



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

---

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

MODELOS DE MATERIA OSCURA: UNA  
PERSPECTIVA NUMÉRICA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIATURA EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA

**Jazhiel Chacón Lavanderos**



Instituto Politécnico Nacional

DIRECTORES DE TESIS:

DR. TONATIUH MATOS CHASSIN  
DR. FRANCISCO JAVIER TURRUBIATES SALDÍVAR

Ciudad de México, Diciembre 2018



*A Dios, creador del Universo  
Y a mis padres, que me dieron la vida para observarlo*

# Agradecimientos

- A mis directores, el Dr. Tonatiuh y el Dr. Francisco por darme su confianza y permitirme realizar este trabajo.
- A todo el grupo de cosmología del Departamento de Física del CINVESTAV, cuyos nombres no menciono para evitar alguna omisión, gracias por su apoyo en todo momento y por sus grandes enseñanzas.
- Al Dr. José Alberto Vázquez González y al grupo de cosmología en el ICF de la UNAM en Cuernavaca, quienes han expresado su apoyo hacia este proyecto.
- Especialmente al Dr. Ruslan Gabbasov, quien fue un apoyo fundamental para el desarrollo de este trabajo fuera del CINVESTAV y de E.S.F.M.
- A Malú, quien me ha dado consejos y sobre todo “zapes” emocionales para seguir adelante.
- A todos mis profesores de E.S.F.M., gracias a ellos he podido completar uno de los logros más importantes en mi vida.
- A mis compañeros de E.S.F.M.: David, Jaime, Claudia, Fernando, Daniel, Miguel. Grandes camaradas en casi seis años.
- A mis amigos de toda una vida: Stephano, Melissa, Gaby, Missael; gracias por su apoyo y compañía incondicional durante casi diez años. Sin duda serán muchos más.
- A mi familia: mi padre, mi madre y mi hermana. Son la mejor familia que pude tener, gracias por el apoyo, la compañía, el amor y el valor en momentos difíciles, esto lo hice por ustedes.

# Resumen

La cosmología ha tomado un papel muy importante en el desarrollo de la ciencia y la tecnología en las últimas dos décadas. Datos recabados de observaciones al Universo sugieren que nuestro entendimiento del Cosmos está en una etapa inicial. Uno de los descubrimientos más impresionantes fue que la materia observable del Universo, es decir, los planetas, las estrellas, las nubes de gas, las galaxias etc., comprende tan solo alrededor del 5% de la materia total que compone al Universo, mientras que el otro 95% tiene aún una naturaleza desconocida.

Este 95% de materia exótica se compone de dos tipos de materia, denominados *materia oscura*, cuyo comportamiento es gravitacionalmente atractivo y ocupa un aproximado  $\sim 27\%$  y la *energía oscura*, con comportamiento gravitacionalmente repulsivo, ocupa el  $\sim 68\%$  restante.

Diversos modelos de evolución cosmológica han sido propuestos y estudiados desde inicios del siglo XX, siendo el modelo  $\Lambda$ CDM el que mejor concuerda con los datos recabados de observaciones hechas en el Cosmos a gran escala. Sin embargo,  $\Lambda$ CDM presenta una serie de problemas a escalas pequeñas (galácticas) que al día de hoy siguen sin tener respuesta objetiva. Una alternativa a este modelo es el de la materia oscura como campo escalar (SFDM), el cual ofrece solucionar los problemas de  $\Lambda$ CDM y que ha obtenido gran reconocimiento dentro de la comunidad científica, especialmente entre astrofísicos y cosmólogos en las últimas décadas.

Las simulaciones numéricas de  $N$ -cuerpos son utilizadas para modelar a la materia oscura en el Universo, además de que permiten tener una idea más clara de la dinámica del Universo a gran escala, con estos dos modelos de materia oscura mencionados, el propósito de este trabajo es compararlos de forma numérica para obtener así un mejor entendimiento de la naturaleza de la materia oscura.

# Abstract

Cosmology has taken a great step in science and technology development during the last two decades. Observational data from the Universe suggests that our understanding of the Cosmos is on its very first steps. One of the most outstanding detections was that visible matter; that is, planets, stars, gas clouds, galaxies etc., are only about 5% of the total matter in the Universe, whereas 95% of the matter has an unknown behaviour.

This 95% of exotic matter is compounded of two types of matter, *dark matter*, whose behaviour is gravitationally attractive and occupies  $\sim 27\%$ , and *dark energy*, with a gravitational push behaviour, occupies the rest 68%.

Diverse cosmological evolutionary models have been proposed and studied since the beginning of the XX century, and the  $\Lambda$ CDM model has proven to be the very best model that fits observational data from large scale structure (clusters of galaxies). Nevertheless,  $\Lambda$ CDM has a series of inconvenients at small scales (galactic scales) that do not have a very objective answer nowadays. One alternative model is the scalar field dark matter model (SFDM), which offers a solution to the  $\Lambda$ CDM problems and has taken great acknowledgment throughout scientific community, specially to astrophysicists and cosmologists in the last couple of decades.

Numerical  $N$ -body simulations are used to model dark matter present in the Universe, moreover they allow to have a clearer idea of the large scale Universe dynamics, the objective of this work is to compare the two models mentioned above numerically and get a better understanding of dark matter behaviour.

# Introducción

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal comparar dos modelos de materia oscura, utilizando simulaciones numéricas y códigos afines que permitan el análisis de datos dentro de las simulaciones. Asimismo utiliza datos observacionales realizados por diversos experimentos y cuyos resultados son comparables con dichas simulaciones.

La importancia de estudiar este tema en particular es comprender la dinámica del Cosmos, los diferentes procesos que han sucedido para explicar la estructura cósmica que se observa el día de hoy. En particular la de entender la naturaleza de la materia oscura, un tipo de materia que solo actúa gravitacionalmente y que está presente en todas las galaxias y en las grandes estructuras del Universo.

En el capítulo 1 se ofrece una pequeña introducción a la cosmología, algunos conceptos esenciales para estudiar esta rama de la ciencia, tales como la expansión del Universo, el corrimiento al rojo proveniente de la observación de galaxias, las ecuaciones de Einstein que describen la geometría del Universo por su contenido de materia, la métrica de FLRW, que al combinarla con las ecuaciones de Einstein conduce a las ecuaciones de Friedmann, las que detallan la dinámica del Universo. Finalmente se describe el modelo  $\Lambda$ CDM, conocido también como modelo estándar de la cosmología y que busca explicar la dinámica del Universo además del componente desconocido, llamado hasta ahora “materia oscura”, presente en todas las galaxias y que a pesar de ser el modelo mejor aceptado entre la comunidad científica presenta ciertos problemas observacionales. Eventualmente se describe el modelo de materia oscura como campo escalar, por sus siglas en inglés *Scalar Field Dark Matter* (SFDM), el cual busca compensar y darle solución a los problemas que presenta  $\Lambda$ CDM, sobre todo en escalas pequeñas.

El capítulo 2 abarca las simulaciones de  $N$ -cuerpos, dado que la composición y naturaleza de la materia oscura es aún desconocida, la mejor aproximación que se puede aplicar son las simulaciones numéricas utilizando un gran número de partículas para modelar a la materia oscura como un fluido sin colisión y autogravitante. Además se describe la teoría de Hidrodinámica de Partículas Suavizadas, la cual es utilizada para modelar fluidos físicos tales como agua o gas, el cual es uno de los componentes principales de las galaxias en el Universo.

El capítulo 3 se encarga de explicar la historia del código de cálculo de simulaciones cosmológicas GADGET (GALaxies with Dark matter and Gas intEracT), el cual utiliza la teoría de fluidos sin colisión autogravitantes, en conjunto con la teoría de SPH para simular sistemas aislados como colisiones de galaxias, o con condiciones a la frontera periódicas, para simular la estructura a gran escala del Universo. También en este capítulo se describe una modificación del código GADGET, llamado Axion-Gadget, cuyo objetivo principal es el de cambiar la teoría que simula a la materia oscura con la teoría del campo escalar, donde ese campo está compuesto de un bosón ultra-ligero cuya masa tiene el valor de  $m \sim 10^{-22}$  eV y longitud de onda de Compton de  $\lambda \sim \text{kpc}$ , con esta modificación se lleva a cabo una simulación de evolución cosmológica utilizando condiciones iniciales idénticas para ambos modelos, con el fin de observar cambios en la formación de estructura a gran escala.

Finalmente, el capítulo 4 se enfoca en analizar los datos, resultado de las simulaciones hechas durante este trabajo, se explica la teoría de perturbaciones lineal necesaria para crear condiciones iniciales para las simulaciones, se detalla también la cantidad de simulaciones ejecutadas haciendo uso de un pequeño cluster del departamento de Física del CINVESTAV. Usando otros códigos de análisis, algunos de ellos creados específicamente para este trabajo. Con ellos se explica la creación de halos en las simulaciones y se realiza una comparación visual y analítica sobre la función de masas de halos, que indica la cantidad de subhalos de los halos principales o masivos. Eventualmente, se compara el espectro de potencias de masa obtenido de datos observacionales dentro del régimen no lineal y el cual brinda información sobre la evolución de estructura y el comportamiento de la materia oscura en las simulaciones numéricas.

