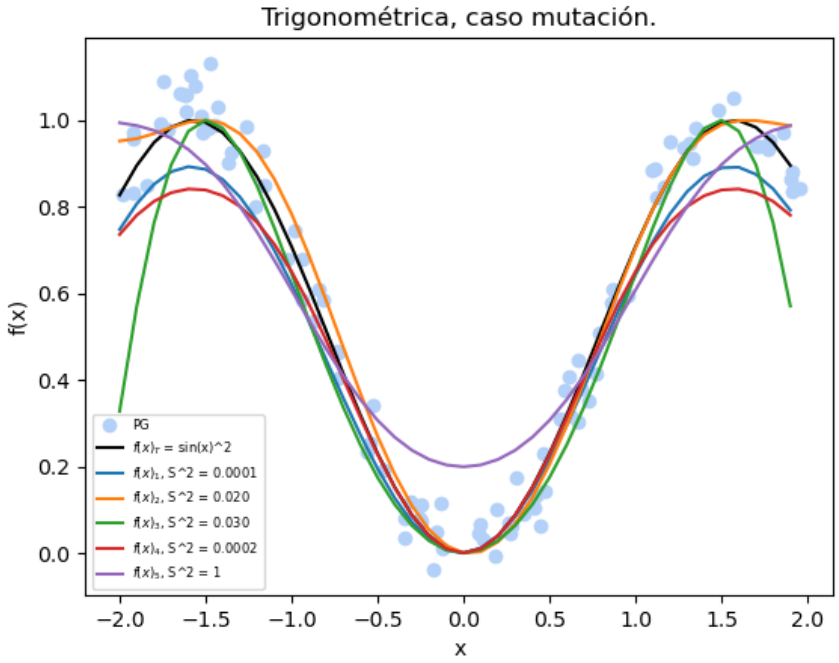


Figura 4.24: En la figura se pueden observar las soluciones obtenidas al variar la mutación para la función $f(x)_T = \sin^2(x)$.

corresponden a las soluciones de la mutación se encuentran en la figura 4.24 y en la figura 4.25 se muestra el diagrama de árbol. En este caso, el tamaño de la mutación que elegimos como la mejor es grande, lo que revela que la forma de los datos necesita más datos aleatorios para poder generar nueva información genética y así tener la información genética necesaria para encontrar la mejor solución.

La gráfica de la mejor solución comparada con la función teórica se observa en 4.26 y las curvas nuevamente coinciden en el mínimo y en los máximos se encuentran más dispersos los datos.

Comparando este resultado con los dos casos anteriores (recta y parábola) se puede

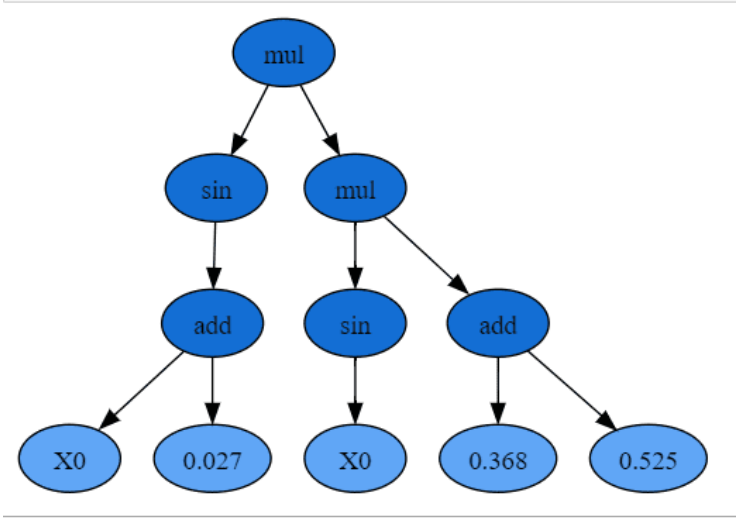


Figura 4.25: Se tiene el diagrama de árbol de la mejor solución el cual se lee $f(x)_1 = 0.893\sin(x) * \sin(x + 0.027)$ con $S^2 = 0.0001$.

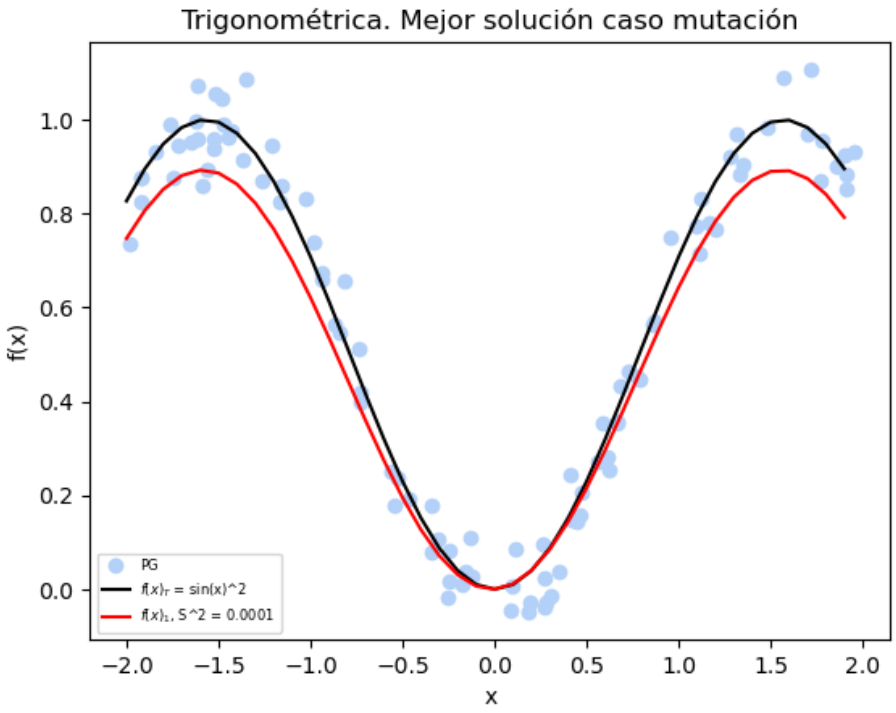


Figura 4.26: Gráfica de la mejor solución $f(x)_1$ (roja) y de la función teórica (negra).

decir que los datos de este problema tienen una forma más compleja y por esta razón necesitan una mayor precisión en la información genética, es decir un cruce pequeño en donde no haya tantos cambios aleatorios entre los padres, una mutación grande para poder producir una información aleatoria nueva para cada individuo y una exploración entre las

soluciones más profunda para poder encontrar al mejor resultado y no únicamente al resultado más sencillo. Con estas pruebas realizadas, puedo afirmar que el método de programación genética sí puede reconstruir funciones y que dependiendo la forma sencilla o compleja de los datos existirá un valor para los operadores genéticos con el cual se pueda encontrar la reconstrucción de los datos.

4.4. Dos variables

En los casos anteriores, utilicé funciones que dependían de una sola variable, es decir, $f(x)$ con lo cual pude afirmar que el método de programación genética efectivamente reconstruía las funciones dadas. Ahora, se busca comprobar si se tiene la misma efectividad para una función que dependa de dos variables, es decir: $f(x, y)$.

La función designada para reconstruir es la siguiente:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + y - 1, \tag{4.9}$$

esta ecuación representa a una superficie con la forma de un paraboloide hiperbólico, como se muestra en la figura 4.27 (superficie negra) y el ruido agregado son los puntos azules usando lo concluido de los casos anteriores respecto a los operadores genéticos, la función con ruido agregado queda de la forma:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + y - 1 + (a * \epsilon), \tag{4.10}$$

con $\epsilon \in$ [-1,1] y $a = 2$.