Se incluyen tres apéndices donde se agrupan algunos conceptos y métodos utilizados para simplificar el contenido de los capítulos de la tesis. El apéndice A contiene el desarrollo del principio de mínima acción, mediante el cual se obtiene la densidad Lagrangiana necesaria para encontrar la ecuación de Klein-Gordon que describe la dinámica de un campo escalar en la teoría de campos. El apéndice B describe el procedimiento necesario para instalar el código Gadget-2, expone las librerías necesarias para compilar completamente el código y como modificarlo de acuerdo al modelo que se requiera simular. En el apéndice C se explica un pequeño programa realizado en lenguaje Python, principalmente para procesar imágenes e identificar diferencias entre dos o más conjuntos de imágenes con igual resolución y que utiliza un algoritmo de similitud de estructura.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>V</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción a la Cosmología</b>	<b>1</b>
1.1. La expansión del Universo . . . . .	2
1.2. Modelos de evolución cosmológica . . . . .	8
1.2.1. Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) . . . . .	11
1.2.2. Otros candidatos a materia oscura . . . . .	12
1.2.3. Espectro de potencias de masa y fluctuaciones de densidad . . . . .	14
1.2.4. Scalar Field Dark Matter (SFDM) . . . . .	20
1.2.5. Descripción física de SFDM . . . . .	21
1.2.5.1. Lagrangiano del campo escalar . . . . .	21
1.2.5.2. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	22
1.2.5.3. Tensor de energía-momento . . . . .	22
1.2.5.4. Fondo del Universo: Aproximación hidrodinámica . . . . .	23
1.2.6. Perturbaciones de SFDM . . . . .	24
<b>2. Simulaciones de <math>N</math>-cuerpos</b>	<b>26</b>
2.1. Modelos de fluidos sin colisión autogravitantes . . . . .	26
2.2. Hidrodinámica de partículas suavizadas (SPH) . . . . .	30
2.2.1. Ecuaciones fundamentales . . . . .	31
2.3. Ecuaciones de movimiento . . . . .	32
2.3.1. Ecuación de momento . . . . .	32
2.3.2. Ecuación de continuidad . . . . .	34
2.3.3. Ecuación de energía térmica . . . . .	34
2.3.4. Viscosidad . . . . .	35
2.3.5. Kernels . . . . .	35
<b>3. GADGET</b>	<b>36</b>
3.1. Axion-Gadget . . . . .	38
3.1.1. Propiedades Físicas . . . . .	38
3.1.2. Implementación de la presión cuántica . . . . .	39
3.2. Ejemplos . . . . .	42
3.2.1. Colisión de galaxias . . . . .	42
3.2.2. Formación de estructura a gran escala . . . . .	42

<b>4. Simulaciones cosmológicas con GADGET y Axion-Gadget</b>	<b>45</b>
4.1. Generar condiciones iniciales . . . . .	45
4.2. Ejecución de los códigos . . . . .	48
4.3. Formación de estructura . . . . .	52
4.4. Función de masas de halos . . . . .	55
4.5. Espectro de potencias de masa en las simulaciones de $\Lambda$ CDM y SFDM . . . . .	61
<b>A. Principio de mínima acción</b>	<b>65</b>
<b>B. Instalación de GADGET-2</b>	<b>67</b>
<b>C. Diferencia de imágenes</b>	<b>71</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>74</b>

# Índice de figuras

1.1.	Hubble eXtreme Deep Field, por sus siglas en inglés, XDF (Campo Extremadamente profundo del telescopio espacial Hubble). Es una composición de imágenes tomadas por el telescopio espacial Hubble tras 10 años de observaciones. Contiene alrededor de 5,500 galaxias en total. . . . .	2
1.2.	Geometría del espacio–tiempo según el tipo de curvatura. . . . .	6
1.3.	El factor de escala cosmológico $a(t)$ para modelos de Universo abierto ( $k = -1$ ), plano ( $k = 0$ ) y cerrado ( $k = 1$ ). . . . .	8
1.4.	Curva de rotación de la galaxia M33 (Triangulum). Se observa una discrepancia entre la medición real y el cálculo usando las leyes newtonianas. . . . .	9
1.5.	Espectro de radiación del CMB medido por el satélite COBE. Este espectro tiene características que lo asemejan cuerpo negro. . . . .	10
1.6.	Comparación del CMB medido por las misiones COBE (1992), WMAP (2003) y Planck (2013). Las imágenes tienen una temperatura promedio de 2.725 K y las zonas que se aprecian diferentes son las fluctuaciones después de inflación responsables de originar las galaxias. . . . .	11
1.7.	Mapa tridimensional obtenido a partir del muestreo SDSS de la distribución de galaxias, con el Sistema Solar en el centro. Cada punto indica una galaxia mientras que el color representa la edad de las estrellas en las galaxias, siendo las rojas las estrellas más viejas. Esta imagen representa la gran cantidad de galaxias que han sido contabilizadas a corrimientos al rojo relativamente bajos ( $z \sim 0.02 - 0.014$ ). . . . .	12
1.8.	Ilustración de la línea de tiempo que detalla el origen del Universo según la teoría del Big Bang. Se observan las fluctuaciones cuánticas que dan origen a las fluctuaciones de densidad que generaron a las galaxias en el Universo, la expansión acelerada o Inflación, el fondo cósmico de microondas, Big Bang Nucleosíntesis, desarrollo de galaxias y planetas hasta lo que se observa el día de hoy. . . . .	13
1.9.	El espectro de potencias de fluctuaciones medido en la actualidad, obtenido de la luz de las galaxias a partir de corrimientos al rojo aproximados a $z \sim 0$ . Las curvas corresponden a diversos modelos de materia oscura. Por ejemplo, la relación entre el espectro de potencias y las anisotropías obtenidas del CMB es diferente para distintos modelos de CDM, pero el espectro de $\Lambda$ CDM concuerda muy bien con las observaciones de COBE (Peacock & Dodds; 1994 [32]). . . . .	15
1.10.	Valores aceptados de la constante de Hubble al día de hoy ( $H_0$ ) de diversos modelos de materia oscura, caracterizados por su contenido de materia. CDM simple (sCDM), CDM con constante cosmológica ( $\Lambda$ CDM), CDM con bariones y radiación ( $\nu$ CDM) y CDM con partículas relativistas ( $\tau$ CDM) (Dodelson et al. 1996 [33]). . . . .	15
1.11.	Perfiles de densidad de los halos más y menos masivos de una simulación hecha con los modelos $\Lambda$ CDM y standard biased Cold Dark Matter spectrum (SCDM) (Navarro et al.; 1997 [36]). En los paneles superiores, los radios están dados en kpc y las densidades en unidades de $10^{10} M_{\odot} / kpc^3$ . En el resto, las unidades son arbitrarias. . . . .	17
1.12.	<i>Izquierda:</i> Constricciones sobre los perfiles de densidad en las galaxias Sculptor, Fornax, NGC 2366 (Walker & Peñarrubia; 2011 [37]). <i>Derecha:</i> Simulaciones hechas con CDM para galaxias pequeñas. CDM predice un perfil CUSP, se observa un perfil CORE (Oh et al. 2011 [38]). . . . .	17
1.13.	La galaxia NGC 1052-DF2 es una galaxia ultra difusa en la constelación Cetus, identificada en un estudio de imágenes de campo amplio del grupo NGC 1052 por el Dragonfly Telephoto Array (Dokkum et al. 2018 [48]). . . . .	19
1.14.	<i>Izquierda:</i> Galaxias observadas en el Grupo Local (Kauffmann, White & Guiderdoni 1993 [49] ). <i>Derecha:</i> Comparación con simulaciones de CDM (Klypin et al. 1999 [50]). . . . .	19