Los parámetros que se utilizaron son los siguientes 4.10:

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida
$f(x, y)_R$	0.7	0.001	0.04	$f_R(x, y) = y - (-x + y)(x + y)$+0.99

Tabla 4.10: Resultados de la mejor solución para los datos de la figura 4.27

con una población = 100 individuos y generaciones= 20.

La función resultante fue:

$$f(x, y)_R = y - (-x + y)(x + y) + 0.99, \tag{4.11}$$

con un valor de $S_x^2 = -1.569$ y $S_y^2 = 0.559$.

La solución gráfica la podemos ver en la siguiente figura 4.29 y el diagrama de árbol en en la figura 4.28.

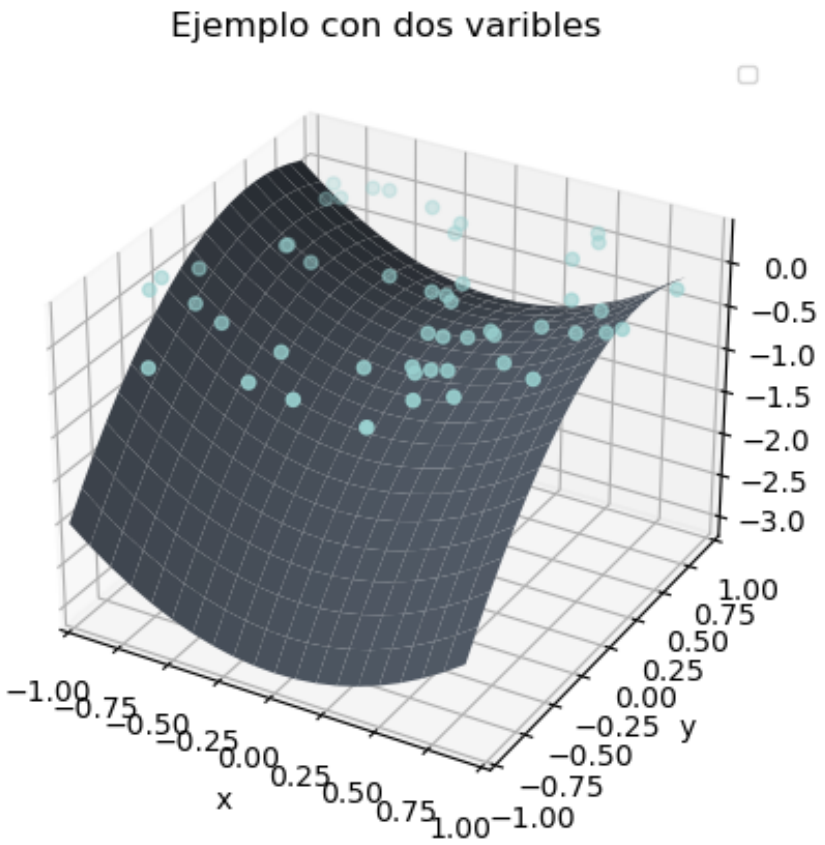


Figura 4.27: Superficie de la función 4.9

En este caso, el conjunto de datos utilizó magnitudes para los parámetros similares a los de la línea recta y la parábola, lo que indica que el conjunto de datos no es muy complejo. Sin embargo, el tamaño de la población se tuvo que disminuir, al igual que el número de generaciones, para que el espacio de búsqueda no se expandiera tanto entre los datos. Esto se debe a que al tener tamaños más grandes para estos parámetros, las soluciones que se encontraban tenían formas y grados que se alejaban mucho de la forma original.

Después de haber realizado estas pruebas, se puede afirmar que la programación genética puede reconstruir funciones, independientemente del tipo de datos, ya sean muchos o pocos, y de la forma que tengan (conocida o no). El código nos puede mostrar soluciones que se asemejan al mejor resultado; sin embargo, para encontrar la mejor solución, es necesario manipular el valor de los hiperparámetros y, de este modo, ir eligiendo el tamaño para encontrar la mejor solución que satisfaga nuestro problema.

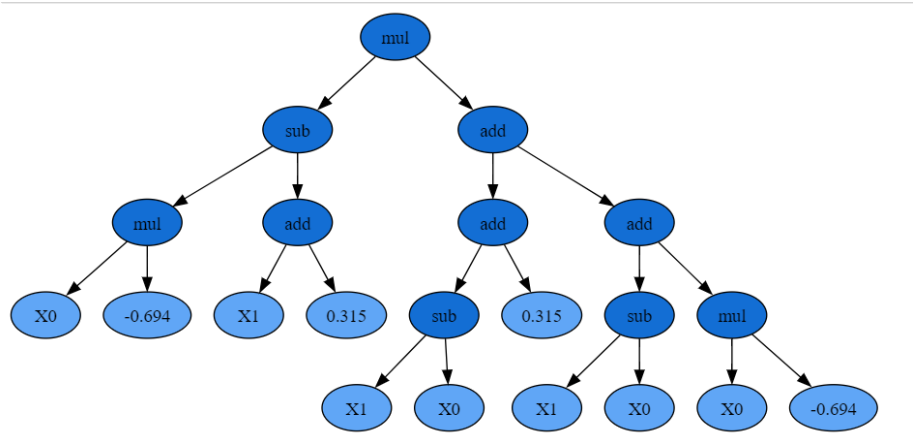


Figura 4.28: Diagrama de árbol obtenido como solución al problema, al resolverlo la ecuación nos da: $f_R(x, y) = y - (-x + y)(x + y)+0.99$

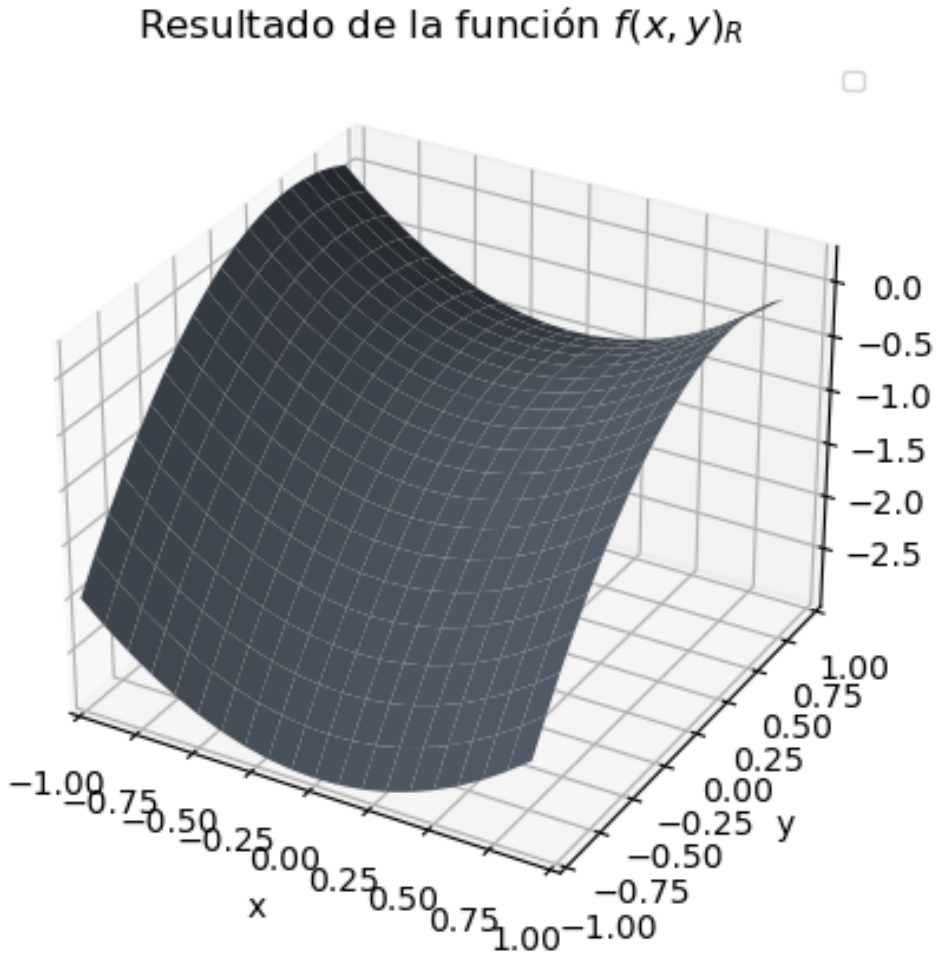


Figura 4.29: En esta figura tenemos la reconstrucción de la superficie 4.9 con el resultado $f_R(x, y) = y - (-x + y)(x + y)+0.99$

Capítulo 5

Reconstrucciones

5.1. Cronómetros Cósmicos

Después de las pruebas realizadas con las funciones matemáticas, se aplicó el método de programación genética a un conjunto de datos cosmológicos observacionales. El objetivo es reconstruir el parámetro de Hubble $H(z)$ construyendo datos y analizando su forma. Se utilizará el parámetro χ^2 para medir si el resultado es aceptable como la mejor solución al problema.