2.1. Colapso gravitacional en una simulación de $N$ -cuerpos realizada con Python. Las ecuaciones de fluidos sin colisión autogravitantes permiten observar el movimiento de $N$ partículas debido a la interacción gravitacional entre ellas. . . . .	28
2.2. <i>Izquierda</i> Algoritmo BH para 100 partículas y <i>TreePM Algorithm</i> de una simulación cosmológica. <i>Derecha</i> : El campo de densidad de partículas se divide en mallas y celdas para facilitar el cálculo de las fuerza de interacción entre partículas y su respectivo potencial gravitacional. . . . .	30
2.3. Modelo de SPH. <i>Superior</i> : El volumen de un fluido se discretiza mediante partículas, cada partícula representa una cierta cantidad del volumen del fluido. <i>Medio</i> : La partícula contiene información que para evaluarse se debe tomar un promedio de los valores de la partícula alrededor de un dominio mediante un kernel. <i>Inferior</i> : Después de evaluar la información de una partícula, se hace lo mismo para las partículas restantes de la simulación. La figura (c) muestra el modelo SPH para simular una ola en un tanque de agua (Gingold & Monaghan; 1977 [71]). . . . .	33
3.1. Ilustración entre un algoritmo BH y una descomposición de procesos Peano-Hilbert. Esta es una curva que recorre cada malla de la simulación solo una vez. El volumen de la simulación se reparte en dominios al segmentar esta curva en puntos arbitrarios entre los límites de la celda. Esto genera una manera de distribuir el conjunto de partículas en procesadores individuales (Springel et al. 2005; [78]). . . . .	37
3.2. Resultado de la Simulación del Milenio llevada a cabo en el Max Planck Institute for Astrophysics, en esta imagen se observa la distribución a gran escala de materia oscura en forma de una inmensa red que conecta a las galaxias dentro de la simulación (Springel et al. 2005 [81]). . . . .	37
3.3. Interpretación física de las funciones de densidad de partículas del código Axion-Gadget. <i>Superior</i> : Cuando la densidad es descrita por una función delta de Dirac, las partículas son puntuales. <i>Central</i> : La densidad de una función Gaussiana se asemeja a la densidad de SPH. <i>Inferior</i> : La densidad que combina ambas funciones crea un movimiento continuo de las partículas. . . . .	40
3.4. Evolución de dos galaxias espirales colisionando para formar una sola. En la figura las partículas azules representan el halo de materia oscura, las partículas rojas representan el disco estelar. . . . .	43
3.5. Representación de una evolución cosmológica desde $z = 10$ hasta $z = 0$ . En la figura se observan los halos de materia oscura y las agrupaciones de gas debido a la atracción gravitacional de la materia oscura. . . . .	44
4.1. Estructura tridimensional de la Aproximación Zeldovich. En esta figura se observa como se genera una “rebana de panqué”, las cuales representarán estructuras cosmológicas. . . . .	47
4.2. Imágenes de pantalla del formato del archivo de parámetro para GADGET-2. . . . .	49
4.3. Imagen de pantalla que indica los parámetros adicionales para ejecutar Axion-Gadget. Estos parámetros son añadidos al final del archivo original. Estos parámetros son añadidos al final del archivo original. Para la modificación de Axion-Gadget, <code>FdmKernelLambda</code> es la longitud de onda de Compton de las partículas de materia oscura, mientras que <code>FdmAxionMass</code> y <code>FdmNormMass</code> son los valores de la masa (en eV) y su respectivo término de normalización. . . . .	49
4.4. Comparación de la curva de aceleración analítica de una distribución de densidad de masa gaussiana con diferentes longitudes de suavizado (Zhang et al. 2018). . . . .	51
4.5. Simulación de $\Lambda$ CDM con 7 millones de partículas en una caja de 50 Mpc. En esta figura se observan los halos de materia oscura como los puntos más brillosos, en total se contaron cerca de 4000 halos. . . . .	52
4.6. Densidad de materia oscura en logarítmica. el Tamaño de la caja en (a) y (b) es de 50 Mpc de los modelos $\Lambda$ CDM 7 SFDM respectivamente a $z \approx 2$ . Las imágenes (c) y (d) son acercamientos a 25 Mpc del centro de la simulación. En general los halos de materia oscura formados en ambas simulaciones tienen halos pequeños (satélite) alrededor de ellos, sin embargo, la simulación de SFDM muestra menos formación de halos pequeños y la densidad de los halos masivos se nota con menor concentración. . . . .	53
4.7. Simulaciones N1 y SF3. EL tamaño de estas imágenes es de 50 Mpc. Ambas imágenes son de la misma región en un tiempo cercano al actual ( $z \approx 0.5$ ). $\Lambda$ CDM (a) forma más halos de materia oscura que SFDM (b), además de que los halos de materia oscura de (b) tienen densidad menor, esto se debe a que el código Axion-Gadget distribuye la materia oscura cuando la distancia entre una partícula y un aglomerado es menor a mayor a la longitud de onda de Compton de las partículas ( $\lambda_C$ ). . . . .	54
4.8. Simulaciones SF3 y SF4 en $z \approx 0.05$ . Ambas cajas tienen un volumen de 50 Mpc. En (a) se aprecia la cantidad de halos generados para el modelo SFDM con una longitud de onda del orden de $\lambda \sim \text{kpc}$ . En (b) se presenta la misma simulación de SFDM con una longitud de onda de Compton orden de $\lambda \sim \text{pc}$ . La cantidad de halos generados es similar en ambos casos. . . . .	55

4.9. Simulaciones SF9 y SF10 en  $z \approx 0.2$ . Las simulaciones fueron hechas para el modelo SFDM en un volumen de 5 Mpc, se observa que la longitud de onda de Compton de un orden de  $\lambda \sim \text{kpc}$  de las partículas no es consistente con la formación de halos (a). Al cambiar la longitud de onda a  $\lambda \sim \text{pc}$  se obtiene nuevamente la estructura esperada (b). Se especula que el motivo principal por el cuál se obtenga esta discrepancia entre la teoría y la simulación es que el código no está modificado para un rango corto, donde el algoritmo para aproximar la interacción gravitacional es diferente que en grandes escalas. . . . . 56

4.10. Simulaciones para  $\Lambda\text{CDM}$  y SFDM a  $z \sim 0$ . La figura (a) contiene aproximadamente 3900 halos de materia oscura. La figura (b) es una imagen creada a partir del modelo de campo escalar con una masa del orden de  $m \sim 10^{-22}$  eV junto con un algoritmo de identificación de diferencias entre imágenes de igual dimensión, para esta simulación se generaron 2800 halos de materia oscura. La figura(c) es de igual forma una imagen para una simulación de campo escalar con masa de un orden de  $m \sim 10^{-23}$  eV, en ella se aprecia que la estructura generada no tiene un comportamiento similar en grandes halos comparado con  $\Lambda\text{CDM}$ , se generaron cerca de 3300 halos de materia oscura en esta simulación. . . . . 57

4.11. Cantidad de halos creadas en las simulaciones para  $\Lambda\text{CDM}$  (líneas continuas), SFDM con masa del campo escalar del orden de  $m \sim 10^{-22}\text{eV}$  y  $\lambda_C \sim 1.4$  kpc (líneas punteadas) y SFDM con masa del campo escalar del orden de  $m \sim 10^{-23}\text{eV}$  y  $\lambda_C \sim 14$  kpc (puntos) . La diferencia entre modelos reside en la cantidad de halos contabilizados a diferentes  $z$ , ya que para  $\Lambda\text{CDM}$  se crean alrededor de un orden de magnitud mayor que para SFDM. . . . . 58

4.12. Función de masas de halos de materia oscura en  $z = 0$  para los dos modelos de materia oscura. Se indica la cantidad de subhalos de materia oscura en función de los halos más masivos. La figura (a) es la función para el modelo  $\Lambda\text{CDM}$  la cual contiene mayor concentración de subhalos en halos con masas entre  $10^{12} - 10^3 M_\odot$ . La figura (b) muestra menor cantidad de subhalos en el mismo rango. La figura (c) tiene inclusive menos subhalos de materia oscura que (a) y (b). . . . . 60

4.13. Espectro de potencias creado en  $z = 0$ . Las curvas representan la distribución de materia oscura en la época actual. La curva roja es una representación de las mediciones de las fluctuaciones del CMB obtenidas por la misión WMAP3 y acotadas por el modelo de  $\Lambda\text{CDM}$ , utilizando CAMB, la curva verde es resultado de la simulación de  $\Lambda\text{CDM}$  utilizando el código GADGET-2, la curva azul es para el modelo de campo escalar con una masa del orden  $m \sim 10^{-22}$  eV, cuya longitud de onda de Compton es de  $\lambda_c \sim 1.41$  kpc, la curva amarilla representa el modelo de campo escalar con masa del orden de  $m \sim 10^{-23}$  eV y con longitud de onda de Compton de  $\lambda_C \sim 14.1$  kpc. Las últimas dos son resultados del código Axion-Gadget. . . . . 61

# Capítulo 1

## Introducción a la Cosmología

La cosmología es la ciencia que estudia y busca explicar el origen y la evolución del Universo como un todo, la física fundamental detrás de esos procesos y por lo tanto obtener un entendimiento más profundo de las leyes de la física que se supone que gobiernan a todo el Universo. Sin embargo existe solo un Universo que se puede estudiar y no se puede experimentar con él, sólo hacer observaciones. Esto conlleva bastantes limitantes sobre lo que se puede conocer acerca de su origen (Ryden, B. S.; 2003 [1]).

**El Universo es homogéneo e isótropo en un espacio tridimensional a gran escala.** Esta pequeña pero poderosa frase se conoce como *principio cosmológico*. Que sea homogéneo se refiere a que la materia está uniformemente distribuida en todo el espacio, mientras que isótropo hace referencia a que tiene las mismas propiedades en todas las direcciones espaciales. La Figura 1 sirve como ejemplo de este principio, pues en esa imagen se numeran aproximadamente 5500 galaxias en una fracción del diámetro de la Luna. Así, en un Universo homogéneo e isótropo la distribución de materia sería la misma para cualquier observador en cualquier ubicación del espacio, es decir, ningún lugar sería preferencial de acuerdo a este principio.

Suponer que el principio cosmológico implica un Universo infinito es un poco ingenuo. La teoría de la relatividad nos dice que el espacio puede ser curvo y que, por tanto, es imaginable un Universo finito que no tenga bordes. Una imagen intuitiva utilizada por Einstein y Hubble, que permite la captación de la posibilidad de un Universo finito compatible con el principio cosmológico es la de un Universo bidimensional formando una superficie esférica. Sobre ella, un observador bidimensional podría recorrer todo el Universo, por ser finito, y nunca encontrarse con el borde. Esta imagen, llevada a las tres dimensiones espaciales de nuestro Universo real, nos permite comprender el Universo finito y sin bordes.

Pero la concepción de un Universo finito y cerrado conlleva a un problema de *coalescencia*. Esto es, la gravedad haría que, con tiempo suficiente, todas las galaxias se atrajeran, amontonando toda la masa del Universo en un solo punto. ¿Hay alguna forma de evitar la coalescencia? La relatividad nos enseña que todo movimiento es siempre en referencia de algo; no hay movimiento absoluto. Si se introduce un Universo en expansión, ciertamente se evitaría la coalescencia. Las galaxias no se abalanzarían unas sobre otras si inicialmente hubo una “explosión” y estuvieran alejándose por su efecto. La autogravitación del Universo iría frenando la expansión y podría llegar a detenerla, o no podría, dependiendo de la violencia de la expansión inicial y de la densidad de galaxias.