Recordemos que en el capítulo 1, vimos que el parámetro $H(z)$ se define como:

$$H(z)^2 = H_0^2(\Omega_{M,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}), \tag{5.1}$$

en donde $H_0 = 70km^{-1}Mpc^{-1}$, $\Omega_{M,0} = 0.3$ y $\Omega_{\Lambda,0} = 0.7$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación 5.1,

$$H(z)^2 = (70km^{-1}Mpc^{-1})^2((0.3)(1+z)^3 + (0.7)), \tag{5.2}$$

esta ecuación es la que buscamos reconstruir para encontrar la forma de $H(z)$.

Al realizar la gráfica de esta función teórica con respecto a los datos observacionales podemos notar cuál es la tendencia de los datos en la figura 5.1.

Los datos que utilizamos corresponden a los cronómetros cósmicos mencionados en el

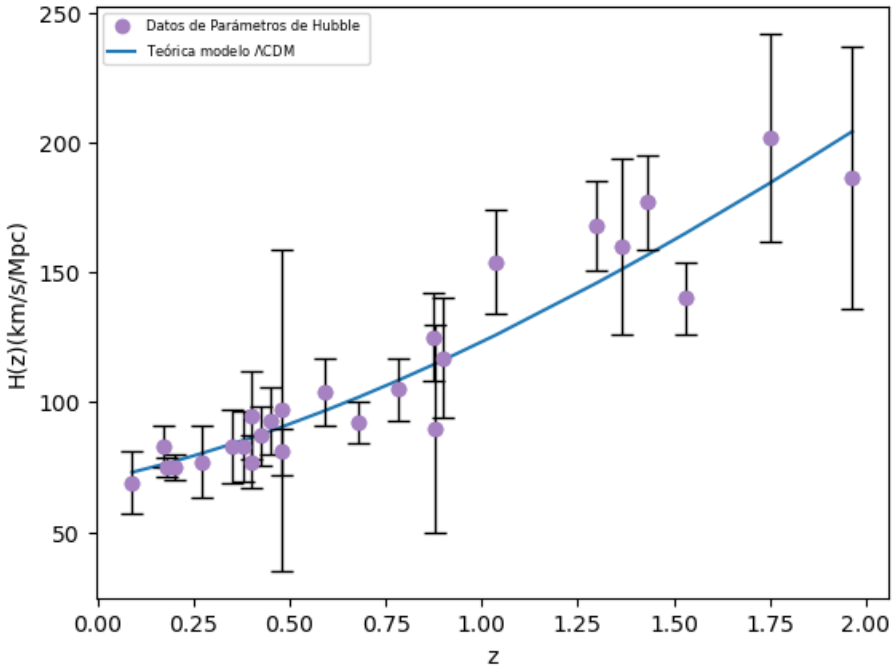


Figura 5.1: La gráfica azul representa a la ecuación teórica 5.1 con lo valores $H_0 = 70$,$\Omega_M = 0.3$ y $\Omega_\Lambda = 0.7$. Los puntos morados representan los datos observacionales asociados al parámetro de Hubble.

capítulo 2. En nuestro código, estos datos tomaron la parte de los números aleatorios y se les aplicaron los parámetros de población, generaciones, cruce, mutación y parsimonia. Al igual que en nuestras pruebas del capítulo 4, el tamaño de la población y el número de generaciones tuvieron un valor fijo de 1000 y 40, respectivamente, mientras que el cruce, la mutación y la parsimonia los estuvimos variando.

Para evaluar que tan bueno es una resultado, utilizaremos la prueba de χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{H_T - H_G}{\sigma})^2, \tag{5.3}$$

siendo H_T los datos teóricos, H_G los datos reconstruidos y σ la varianza.

La prueba de chi-cuadrado (χ^2) en cosmología se utiliza para comparar las observaciones con las predicciones teóricas o los modelos sugeridos. Se basa en comparar la diferencia entre los valores observados y los valores esperados según un modelo, calculando una medida de cuán bien se ajustan estos valores. Se calcula la suma de los cuadrados de las diferencias normalizadas entre los datos observados y los valores predichos por el modelo,

dividida por las varianzas esperadas para cada punto.

Para empezar a trabajar con nuestros datos, podemos observar en la figura 5.1 que la forma de los datos podría tender a una curva. Por lo cual, utilizaremos los mejores resultados obtenidos del caso de la parábola. Establecimos una población de 100 individuos y 150 generaciones. Tomando como referencia las magnitudes para la parsimonia, la mutación y el cruce, partiremos de esos valores para encontrar una solución. En la tabla 5.1, se muestra el resultado.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	χ^2
$HR(z)$	0.8	0.009	0.04	$12z^2 + 55.418z + 67.72$	18.704

Tabla 5.1: Resultados de la mejor solución para los datos de la figura 5.1

	$H(z)$
$\chi^2_{\Lambda CDM}$	14.838
$\chi^2_{H,R}$	18.704

Tabla 5.2: Resultados de la prueba χ^2 para la función teórica ($\chi^2_{\Lambda CDM}$) y la función reconstruida (χ^2_R) utilizando los datos observacionales.

En la tabla 5.5 se muestran los valores calculados de la prueba χ^2 tanto para el modelo teórico ΛCDM como para el modelo reconstruido. Al comparar ambos resultados, podemos observar que hay una gran diferencia de magnitud.

Los datos en esta ocasión presentan una forma sencilla, pero que requiere un cruce grande, una mutación con intercambio aleatorio de información y un valor de parsimonia que no implique una exploración profunda entre los datos. Esto indica que la forma de los datos no es tan compleja. Sin embargo, al ser un conjunto de solo 26 datos, requieren un mayor intercambio genético, por lo que los valores de cruce y mutación son relativamente grandes.

Por lo tanto, nuestra función es de la forma:

$$HR(z) = 12z^2 + 55.418z + 67.72, \tag{5.4}$$

Al factorizar nos queda:

$$HR(z) = 67.72((1+z)(0.177z + 0.818)), \tag{5.5}$$

y elevando al cuadrado:

$$HR(z)^2 = 67.72^2[(1+z)(0.177z + 0.818)]^2, \tag{5.6}$$

$$= 67.72^2[(1+z)^2(0.177z + 0.818)^2], \tag{5.7}$$

$$= 67.72^2[(1+z)^2(0.028z^2 + 0.28z + 0.67)], \tag{5.8}$$

así la ecuación nos queda de la forma:

$$HR(z)^2 = H_0^2[(1+z)^2(cz^2 + bz + a)], \tag{5.9}$$

en donde $a = 0.67$, $b = 0.28$ y $c = 0.028$.