Estas ideas están muy cercanas a la modelación del Big Bang, modelo del Universo aceptado hoy en día. La idea intuitiva, aunque básica y simple, debe ajustarse bases físicas más firmes. Por ejemplo, la homogeneidad del principio cosmológico anula los gradientes de parámetros termodinámicos, lo que simplifica las expresiones de las ecuaciones que gobiernan el Universo.

Se requieren algunas precisiones más para entender el principio cosmológico. Si un observador ve el Universo isótropo, otro que se mueva a gran velocidad con respecto a él ya no podrá verlo isótropo. Este segundo observador vería un *desplazamiento Doppler* hacia el azul de las galaxias en la dirección de su movimiento, y verá desplazadas hacia el rojo las galaxias que se alejan de él. Por lo tanto si el principio cosmológico se cumple para el primer observador, no lo haría para el segundo.

La teoría de la relatividad general permite resolver el problema. Esta teoría establece que en todo punto del espacio, en un sistema cualquiera (no forzosamente el Universo) existe un observador que ve su microentorno plano, en el sentido de que para él no hay gravedad, de que para él se cumplen las leyes de la relatividad restringida. ¿Quién es ese individuo que goza de tan grande privilegio? Es muy sencillo: cualquiera puede

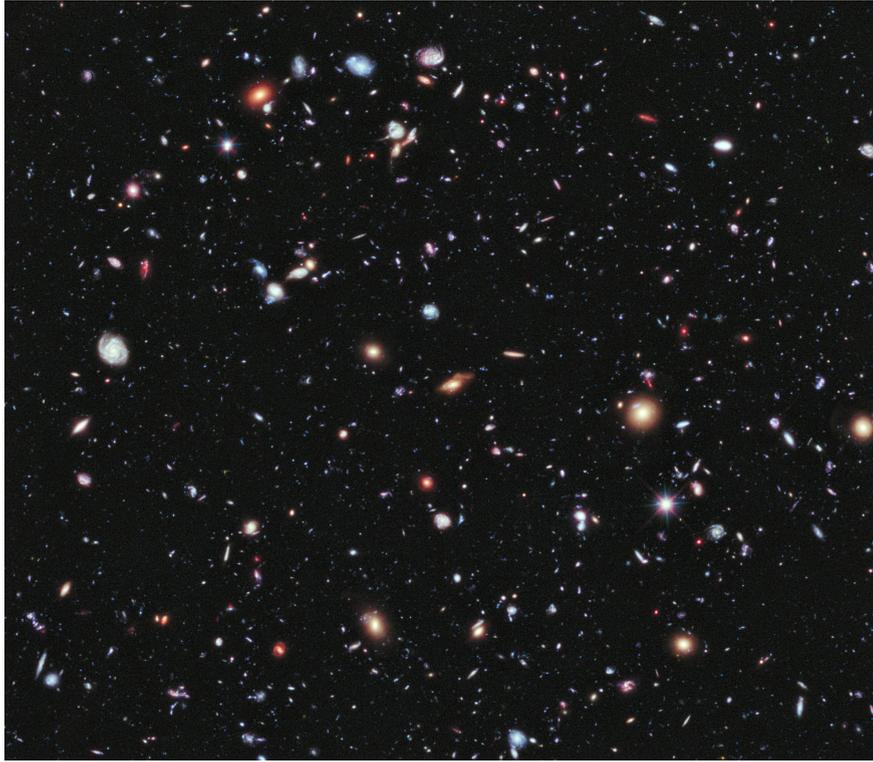


Figura 1.1: Hubble eXtreme Deep Field, por sus siglas en inglés, XDF (Campo Extremadamente profundo del telescopio espacial Hubble). Es una composición de imágenes tomadas por el telescopio espacial Hubble tras 10 años de observaciones. Contiene alrededor de 5,500 galaxias en total.

adquirir ese título de observador inimaginable dejando de lado a la gravedad.

En uno de los experimentos mentales de Einstein, un observador en un ascensor que cayera libremente no pesaría sobre el suelo del ascensor ni notaría ningún efecto gravitatorio. Por eso, a dichos observadores privilegiados se les puede llamar *observadores cayentes*. Para ellos se cumple el principio cosmológico. En cuanto al Universo, estos observadores cayentes se les llama *observadores fundamentales*.

Otra precisión importante para entender el principio cosmológico es la de *tiempo cósmico*. La teoría de la relatividad dice que cada observador tiene su tiempo. Por tanto, podría pensarse que no todos los observadores fundamentales tienen el mismo tiempo. El principio cosmológico equivale a decir que sí, que todos los observadores fundamentales pueden tener el mismo tiempo. Todos los observadores ven el mismo Universo si lo hacen en ese tiempo común a todos ellos. Este tiempo común se le conoce como *tiempo cósmico*. El principio cosmológico, para atenerse a las premisas relativistas, debe entenderse así: *todos los observadores fundamentales ven lo mismo cuando utilizan ese tiempo cósmico común a todos ellos* (Battaner E.; 2015 [2]).

## 1.1. La expansión del Universo

La década de 1920 tuvo uno de los descubrimientos más impresionantes en el área de la física. Edwin Hubble combinó medidas de distancias de galaxias a partir del corrimiento al rojo al alejamiento relativo entre ellas según el Efecto Doppler y descubrió que cuanto más alejada está una galaxia, mayor es su desplazamiento hacia el rojo, esta relación fue una prueba de que el Universo estaba en expansión. La *ley de Hubble* [3] establece que la velocidad “aparente”  $\vec{v}$  de alejamiento entre galaxias es proporcional a su distancia  $\vec{r}$ , esto es

$$\vec{v} = H\vec{r}. \quad (1.1)$$

Las tres cantidades de la ecuación cambian con el tiempo, por lo que se escriben como funciones  $\vec{v}(t)$ ,  $H(t)$ ,  $\vec{r}(t)$ . Para ser precisos  $\vec{r}(t)$  es la *distancia propia*, esto es, la distancia que sería medida entre una galaxia y nosotros en un tiempo  $t$ . La velocidad de recesión  $\vec{v}$  es el ritmo al cual  $\vec{r}$  incrementa, y  $H$ , el *parámetro de Hubble*, es

constante en todo el espacio debido a la homogeneidad. Muchas teorías predicen que cambia con el tiempo,  $H = H(t)$ . En cosmología se le da al valor de la época actual el subíndice cero. Así el parámetro de Hubble al día de hoy, a un tiempo  $t = t_0$  es  $H(t_0) = H_0$ . A esta cantidad se le conoce como *constante de Hubble*.

Para dar un poco más de claridad, es de gran utilidad introducir las llamadas *coordenadas comóviles*. Un sistema de referencia comóvil de una partícula es un sistema de referencia que se mueve junto con una partícula, y por tanto, respecto a un sistema de referencia comóvil una partícula siempre está en reposo. Las coordenadas comóviles se expanden junto con el Universo. Si nuestra galaxia tiene una coordenada comóvil  $\vec{x} = 0$  y otra galaxia tiene una coordenada comóvil  $\vec{x}$ , entonces, la distancia propia hasta ella es

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (1.2)$$

donde  $a(t)$  es llamado el *factor de escala* que depende del tiempo, no de la posición. Puede definirse ahora la velocidad  $\vec{v}$  como

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = H\vec{r}, \quad (1.3)$$

así,

$$\frac{d}{dt}(a\vec{x}) = Ha\vec{x}. \quad (1.4)$$

Por definición, la coordenada comóvil no depende del tiempo, por lo que todo el cambio en  $(a\vec{x})$  se debe solo al factor de escala  $a$ . Esto lleva a cancelar  $\vec{x}$  de nuestra ecuación (1.4) y se tiene entonces la siguiente expresión para el parámetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.5)$$

Por otro lado, la luz de las galaxias y estrellas distantes no es monocromática, sino que tiene diferentes características espectrales propias de los átomos de los gases alrededor de las estrellas. Cuando se examinan las líneas de emisión, se encuentra que están desplazadas hacia el extremo rojo del espectro. Este cambio es por un desplazamiento Doppler y se debe a la expansión del Universo, e indica que esencialmente todas las galaxias se están alejando del observador. Así, el llamado redshift o corrimiento al rojo se define entonces como

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (1.6)$$

siendo  $\lambda_0$  la longitud de onda de una línea espectral de la galaxia y  $\lambda$ , la longitud de onda de esa misma línea espectral medida en la Tierra. Las velocidades se infieren con una fórmula aproximada tal que

$$z \approx \frac{v}{c}.$$

En la actualidad, se observan galaxias con corrimiento al rojo mucho mayor que el indicado en la ecuación (1.6). Para entender esto, se requiere un análisis más profundo sobre la naturaleza del mismo. Al considerar un fotón emitido desde una galaxia hacia una galaxia cercana con una distancia propia  $dr$  (por cercana entiéndase lo bastante próxima para suponer que la diferencia de velocidades entre las galaxias  $dv$  está dada por la fórmula  $dv = cz$ ) entonces el fotón hace su viaje en un tiempo  $dt = dr/c$ , durante este periodo, el factor de escala incrementa una pequeña cantidad  $da = \dot{a}dt$ . La velocidad relativa entre las galaxias es entonces

$$d\vec{v} = H d\vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} c dt = c \frac{da}{a}. \quad (1.7)$$

El pequeño cambio en la longitud de onda se escribe como  $\lambda - \lambda_0 = d\lambda$ ; sustituyendo esto y la fórmula de velocidad-redshift, se obtiene

$$c \frac{da}{a} = d\vec{v} = cz = c \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (1.8)$$