La ecuación que obtuvimos 5.9 la podemos comparar con nuestra ecuación teórica 5.1. Así en nuestra reconstrucción tenemos que $HR_0 = 67.72$. De igual modo al sumar el término independiente y el termino lineal, nos queda:

$$0.28 + 0.67 = 0.95 \approx 1, \tag{5.10}$$

y recordando que la teoría menciona,

$$\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1, \tag{5.11}$$

entonces nuestros términos hallados cumplen con lo mencionado antes, así concluimos que nuestros valores reconstruidos corresponden a $\Omega R_{M,0} = 0.28$ y $\Omega R_{\Lambda,0} = 0.67$.
Nuestros resultados obtenidos los podemos comparar con la literatura [12], en este trabajo se encontró que $H(z)$ es de la siguiente forma,

$$H(z) = H_0((1+z)(a + bz - cz^3)^2), \tag{5.12}$$

con $a = 0.65$, $b = 0.22$ y $c = 0.017$.

Ahora, comparando con esta otra literatura [50], aquí los valores que se hallaron son los siguientes: $H_0 = 68.365$, $\Omega_{M,0}$ =0.319 y $\Omega_{\Lambda,0} = 0.68$.

La forma de $HR(z)$ 5.6 no alcanzó un término cúbico, esto puede deberse a que haya perdida de información cuando los valores de z son muy bajos. Sin embargo, los valores $\Omega R_{M,0}$ y $\Omega R_{\Lambda,0}$ quedaron con la misma magnitud de los valores que se presentan en las referencias mencionadas.

Se puede considerar que el modelo obtenido para la forma de H en él modelo ΛCDM, es satisfactorio y funcional porque cumple con las condiciones teóricas de la suma de $\Omega R_{M,0}$ y $\Omega R_{\Lambda,0}$. También el valor encontrado de la constante de Hubble (H_0) es un valor que entra en el rango que manejan diversas referencias en las que nos hemos basado ([21; 26; 29; 33]).

En la figura 5.2 podemos observar las gráficas de la función reconstruida $HR(z)$ y él modelo teórico de ΛCDM, nuestra curva tiene la misma tendencia que el modelo teórico. En esta ocasión no pusimos el diagrama de árbol resultante, ya que fue muy grande y no fue posible ponerlo en el texto.

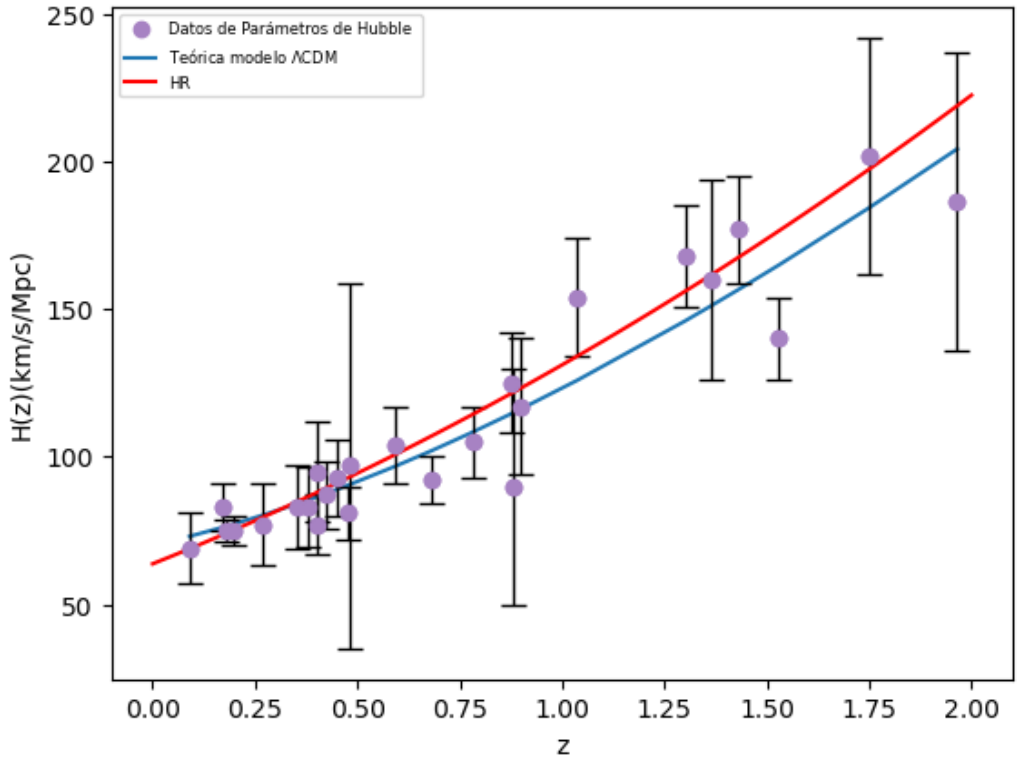


Figura 5.2: En esta figura tenemos la gráfica de la solución que obtuvimos ($HR = 12z^2 + 55.418z + 67.72$) junto con la gráfica del modelo teórico (ΛCDM).

5.2. Supernovas

En el segundo caso, utilizaremos datos de Supernovas Tipo Ia. La gráfica de dichos datos se muestra en la figura 5.3. En la figura 5.4, se presentan los datos en el plano $log(z)$ vs el módulo de distancia (μ) para facilitar la búsqueda de la solución. Al realizar el cambio de plano, se observó que los datos tienen forma de una línea recta. Por lo tanto, podemos utilizar los mejores valores obtenidos previamente en el capítulo 4. Sin embargo, en este caso, fue necesario disminuir el tamaño de la población a 300 individuos y 600 generaciones. Esto se debe a que, con los valores iniciales, las soluciones obtenidas contenían bastantes términos que se alejaban gráficamente de la figura deseada. Tras realizar este ajuste en la población y las generaciones, la solución se estancaba en una constante. Por ello, se decidió disminuir el valor de la parsimonia para permitir una mejor exploración de las soluciones. En la tabla 5.3 se presentan los valores de los parámetros utilizados y la función resultante.

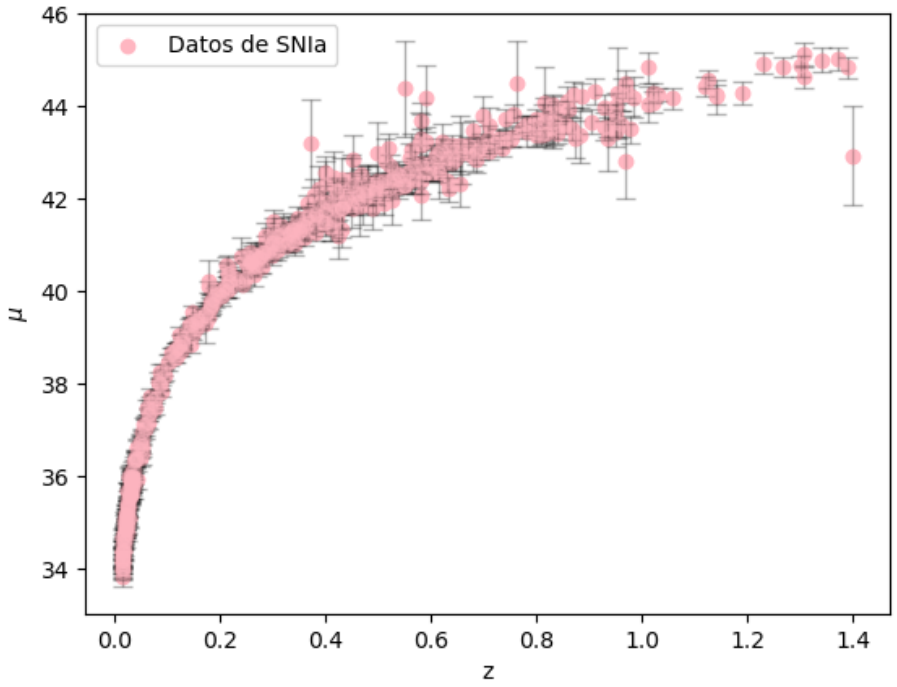


Figura 5.3: En la figura se tienen datos de un conjunto de Supernovas Tipo Ia.

El valor de la parsimonia tuvo que disminuirse en magnitud, lo que nos indica que la forma de los datos es compleja. El tamaño de la población también influye en este caso, ya que los datos que tenemos son muchos en comparación con los que se utilizaban

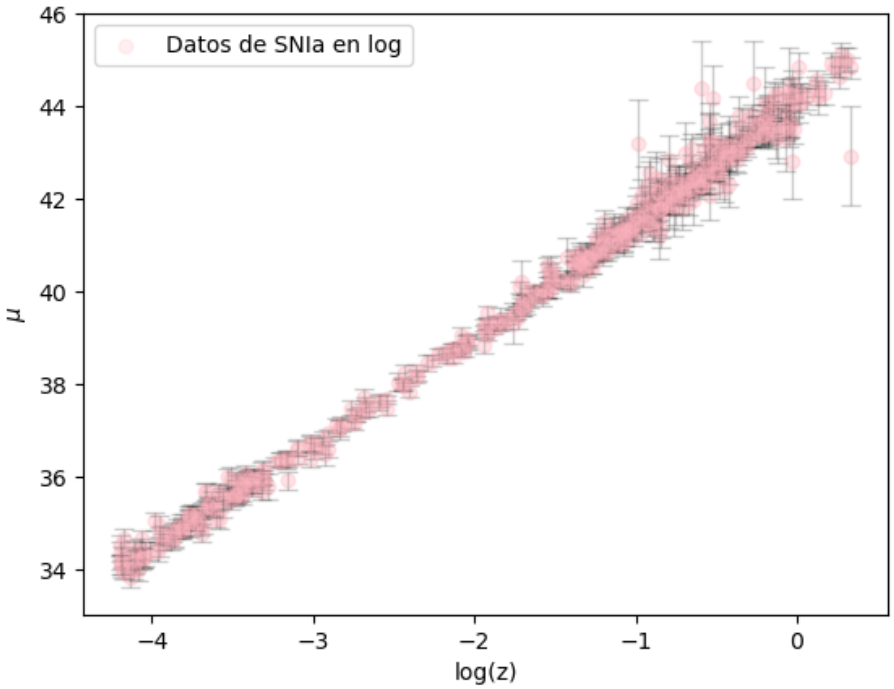


Figura 5.4: Datos de Supernovas Tipo Ia en el plano $log(z)$ vs el módulo de distancia (μ).

en las pruebas. Por lo tanto, para realizar la búsqueda de la solución no se necesita una población tan grande, pero sí es necesario que haya bastantes generaciones para realizar un mayor número de iteraciones entre los individuos y evitar que el algoritmo se detenga prematuramente antes de encontrar la mejor solución.

Función	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	χ^2
μR	0.8	0.0001	0.04	$2.397z + 43.865$	432.45

Tabla 5.3: Resultado obtenido para los datos de Supernovas.

En la figura 5.5 se tiene la gráfica de la solución que obtuvimos, el diagrama de árbol no fue posible colocarlo por el tamaño con el que resulto.
Entonces ahora podemos comparar nuestro resultado con la ecuación teórica 5.13,

$$\mu = 5logD_L(z) + \mu_0, \tag{5.13}$$

mientras que nuestra ecuación resultante es,

$$\mu R = 2.397z + 43.865, \tag{5.14}$$

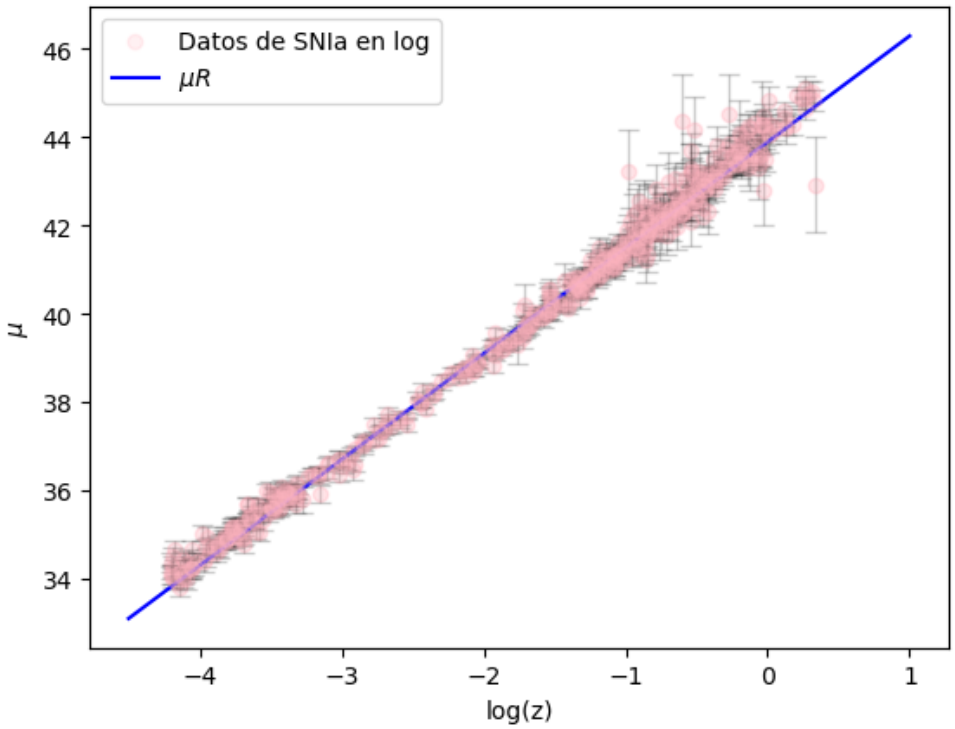


Figura 5.5: Mejor solución obtenida para los datos de Supernovas Tipo Ia.

y tendríamos que $\mu_0 = 43.865$, en la literatura [55] el valor que obtienen de $\mu_0 = 42.38$, nuestro resultado entra en el orden de magnitud que manejan en la literatura, por lo cual puede ser aceptable y así nuestro modelo encontrado por el método de programación genética si es una posible solución a la forma de los datos observacionales.

5.3. Parametrización

Realizamos un tercer caso, tomamos 20 datos del artículo [48] que corresponden a observaciones cosmológicas (SNIa,BAO,H(z)). Estos 20 datos son una propuesta de parametrización libre, es decir, que no se está asumiendo que tengan una forma en particular. Se tiene como deseo encontrar como es el comportamiento de estos datos y si se ajustan a una ecuación de estado $\omega(z)$. En la figura 5.6, se observan de color verde los datos propuestos de la parametrización libre.

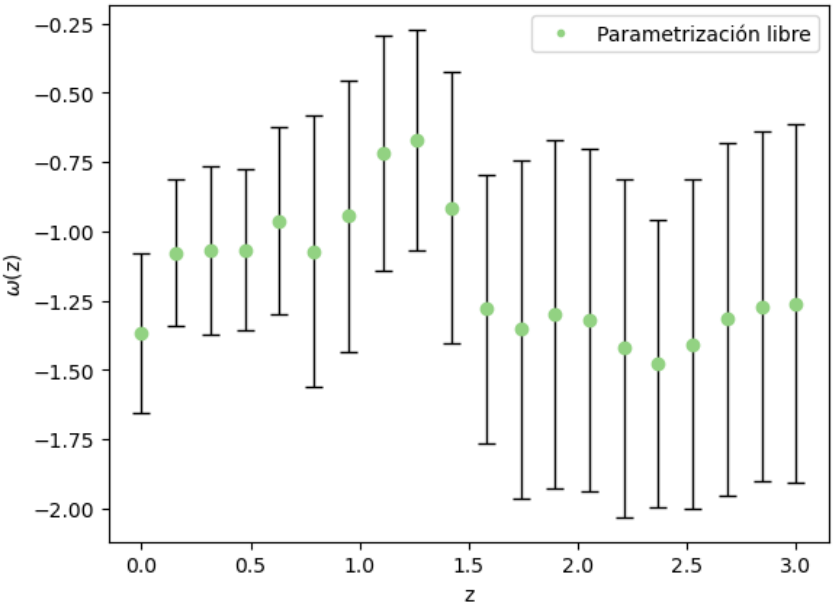


Figura 5.6: Datos tomados de [48].