Esto es, en el pequeño intervalo de tiempo  $dt$ , el cambio fraccional en la longitud de onda es la misma que el crecimiento fraccional en el Universo. Ahora, suponga que el fotón rebasa a la segunda galaxia y viaja un largo camino a través del Universo antes de ser detectado en una tercera galaxia (la Vía Láctea, por ejemplo). La misma formulación de las ecuaciones (1.7) y (1.8) puede hacerse para cualquier segmento pequeño de su camino, la longitud de onda y el factor de escala seguirán siendo proporcionales  $\lambda \propto a$ , es decir

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{t_0}{t_{em}}. \quad (1.9)$$

¡El fotón se expande en la misma proporción que lo hace el Universo! El significado profundo del corrimiento al rojo cosmológico escrito como

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \quad (1.10)$$

es que  $(1+z)$  indica cuánto se ha expandido el Universo desde que la luz fue emitida. Aunque se hizo uso del efecto Doppler en el argumento, el resultado de añadir todos los efectos infinitesimales es muy diferente al de uno muy grande. Por ejemplo, el corrimiento al rojo no depende de la velocidad  $v(t)$ , ni en el presente  $t_0$  ni en la época de emisión ( $t_{em}$ ). Para comprobarlo, suponga que el Universo no estuvo expandiéndose cuando el fotón fue emitido, i.e.  $H(t_{em} = 0)$ , así,  $\vec{v}(t_{em}) = 0$ . El Universo empieza su expansión, pero se detiene nuevamente antes de que el fotón llegue a su destino, es decir  $\vec{v}(t_0) = 0$ . El fotón aún tendría un corrimiento al rojo porque la expansión ocurrió mientras estaba en movimiento.

Todo esto indica que altos corrimientos de galaxias distantes no necesariamente implica que las velocidades de recesión son mayores a la velocidad de la luz. Como se esperaba, la ecuación  $cz = H\vec{r}$  es sólo válida para corrimientos pequeños. Examinando nuevamente la ecuación (1.1), que como se puntualizó, siempre es cierta para *cualquier* separación, entonces si un observador fuese suficientemente lejos,  $\vec{v}$  sería más rápida que la velocidad de la luz. Los fotones emitidos desde esa distancia no lo alcanzarían, a menos que el Universo empezara a desacelerar en algún tiempo en el futuro. Esto supone un problema, ya que el observador no podría ser capaz de observar los fotones emitidos desde la galaxia hace miles de millones de años.

Algunos cosmólogos trataron de evitar esta conclusión diciendo que el valor del incremento en la distancia propia no es una velocidad “real” (Eddington; 1933 [4]); argumentan que es el espacio entre las galaxias el que se está expandiendo, mientras las galaxias están más o menos en reposo (Liddle & Lyth; 2000 [5]). En efecto, esta aproximación prefiere distancia comóvil a distancia propia. A veces es útil pensar de esta manera, pero no hay diferencia, al menos físicamente entre dos galaxias “realmente” separándose unas de otras y dos galaxias estacionarias con la intervención de la expansión del espacio. Ambas son descripciones equivalentes de la Relatividad General.

## Ecuaciones de Einstein

La Relatividad General está conformada esencialmente por 10 ecuaciones diferenciales parciales no lineales y acopladas, las cuales rigen la física de los sistemas gravitacionales. Para trabajar en el marco de la relatividad general, se inicia introduciendo una variedad 4–dimensional con vectores base  $e_\mu$ , dotada de una métrica (espacio pseudo–riemanniano) de la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.11)$$

la cual definirá los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , los cuales describen la variación de los vectores de una base  $e_\mu$ . Es decir, la derivada covariante del vector de la base  $e_\mu$  a lo largo del vector de la base  $e_\nu$ , es un nuevo vector de componentes  $\nabla_{e_\nu} e_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_\alpha$ . En una variedad con una métrica definida, los símbolos de Christoffel se determinan completamente a partir de la métrica  $g_{\alpha\beta}$  [6] como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}),$$

a partir de los cuales se define el tensor de Riemann  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha,$$

así como el tensor de curvatura y el escalar de curvatura de Ricci que son contracciones del tensor de Riemann y que respectivamente están dados por

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} R_{\mu\alpha\nu}^\alpha,$$

$$R = \sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Las ecuaciones de Einstein determinan las características del espacio–tiempo definido por la métrica

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.12)$$

donde  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\alpha\beta}$  es el tensor métrico y  $\Lambda$  es la constante cosmológica. En presencia de materia y energía, las ecuaciones de campo de Einstein se convierten en

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

donde  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento y  $\kappa$  es una constante, cuyo valor es  $\kappa = 8\pi G/c^4$ .

## Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Basados en la suposición de homogeneidad e isotropía, las ecuaciones de movimiento del Universo se pueden deducir de la siguiente forma. Sean dos eventos en el espacio-tiempo, uno ocurriendo en el punto localizado en  $(t, r, \theta, \phi)$  y otro ocurriendo en el punto localizado en  $(t+dt, r+dr, \theta+d\theta, \phi+d\phi)$ . La separación espacio-temporal entre estos dos eventos es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.14)$$

donde

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

La métrica descrita por la ecuación (1.14) es llamada *métrica de Minkowski*, y el espacio-tiempo que ella describe es el de Minkowski. De la teoría de la relatividad general se sabe que el camino que describe un fotón en un espacio-tiempo es una *geodésica* y que para cualquier espacio-tiempo, ésta debe ser *nula*, es decir  $ds = 0$ . En un espacio-tiempo de Minkowski, la trayectoria de un fotón obedece la relación

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.15)$$

Si el fotón se mueve de forma radial alejándose del origen, lo que significa que  $\theta$  y  $\phi$  son constantes, entonces

$$c^2 dt^2 = dr^2, \quad (1.16)$$

es decir

$$\frac{dr}{dt} = \pm c. \quad (1.17)$$

La métrica de Minkowski dada por la ecuación (1.14) aplica solamente dentro del contexto de la relatividad especial, sin efectos gravitacionales, el resultado será una métrica que es plana. Al añadir la gravedad, sin embargo, el espacio-tiempo toma una forma más interesante. En la década de 1930 los físicos Howard Robertson y Arthur Walker llegaron a un resultado, de manera independiente, que se conoció como la *métrica de Robertson-Walker* y cuya forma es generalmente conocida como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (1.18)$$

donde  $k > 0$ ,  $k = 0$  o  $k < 0$ . Todos los modelos homogéneos e isótropos tienen esta forma. Para  $k > 0$  se tiene un espacio-tiempo con curvatura positiva y se llaman modelos *cerrados*. Para  $k = 0$  se tiene un espacio-tiempo Euclideo o *plano*. Por último, para  $k < 0$  se tiene un espacio-tiempo con curvatura negativa y a estos modelos se les llama *abiertos* (Figura 1.2).

A escalas pequeñas, sin embargo, se ha observado que el Universo *no* es homogéneo. Por lo que la métrica de Robertson-Walker es sólo una aproximación que es buena para escalas mayores. En un sentido cosmológico, las ecuaciones de Einstein pueden usarse para encontrar una relación entre el factor de escala  $a(t)$ , la curvatura  $\kappa$ , y los contenidos de densidad de energía  $\epsilon(t)$  y presión  $p(t)$  del Universo. Las ecuaciones que hacen esto posible son las *Ecuaciones de Friedmann*, encontradas por Alexander Alexandrovich Friedmann en 1922, sorprendentemente 7 años antes de los trabajos publicados por Hubble y en ellas ya consideraba que un Universo homogéneo e isótropo se expandía como función del tiempo.

Recordando la ley de Hubble (1.1) la ecuación de Friedmann puede escribirse de la siguiente manera

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)}, \quad (1.19)$$

con  $H(t) \equiv \dot{a}/a$ .

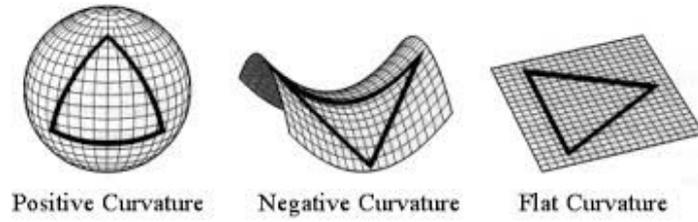


Figura 1.2: Geometría del espacio-tiempo según el tipo de curvatura.