Para trabajar con los datos, tomamos los resultados de las mejores soluciones del caso de la función trigonométrica. Esto se debe a que la forma de los datos que se observan en la figura puede asemejarse a la de funciones trigonométricas como $\sin(x)$ y/o $\cos(x)$.

Para buscar la solución a este conjunto de datos, tomamos en cuenta que solo se trata de 20 valores. Por lo tanto, el tamaño de la población lo establecemos en 1000 individuos y 40 generaciones. Utilizamos un cruce de 0.8 y una mutación de 0.01, lo que significa que se deben generar diversos datos aleatorios. La parsimonia se establece en un valor intermedio de 0.009, ya que los datos no presentan una forma muy específica y no se requiere una

parsimonia muy baja.

	Cruce	Parsimonia	Mutación	Función Obtenida	χ^2
ω_R	0.8	0.005	0.01	$0.322\sin(z)\cos(z) - 1.145$	2.576

Tabla 5.4: Resultados obtenidos al variar la parsimonia.

En la tabla 5.6 se tienen las soluciones que obtuvimos y en la figura 5.7 la gráfica de la mejor solución que fue para $\omega_R = 0.322\sin(z)\cos(z) - 1.145$ con un valor de $\chi^2 = 2.576$; y el diagrama de árbol se encuentra en la figura 5.8.
Nuestro modelo tiene forma:

$$\omega_0 + a\sin(z)\cos(z), \tag{5.15}$$

en donde $a = 0.322$ y $\omega_{0R} = -1.145$.

	$H(z)$
χ^2_{teo}	6.560
χ^2_R	2.576

Tabla 5.5: Resultados de la prueba χ^2 para el modelo teórico de ω y la función reconstruida utilizando los datos observacionales.

Podemos comparar este resultado con la literatura [54] en la Tabla I(c) mencionan un modelo de la forma:

$$\omega_0 + a\sin(z), \tag{5.16}$$

si nosotros aproximamos el valor de z a 0, entonces nuestro modelo obtenido quedaría de la misma forma que el de la literatura. Esto sería en el caso de valores de z muy pequeñitos.

Además, en el capítulo 1, se dijo que el valor de la energía oscura para el modelo ΛCDM tiene un valor de $\omega_0 = -1$ entonces nuestro resultado $\omega_{0R} = -1.145$ tiene un error del 14.5 %.

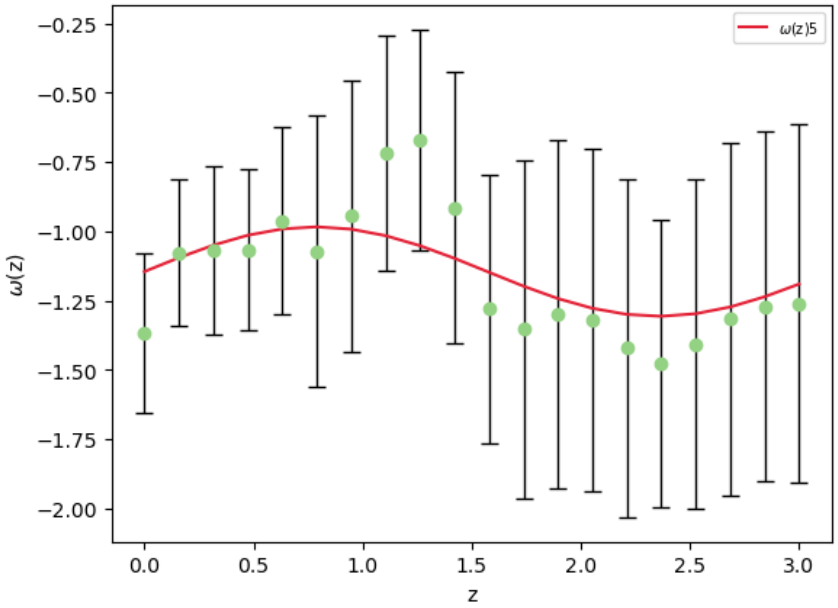


Figura 5.7: En la figura se tiene la gráfica de la mejor solución ωR

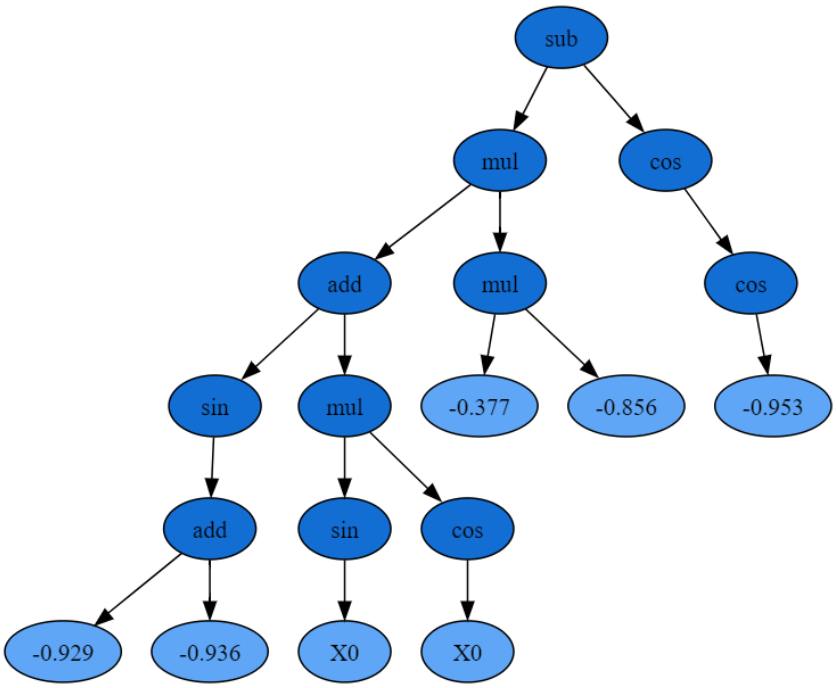


Figura 5.8: En la figura se tiene el diagrama de árbol obtenido como la mejor solución $0.322\sin(z)\cos(z) - 1.145$ con $\chi^2 = 2.576$.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se busca encontrar la forma o solución a algunos datos observacionales que han sido útiles en el estudio de la expansión del universo y la energía oscura, como lo son el parámetro de Hubble, el módulo de distancia de las supernovas y los datos de la parametrización libre. Para ello, se emplea el método de programación genética y sé compara la forma de los datos observacionales con la teoría.

Así que, en primer lugar, con base en las pruebas previas realizadas a las funciones matemáticas, se concluyó que, dependiendo del tipo de distribución de datos que se tenga, habrá un operador genético que nos ayudará a encontrar la mejor solución para el problema.
En el caso del cruce, se concluye que a mayor valor de este, existe una mayor diversidad genética. Es decir, los padres seleccionados intercambiarán en mayor medida sus mejores genes, creando mejores soluciones que combinan lo mejor de cada uno. En nuestro trabajo, siempre fue necesario un cruce de magnitud considerable, entre 0.1 y 0.9.

La mutación, al ser un parámetro donde el intercambio de información es aleatorio consigo mismo, presenta casos donde se requiere una mayor cantidad de datos aleatorios y otros donde el resultado mejora con menos datos aleatorios, como en el caso de la función trigonométrica. Para funciones sencillas o con datos no tan específicos, una mutación en el rango de 0.001 a 0.009 puede ser un buen valor. Sin embargo, conforme aumenta la

complejidad, se puede necesitar un valor mayor o menor.

La parsimonia es el parámetro que realiza el trabajo final. Una vez que los datos han pasado por las operaciones genéticas, la parsimonia decide cuál es la mejor solución, dependiendo de si los datos tienen una forma sencilla o compleja.

Con base en lo anterior, se implementó la programación genética como herramienta para encontrar una forma funcional del parámetro de Hubble, la cual resultó ser:

$$HR(z)^2 = 67.72^2((1+z)^2(0.028z^2 + 0.28z + 0.67)). \tag{6.1}$$

con un valor de $\chi^2_{H,R} = 18.704$.
También se pudo reconstruir el módulo de distancia μ para los datos de supernovas, obteniendo:

$$\mu R = 2.397z + 43.865, \tag{6.2}$$

con $\mu_0 = 43.865$.
Por último, se halló un valor para la energía oscura ω_R = -1.145, con un error porcentual del 14.5 % y un valor de $\chi^2_{\omega,R} = 2.576$.

En todos los casos, se logró realizar y encontrar un modelo para los datos observacionales, lo que permite afirmar que la programación genética es una buena herramienta computacional.

Entre sus principales ventajas se encuentra su capacidad para realizar reconstrucciones de datos observacionales. Una de sus desventajas es el tiempo de cómputo requerido, debido al gran espacio de búsqueda que debe explorar para encontrar las soluciones más óptimas o cercanas a ellas. Esto puede generar tiempos de ejecución prolongados, especialmente para problemas complejos o conjuntos de datos grandes.

Apéndice A

Diagrama de Flujo

En el siguiente diagrama podemos leer y entender que secuencia sigue el código utilizado:

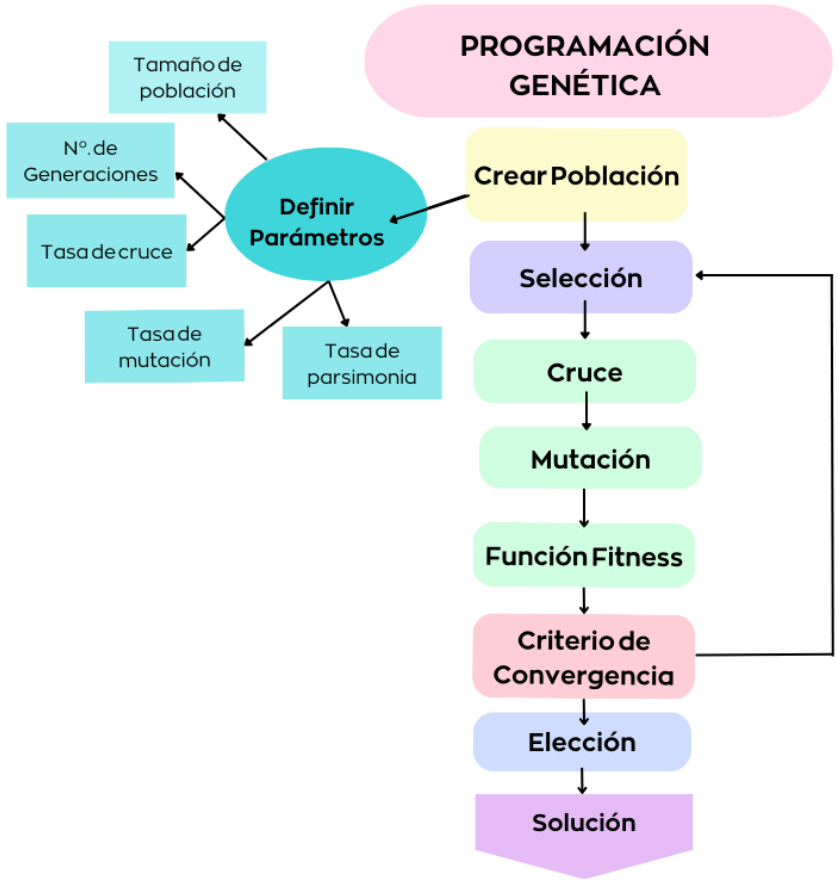


Figura A.1: Diagrama de Flujo del algoritmo de la programación genética

Apéndice B

Código Python

Listing B.1: Python example

```
from gplearn.genetic import SymbolicRegressor
from sklearn.utils.random import check_random_state

rng = check_random_state(0)
b = 10
m = 2
x = np.arange(-10, 10, 0.1)

X_train = rng.uniform(-10, 10, 100).reshape(-1,1)

y_train = (m*(X_train)+b)*2*1+np.random.randn(100,1)*5
y =(m*x+b)*2

est_gp = SymbolicRegressor(population_size=1000,
                           generations=40,
                           stopping_criteria=0.2,
                           p_crossover=0.2,
```

```
                    p_subtree_mutation=0.01,
                    p_hoist_mutation=0.01,
                    p_point_mutation=0.01,
                    max_samples=0.9,
                    verbose=1,
                    parsimony_coefficient=0.09,
                    random_state=0
                    function_set=('add', 'sub', 'mul',
                    'div', 'sin', 'cos'))

est_gp.fit(X_train, y_train)
```

Bibliografía

[1] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., Donner, K. J. (2007). Fundamental Astronomy (5a edición). Springer Science & Business Media.

[2] Navarro M. R. (2017) Ecuación de campo. Introducción a la cosmología. Tabajo de fin de grado. Facultad de Matemáticas, Universidad de Murcia. España.

[3] Duarte C. (2018) Modelo Heliocéntrico. Agencia Espacial Mexicana. Recuperado de https://haciaelespacio.aem.gob.mx/revistadigital/articul.php?interior=886

[4] Bombal G. F. (2015) Galileo Galilei: Un hombre contra la obscuridad. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid, España.

[5] Juárez C. Doddoli C. (2021) Razones para recordar el nacimiento de Johannes Kepler. Una mirada a la ciencia, UNAM. México.

[6] Rodríguez C.E. (2019) Cosmologías con expansión acelerada: modelando la aceleración en la expansión del universo con energía oscura holográfica. (s. f.). Editorial Académica Española. http://hdl.handle.net/20.500.12390/2233

[7] Aguilar L. A. (2000) Breviario de Cosmología. Instituto de Astronomía, Universidad Autónoma de México. México.

[8] Krane, K. S. (2012). Modern Physics (3ra edición). Wiley.

[9] Fernandez de Salas P. (2017) El modelo cosmológico estándar., Entre cientific@s. Una ventana a la ciencia y la investigación desde el Instituto de Física Corpuscular. Instituto de Física Corpuscular. Recuperado de

https://bloggy.ific.uv.es/bloggy/index.php/2017/10/27/el-modelo-cosmologico-estandar/

[10] James P., Peebles E., Schramm D., Turner E. L. and Kron R. (1994) The Evolution Of The Universe. Scientific American 271, 52.

[11] Tafalla M. (2014) La expansión acelerada del universo. Observatorio Astronómico Nacional. Instituto Geográfico Nacional. Revisado en https://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/Laexpansionaceleradadeluniverso.pdf

[12] Arjona R., Savvas N. (2020) What can machine learning tell us about the background expansion of the Universe?.Universidad Autónoma de Madrid, Cantoblanco. Madrid, España.

[13] Salas, P., & Solís, M.A. (2006) Estrellas de neutrones. Revista mexicana de física E, 52(1), 37-46. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sciarttext&pid=S1870-35422006000100006&lng=es&tlng=es.