En la época actual, el valor del parámetro de Hubble es

$$H_0 = H(t_0) = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{t=t_0} = (70 \pm 7) \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}, \quad (1.20)$$

a esta cantidad  $H_0$  se le conoce como constante de Hubble. Así, la ecuación de Friedmann en la época actual es ( $a(t) = 1$ )

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 - kc^2. \quad (1.21)$$

La expresión anterior ofrece una relación entre  $H_0$ , la cual dice la rapidez de expansión,  $\rho_0$ , la densidad de energía actual, y  $\kappa$ , que indica la curvatura actual. Esta ecuación es válida para todo Universo con una métrica de Robertson–Walker gobernada por las reglas de la relatividad general. En un Universo plano ( $k = 0$ ) la ecuación de Friedmann se reduce a

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho(t). \quad (1.22)$$

Así, para un valor dado del parámetro de Hubble, existe una *densidad de energía crítica* dada por

$$\epsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H^2(t). \quad (1.23)$$

Si la densidad de energía  $\epsilon(t)$  es mayor a este valor, el Universo tiene curvatura positiva ( $k = +1$ ). Si  $\epsilon(t)$  es menor a este valor, el Universo tiene curvatura negativa. Dado que se tiene un valor actual del parámetro de Hubble, se puede calcular la densidad crítica directamente de (1.23)

$$\epsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 = (8.3 \pm 1.7) \times 10^{-10} \text{J m}^{-3} = 5200 \pm 1000 \text{MeV m}^{-3}, \quad (1.24)$$

que suele escribirse de manera más común en términos de la *densidad de masa crítica* como

$$\rho_{c,0} \equiv \epsilon_{c,0}/c^2 = (9.2 \pm 1.8) \times 10^{-27} \text{kg m}^{-3} = (1.4 \pm 0.3) \times 10^{11} M_\odot \text{Mpc}^{-3}, \quad (1.25)$$

donde  $M_\odot$  denota una cantidad conocida como *Masa solar* y su valor es  $M_\odot = 1.989 \times 10^{30} \text{kg}$ . Se ha supuesto, basados en el principio cosmológico, que el Universo es homogéneo e isótropo. Para resolver las ecuaciones de campo de Einstein bajo esa suposición se requiere un tensor de energía–momento que sea también homogéneo e isótropo. La forma más general es la de un tensor para un fluido perfecto, que se escribe como [7, 8]

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}, \quad (1.26)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa propia del fluido,  $u_\mu$  es la cuadrivelocidad y  $p$  es la presión ( $p > 0$ ) o la tensión ( $p < 0$ ). La homogeneidad implica que la presión y la densidad deberían ser independientes de la posición y sólo deberían depender del tiempo. Para la métrica descrita en la ecuación (1.18), este tensor es diagonal

$$T_{\alpha\beta} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (1.27)$$

Insertando este resultado en las ecuaciones de campo de Einstein (1.13), tomando además  $\Lambda = 0$  y normalizando ( $c = 1$ ) se tiene que

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi G\rho, \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi Gp. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Esta es otra forma de escribir las ecuaciones de Friedmann, sin la constante cosmológica. Al combinar ambas ecuaciones se tiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (1.29)$$

donde la energía gravitacional efectiva viene dada por  $(\rho + 3p)$ , de donde se observa que la presión también contribuye a la gravitación. Se puede deducir también una ecuación que relacione a la energía, la presión y el factor de escala. Usando la conservación de la energía, al diferenciar la ecuación (1.28) conduce a la expresión siguiente

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (1.30)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (1.31)$$

Considerando un volumen comóvil  $V = a^3$  e interpretando  $\rho a^3 = U$  como la energía en el volumen comóvil, se obtiene que

$$dU + pdV = 0. \quad (1.32)$$

Recordando que la primera ley de la termodinámica, establece que para un fluido en equilibrio se cumple la relación

$$TdS = dU + pdV, \quad (1.33)$$

donde  $T$  es la temperatura y  $S$  es la entropía del fluido. Un proceso en el cual el cambio en la entropía es  $dS = 0$  es llamado *adiabático*. La ecuación (1.32) muestra que el modelo homogéneo e isotrópico se expande de forma adiabática. Esto no es extraño ya que la propia homogeneidad e isotropía implican que no haya gradientes de temperatura y no haya flujo de calor.

Si además se asume que el fluido perfecto obedece la ecuación de estado barotrópica, es decir, que la presión sea proporcional a la densidad

$$p = w\rho, \quad (1.34)$$

la ecuación (1.31) se reescribe como sigue

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + wp\frac{d}{dt}a^3 = 0, \quad (1.35)$$

cuya solución es

$$\rho a^{3(w+1)} = \rho_0, \quad (1.36)$$

donde  $\rho_0$  es el valor de la densidad en la época presente. De esta forma,  $w$  puede tomar diferentes valores que dependen de la época en la cual se esté considerando, esto es, existe una única presión para cada densidad dependiendo de la época:

- Época actual (polvo)  $\rightarrow p = 0$ .
- Época dominada por la radiación  $\rightarrow p = 1/3\rho$ .

Las ecuaciones de Friedmann (1.28) para un Universo dominado por un fluido perfecto con ecuación de estado dada por (1.34) pueden escribirse entonces como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^{3(w+1)}} - \frac{k}{a^2}. \quad (1.37)$$

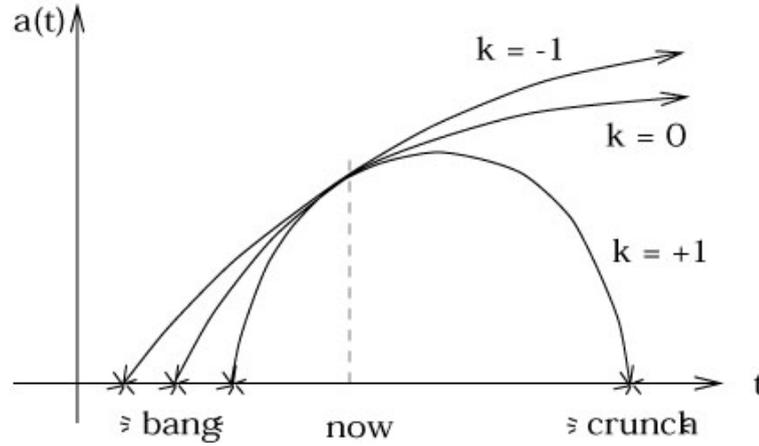


Figura 1.3: El factor de escala cosmológico  $a(t)$  para modelos de Universo abierto ( $k = -1$ ), plano ( $k = 0$ ) y cerrado ( $k = 1$ ).

Si  $w > -1/3$  esta última ecuación indica que la evolución y posible destino del Universo dependerá de la curvatura espacial. Un Universo plano y uno con curvatura negativa se expandirán indefinidamente, mientras que un Universo con curvatura positiva detendrá su expansión y empezará a contraerse en algún punto. Si  $w < -1/3$  la expansión seguirá para cualquier tiempo independientemente de la curvatura. Y el caso límite  $w = -1/3$ , representa un Universo con velocidad de expansión  $\dot{a}$  constante (Figura 1.3). Las ecuaciones de Friedmann (1.28) se pueden expresar de una forma más general en términos de la densidad relativa a la densidad crítica. La densidad crítica se denota como  $\Omega$  y se le llama *parámetro de densidad* o *densidad relativa*, es decir

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (1.38)$$

además se puede definir un parámetro de curvatura espacial dado por

$$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H^2 a^2}. \quad (1.39)$$

Insertando estos valores en la ecuación de Friedmann (1.28) se tiene lo siguiente

$$\Omega + \Omega_k = 1, \quad (1.40)$$

donde  $\Omega$  es la densidad total relativa de energía y materia. Dado que para un modelo de Universo abierto,  $\Omega_k < 0$ , un modelo plano  $\Omega_k = 0$  y un modelo cerrado  $\Omega_k > 0$ , se tienen entonces los siguientes valores para  $\Omega$

$$\Omega \begin{cases} > 1, & \text{para } k > 0, \\ = 1, & \text{para } k = 0, \\ < 1, & \text{para } k < 0. \end{cases} \quad (1.41)$$

Las ecuaciones de Friedmann describen la cantidad de materia contenida en el Universo y determinan su geometría. En las siguientes secciones se describirán un par de modelos que utilizan estos parámetros para estudiar estas propiedades.

## 1.2. Modelos de evolución cosmológica

El primer intento de aplicar la relatividad al Universo se debió al propio Einstein. Aunque con este primer intento se llegaba a la “absurda” conclusión de que el Universo estaba en expansión (o bien en contracción, que es una expansión negativa). Para conseguir un Universo estático, Einstein admitió el llamado *término cosmológico* o *constante cosmológica*, lo que hoy se interpretaría como una forma de energía oscura. Este término le daba al Universo una facultad expansiva que contrarrestaba la autogravitación de todo el Universo, evitando la coalescencia y consiguiendo una situación estática. Lo más novedoso de aquella deducción era que, al contrario de la gravitación newtoniana, que era generada por la masa, esta fuerza expansiva del término cosmológico era generada por el vacío, y quizá como consecuencia, constante en el tiempo.

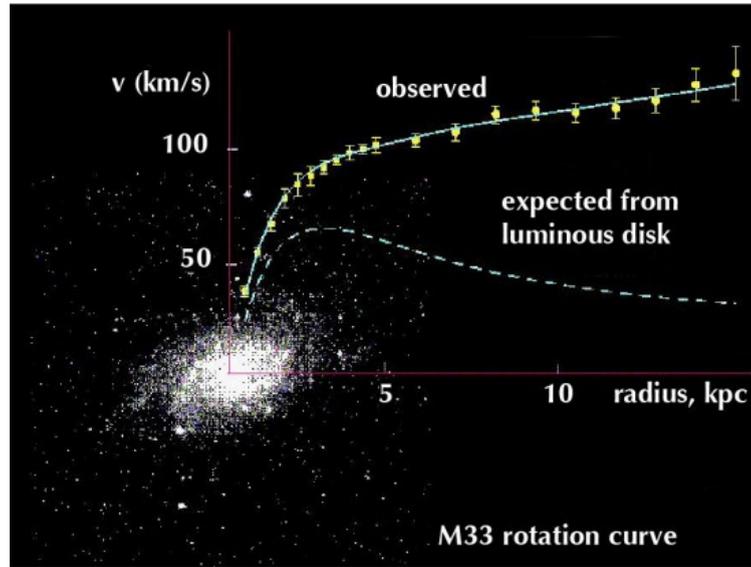


Figura 1.4: Curva de rotación de la galaxia M33 (Triangulum). Se observa una discrepancia entre la medición real y el cálculo usando las leyes newtonianas.