[14] López D. (2019) Supernovas: Explosiones ultra energéticas y creadores de los elementos químicos más pesados. Recuperado de https://www.nochedelasestrellas.org.mx/docs/Articulos/2019/SN.pdf

[15] Bernal J.L.,Verde L., Riess. A.G. (2016) The trouble with H0. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2016(10), 019. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/10/019

[16] Torreti R. (1994) La Geometría del Universo y otros ensayos de filosofía natural.Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela.

[17] Asimov, I., & Larrucea, M. P. (2012). El Universo: de la Tierra plana a los quásares. Alianza editorial

[18] Luković V., D'Agostino R., and Vittorio N.(2016) Is there a concordance value for h0? Astronomy and Astrophysics, 595.https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628217

[19] Hector L., Veramed, Twickenham (2019). Symbolic Regresion: Survival of the Best Fit. United Kingdom. The Clinical Data Science Conference. https://arxiv.org/pdf/2304.01117.pdf

[20] Téllez L.O. (2018). Constricciones de modelos de materia y energía oscura escalar. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

[21] Chacon J. (2021) Algoritmos de clasificación aplicados a simulaciones de formación de estructura cosmológica- Tesis de Maestría. Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

[22] Busti, V., Clarkson, C., & Seikel, M. (2014). The Value of H0 from Gaussian Processes. Proceedings of the International Astronomical Union, 10(S306), 25-27. doi:10.1017/S1743921314013751

[23] Wald R. (1984) General Relativity. University of Chicago. Chicago and London.

[24] Padilla L., Tellez L., Escamilla L., Vazquez A. (2021) Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. doi:2218-1997/7/7/213

[25] Janssen B. (2013) Teoría de la Relatividad General. Departamento de Física Teórica y del Cosmos, Universidad de Granada, España.

[26] Carroll S. M. (1997). Lecture Notes on General Relativity. Institute for Theorical Physics. University California. United States.

[27] Ryden B. (2006). Introduction to Cosmology. Department of Astronomy. The Ohio State University.

[28] Carroll S. M. (2004) Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison Wesley.

[29] Liddle, A. (2003). An introduction to modern cosmology. Wiley-Blackwell.

[30] Kippenhahn, R. & Weigert, A. (1990). Stellar structure and evolution. Springer.

[31] N. Suzuki, D. Rubin, C. Lidman, G. Aldering, R. Amanullah, K. Barbary, L. F. Barrientos, J. Botyanszki, M. Brodwin, N. Connolly, K. S. Dawson, A. Dey, M. Doi, M. Donahue, S. Deustua, P. Eisenhardt, E. Ellingson, L. Faccioli, V. Fadeyev, H. K. Fakhouri, A. S. Fruchter, D. G. Gilbank, M. D. Gladders, G. Goldhaber, A. H. Gonzalez, A. Goobar, A. Gude, T. Hattori, H. Hoekstra, E. Hsiao, X. Huang, Y. Ihara, M. J. Jee, D. Johnston, N. Kashikawa, B. Koester, K. Konishi, M. Kowalski, E. V. Linder, L. Lubin, J. Melbourne, J. Meyers, T. Morokuma, F. Munshi, C. Mullis, T. Oda, N. Panagia, S. Perlmutter, M. Postman, T. Pritchard, J. Rhodes, P. Ripoche, P. Rosati, D. J. Schlegel, A. Spadafora, S. A. Stanford, V. Stanishev, D. Stern, M. Strovink, N. Takanashi, K. Tokita, M. Wagner, L. Wang, N. Yasuda, and H. K. C. Yee. (2012) The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above z>1 and building an early-type-hosted supernova sample. The Astrophysical Journal, 746(1):85. https://doi.org/10.1088/0004-637x/746/1/85

[32] Introducción a la cosmología. (s. f.). Recuperado 10 de enero de 2024, de http://www.fisicafundamental.net/memoria/cosmologia.html

[33] Escamilla L.(2018) Reconstrucción de la energía oscura con base en observaciones. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Cinvestav. Tesis para obtener el Grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Física.

[34] Rojas J. D., (2022) Redes neuronales artificiales aplicadas a la cosmología observacional. Facultad de Ciencias, UNAM. Tesis para obtener el grado de Licenciado en Física.

[35] Arcia R., (2012) Modelo Interactuante entre energía oscura y materia oscura. Tesis de Maestria. Instituto de Física y Matemáticas. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

[36] Lino A., Rodríguez C., Escalante H., Morales A., (2018) Deep Representation Learning with Genetic Programming. Department of Computational Sciences National Institute for Astrophysics Optics and Electronics. Puebla, México.

[37] O. Farooq, F. R. Madiyar, S. Crandall, and B. Ratra.(2016) Hubble parameter measu-

rement constraints on the redshift of the deceleration–acceleration transition, dynamical dark energy, and space curvature. The Astrophysical Journal, 835(1).

[38] Kuri A., Galaviz J. (2002) Algoritmos Genéticos. Fondo de cultura económica. México.

[39] Sprockel J. (2013) Programación Genética: Introducción y Aspectos Generales.

[40] Darwin C., (1859) El origen de las especies. Murray, Londres. Traducción Antonio de Zulueta

[41] Domínguez C., Fornoni J., Sonseki P., (2009) ¿Qué es la selección natural?

[42] Racevska, E. (2018) "Natural Selection". Oxford University

[43] Ginnobili, S., (2010). La teoría de la selección natural darwiniana y la genética de poblaciones. ENDOXA

[44] Gutierrez A., (2023) Algoritmos Genéticos. Introducción a la robótica inteligente.

[45] Brabazon, A., Kampouridis, M., and O'Neill, M. (2020). Applications of genetic programming to finance and economics: past, present, future. Genetic Programming and Evolvable Machines, 21(1-2), 33-53.

[46] Ghaheri A, Shoar S, Naderan M, Hoseini SS. The Applications of Genetic Algorithms in Medicine. Oman Med J. 2015 Nov;30(6):406-16. doi: 10.5001/omj.2015.82. PMID: 26676060; PMCID: PMC4678452.

[47] Rajpaul, V. (2012). Genetic algorithms in astronomy and Astrophysics. arXiv (Cornell University). https://doi.org/10.48550/arxiv.1202.1643

[48] Escamilla L. A., Vázquez J. A., (2023) Model selection applied to reconstructions of the Dark Energy. Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

[49] Morales A. A., (2022) Algoritmos genéticos y sus aplicaciones a la cosmología. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. México.

[50] Dominguez I.,(2016) Supernovas: Iluminando el Universo. Sociedad Española de Astronomía. España.

[51] Genetic Programming in python with a sickit-learn inspired API. (s.f.). Genetic Programming in python with a sickit-learn inspired API. Recuperado 22 de enero de 2024, de https://gplearn.readthedocs.io/en/stable/

[52] Turing A.M. (1950) Computing Machinery and Intellengence. Mind. vol 49. pp 433-460.

[53] Bora K., Holanda R. F. L., Desai S.Pereira S. H. (2022) A test of the standard dark matter density evolution law using galaxy clusters and cosmic chronometers. Universidad Federal de Rio Grande Norte. Department of Physics. Brasil. (arxiv.org/pdf/2106.15805.pdf)

[54] Tamayo D., Vázquez J. A. (2019). Fourier-series expansion of the dark-energy equation of state. Departamento de F´ısica, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional. Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Autónoma de México. México. https://arxiv.org/pdf/1901.08679.pdf

[55] Bogdanos, C., Nesseris, S. (2009). Genetic algorithms and supernovae type Ia analysis. Journal Of Cosmology And Astroparticle Physics, 2009(05), 006. https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/05/006

[56] Jimenez, R., Loeb, A. (2002). Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. Astrophysical Journal/The Astrophysical Journal, 573(1), 37-42. https://doi.org/10.1086/340549