Iniciando con el modelo del Universo de Einstein, existieron también otros modelos de evolución cosmológica, por ejemplo el modelo FLRW ya explicado en la sección anterior. Sin embargo las observaciones hechas en las galaxias mostraban que había un tipo de materia “faltante” en el Universo, lo cual llevó a rediseñar el pensamiento sobre la evolución del Universo. Para la década de 1930, el astrofísico Fritz Zwicky [9] examinó la dinámica interna del cúmulo de galaxias Coma Berenice. En dicha publicación, Zwicky proporciona evidencia de que la masa luminosa en el cúmulo era mucho menor que el total de masa necesaria para mantener a estas galaxias unidas gravitacionalmente. Debía existir otro tipo de materia que permitiera que este conjunto de galaxias se mantuviese unido. En esa época ya se tenían los primeros indicios de la *materia oscura*.

A pesar de numerosas contribuciones de la comunidad científica, el tema de la materia oscura no fue considerado seriamente hasta la época de 1970, cuando la astrónoma Vera Cooper Rubin [10] indicó que la estabilidad gravitacional de las galaxias es debido a una cantidad de masa mayor a la observada. En su trabajo, calcula las curvas de rotación de distintas galaxias espirales, las cuales miden la velocidad radial de las estrellas dentro de las galaxias en función de su distancia hacia el centro de las mismas, como se observa en la siguiente ecuación

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (1.42)$$

De acuerdo a las leyes de Newton, se esperaría que dicho movimiento tuviese un comportamiento Kepleriano, es decir, que la velocidad de las estrellas fuese decayendo conforme la distancia era mayor. La gran sorpresa sobre estas observaciones fue que esta curva no obedecía el comportamiento kepleriano, si no que la velocidad de las estrellas permanecía casi constante e incluso, en algunos casos, aumentaba (Figura 1.4). Si la teoría de Newton era correcta, entonces lo que hacía falta era materia para poder explicar este extraño comportamiento. Esto fue un gran impacto para la física y la astronomía, ya que esta evidencia conlleva a crear modelos que incluyan esta *materia oscura* en las galaxias y, por tanto también en el Universo.

## Radiación del fondo cósmico de microondas

Otro fenómeno importante para el desarrollo de los modelos de evolución es la *Radiación del Fondo Cósmico de Microondas* o por sus siglas en inglés *Cosmic Microwave Background* (CMB). El CMB es un tipo de radiación de alrededor de 380,000 años después del comienzo del Universo. Antes de este tiempo, el Universo era tan caliente y denso que era opaco para toda la radiación. Ni siquiera los átomos simples podrían formarse sin ser instantáneamente desgarrados en sus protones y electrones constituyentes por la radiación intensa. El Universo estaba hecho de un tipo de “plasma”, o gas ionizado.

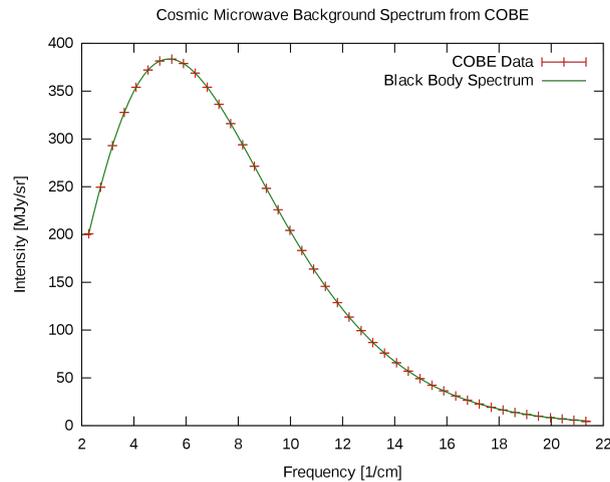


Figura 1.5: Espectro de radiación del CMB medido por el satélite COBE. Este espectro tiene características que lo asemejan cuerpo negro.

Esta radiación fue detectada por primera vez por Arno Penzias y Robert Wilson [11] en 1965 y es una de las pruebas más contundentes a favor del Big Bang. En particular, la teoría del Big Bang predice ciertas características para la radiación en épocas primitivas que han sido confirmadas por el CMB:

1. La dispersión múltiple de fotones por un plasma caliente en el Universo temprano debería dar como resultado un espectro de cuerpo negro para los fotones una vez que han escapado en la época de reionización. Esto es exactamente lo que se observa para el CMB.
2. Los fotones del CMB se emitieron en la época de recombinación cuando el Universo tenía una temperatura de aproximadamente 3.000 Kelvin. Sin embargo, han sido desplazados cosmológicamente hacia el rojo a longitudes de onda más largas durante su viaje en un Universo en expansión, y ahora se detectan en la región de microondas del espectro electromagnético a una temperatura promedio de 2.725 K. Esto está de acuerdo con lo que predice la teoría del Big Bang.

En la década de 1990, el satélite COBE midió el CMB y ayudó a establecer varias cosas. En primer lugar, el CMB es casi completamente uniforme, con una temperatura casi constante. El que no sea constante es debido a que hubo pequeñas fluctuaciones en la temperatura, al nivel de una sola parte en 100,000.

En las últimas dos décadas, muchos experimentos han medido las pequeñas fluctuaciones de CMB, tales como WMAP en 2007 [12]. Estas fluctuaciones están ahí debido a variaciones en la densidad del Universo inmediatamente después del Big Bang. Cualquier región que sea ligeramente más densa tiende a atraer más materia, lo que hace que se vuelva aún más densa, atrayendo más material. Este proceso fuera de control es lo que llevó a la formación de las primeras estrellas y galaxias. Las propiedades de las fluctuaciones se han utilizado para ayudar a determinar la edad del Universo, de qué está hecho e incluso cómo podría terminar. En el año 2013 la misión Planck [13] proporcionó la imagen más detallada hasta ahora del Universo a solo 380,000 años después del Big Bang.

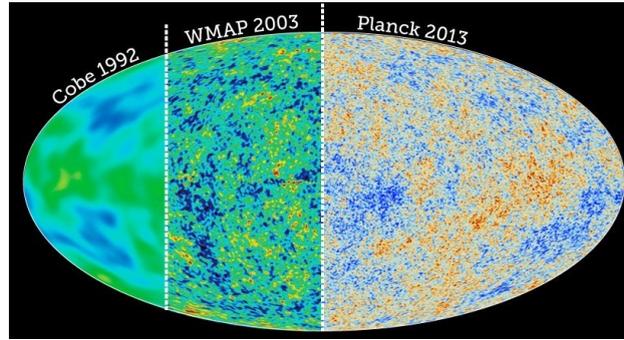


Figura 1.6: Comparación del CMB medido por las misiones COBE (1992), WMAP (2003) y Planck (2013). Las imágenes tienen una temperatura promedio de 2.725 K y las zonas que se aprecian diferentes son las fluctuaciones después de inflación responsables de originar las galaxias.

### 1.2.1. Lambda Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM)

Aunque la primera evidencia de materia oscura fue deducida en la década de 1930, no fue hasta la década de 1980 que los astrónomos y físicos predijeron que la materia oscura es necesaria para explicar la dinámica de las galaxias y los cúmulos de galaxias de manera gravitacional.

El modelo *Lambda Cold Dark Matter* ( $\Lambda$ CDM) es una parametrización del modelo del Big Bang Cosmológico. Su aceptación ha sido tal que ha llegado a ser denominado el “modelo estándar de la cosmología” y se fundamenta principalmente, sobre las siguientes bases teóricas y experimentales.

1. Un marco teórico basado en la teoría general de la relatividad, que proporciona la teoría del campo gravitatorio en escalas cosmológicas.
2. El principio cosmológico. Requisito indispensable para cualquier modelo cosmológico.
3. El modelo de fluidos, que considera a las galaxias como constituyentes básicos del Universo, las incluye en la teoría mediante la ecuación de fluido (ecuación (1.31)).
4. La Ley de Hubble, que establece la expansión del Universo con una velocidad de recesión de las galaxias proporcional a su distancia.
5. La Radiación del Fondo Cósmico de Microondas. Los resultados del CMB coinciden con el principio cosmológico.
6. La concordancia de los distintos métodos de estimación de la edad del Universo [14].
7. La determinación de la abundancia relativa de elementos primigenios  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{D}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  y  $^7\text{Li}$  formados en las reacciones nucleares en la época de la Big Bang Nucleosíntesis (BBN) [15, 16, 17].
8. El análisis de la estructura a gran escala del Universo, mediante experimentos como el *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) [18], que atestiguan la homogeneidad y ayudan a la determinación de los distintos parámetros del modelo estándar.

#### Otras características del modelo estándar

Además de basarse en los anteriores pilares básicos,  $\Lambda$ CDM incorpora algunas características especiales a fin de explicar la evolución y la estructura actual del Universo:

- Perturbaciones a la densidad. También conocidas como fluctuaciones de densidad o fluctuaciones cuánticas, son las responsables de la formación de las grandes estructuras del Universo [19].
- La *Inflación* [20], una expansión acelerada, propuesta originalmente por Alan Guth, y que explica la planitud y la homogeneidad actuales del Universo.
- El Hot Big Bang, origen extremadamente caliente que da lugar a la BBN.

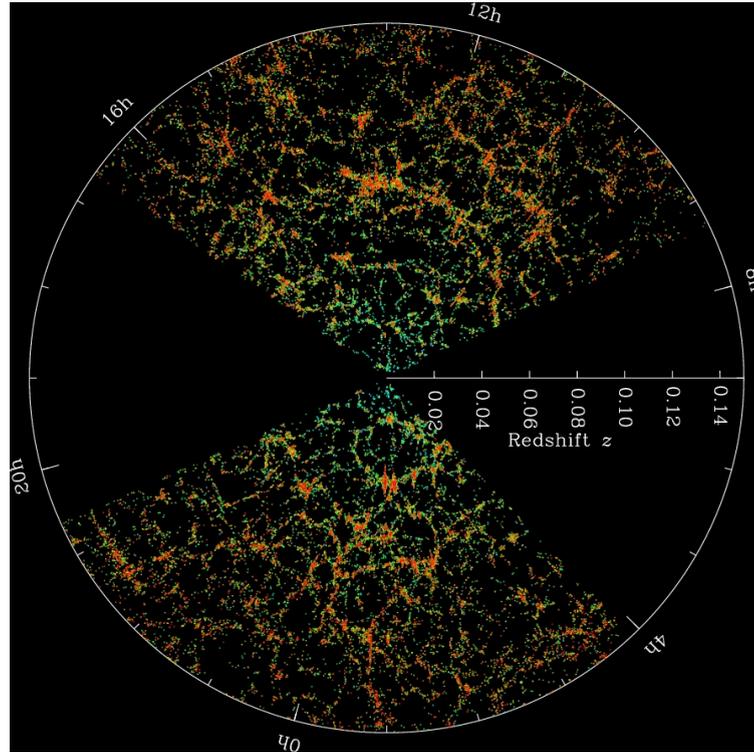


Figura 1.7: Mapa tridimensional obtenido a partir del muestreo SDSS de la distribución de galaxias, con el Sistema Solar en el centro. Cada punto indica una galaxia mientras que el color representa la edad de las estrellas en las galaxias, siendo las rojas las estrellas más viejas. Esta imagen representa la gran cantidad de galaxias que han sido contabilizadas a corrimientos al rojo relativamente bajos ( $z \sim 0.02 - 0.014$ ).

- La *constante cosmológica*  $\Lambda$ , que Einstein introdujo en las ecuaciones de la relatividad general, originalmente para forzar un Universo estático. Hoy, al saber que el Universo está expandiéndose y de forma acelerada, se le denomina *energía del vacío* o *energía oscura* [21]. Recordando la ecuación (1.18) al introducir el parámetro  $\Lambda$  se tiene que

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.43)$$

- La *materia oscura fría*, Cold Dark Matter (CDM). Un tipo de materia que debe actuar de forma exclusivamente gravitatoria, que es oscura o *transparente* (no interactúa con ningún tipo de materia bariónica o radiación) y que no debe moverse a velocidades relativistas (es fría).

### 1.2.2. Otros candidatos a materia oscura

Con el paso de los años, las observaciones del Universo son cada vez más precisas y con éstas, la presencia de la materia oscura es más evidente [22]. Se sabe que se agrupa formando halos galácticos y que es la responsable de la formación a gran escala del Cosmos. Descifrar la naturaleza de la materia oscura es una tarea para físicos de partículas y cosmólogos por igual, ya que las partículas elementales son los principales candidatos a materia oscura en el Universo, algunos de ellos son:

- *Materia oscura auto-interactuante (SIDM)*: Las partículas de materia oscura fría tienen auto-interacción con poca disipación o aniquilación (Spergel & Steinhardt; 2000 [23]).
- *Materia oscura tibia (WDM)*: Las partículas se mueven a velocidades altas pero no relativistas, los halos de materia oscura se forman en épocas similares a CDM pero se forma menos subestructura en simulaciones de  $N$ -cuerpos (Colín et al.; 2000 [24]).

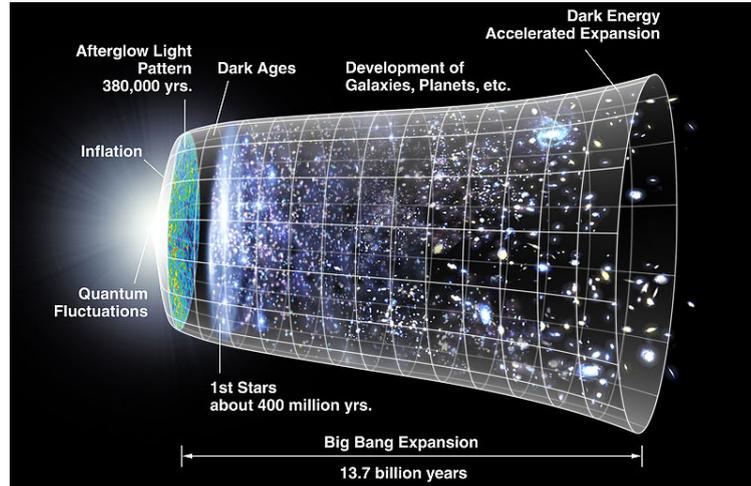


Figura 1.8: Ilustración de la línea de tiempo que detalla el origen del Universo según la teoría del Big Bang. Se observan las fluctuaciones cuánticas que dan origen a las fluctuaciones de densidad que generaron a las galaxias en el Universo, la expansión acelerada o Inflación, el fondo cósmico de microondas, Big Bang Nucleosíntesis, desarrollo de galaxias y planetas hasta lo que se observa el día de hoy.

- **Materia oscura repulsiva (RDM)**: la materia oscura se comporta como un condensado de bosones masivos que interactúan por un potencial repulsivo entre partículas además de la gravedad, lo cual conduce a un comportamiento de superfluidez (Goodman, J.; 2000 [25]).
- **Materia oscura difusa (FDM)**: Las partículas están compuestas de partículas ultra-ligeras, similares a materia oscura escalar, con la adición de un término de autointeracción entre la materia oscura (Hu et al.; 2000 [26]).
- **Materia oscura auto-aniquilante (SADM)**: La aniquilación de materia oscura permite suavizar los perfiles CUSP de halos galácticos (Kaplinghat et al.; 2000 [27]).
- **Materia oscura que decae (DDM)**: La formación de estructura en  $z \sim 2$  mejora para el modelo de DDM (Cen, R.; 2000 [28]).

## WIMP

Los *Weak Interactive Massive Particles* (WIMP) son candidatos a materia oscura fría. Estas partículas solo interactúan de manera gravitacional con la materia bariónica y están predichas por teorías de unificación. En la mayoría de los modelos de partículas, la partícula supersimétrica más conocida es el *neutralino*, el cual posee características que coinciden con las de un WIMP: Es estable, no tiene carga eléctrica, sus interacciones son solo de tipo débil, su masa está en un rango adecuado para que se produzca con abundancia necesaria y da lugar a materia oscura fría (Ellis, J.; 2007 [29]).

## Modificaciones a la teoría newtoniana

En 1983, Mordehai Milgrom propone que la teoría newtoniana debe modificarse para aceleraciones pequeñas ( $a_0 \approx 1.2 \pm 0.1 \times 10^{-10} \text{m/s}^2$ ), y que la física de Newton es sólo una buena aproximación para aceleraciones mayores a  $a_0$  [30]. Esta modificación conduce a que la segunda ley de Newton debe replantearse para pequeñas aceleraciones de la siguiente manera

$$\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}. \quad (1.44)$$

Esta modificación permite explicar muchos datos observados sin recurrir a postular materia oscura no-bariónica. Su rango de aplicabilidad y éxito es muy amplio: desde galaxias enanas esferoidales hasta supercúmulos galácticos.

### 1.2.3. Espectro de potencias de masa y fluctuaciones de densidad

Debido a la gran cantidad de propuestas que existen sobre modelos de materia oscura, una manera de organizarlos es usando la cantidad misma de materia oscura contenida en el modelo, ya que los parámetros cosmológicos pueden cambiar de gran manera dependiendo del modelo de materia oscura considerado.

Se sabe que las galaxias se acumulan en grupos distribuidos en el espacio, la función de correlación de galaxias es una medida del grado de este acumulamiento en una distribución espacial o angular. El espectro de potencias de masa (Mass Power Spectrum) es la transformada de Fourier de dicha función de correlación, descrita por [31]

$$dP = \bar{n}^2(1 + \xi(r_{12}))dV_1dV_2, \quad (1.45)$$

donde  $dV_1$  y  $dV_2$  son elementos de volumen de la distribución de galaxias separadas por una distancia  $r$ ,  $\bar{n}$  es la densidad media de las galaxias y  $\xi(r)$  es la distribución espacial. El espectro de potencias  $P(k)$  se relaciona con esta función de correlación de dos puntos (ecuación (1.45)) mediante la expresión

$$\xi(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} \quad (1.46)$$

La escala de la longitud de onda  $\lambda$  de una fluctuación se relaciona con el número de onda  $k$  como  $k = 2\pi/\lambda$ .

El espectro de potencias es la cantidad predicha directamente de las teorías de formación a gran escala del Universo, en el caso de un campo de densidades en el cual las fluctuaciones provengan de una distribución Gaussiana, el espectro de potencias ofrece una descripción estadística completa de estas fluctuaciones.

La amplitud de las fluctuaciones en diferentes escalas de longitud o equivalentemente en diferentes escalas de masa se describe con el espectro de potencias. El espectro primordial usualmente se asume como una ley de potencias dependiente de la escala  $P(k) \propto k^n$  y una elección particular es la de invariante de escala con índice espectral  $n = 1$ , en este caso, las fluctuaciones en diferentes escalas corresponden a la misma amplitud de fluctuaciones del campo gravitacional.

Por otra parte, las fluctuaciones crecen de diferente manera en diversas escalas. Esta tasa de crecimiento se debe a una interacción entre la autogravitación, la presión y otros procesos de relajación. Estos efectos conducen a modificar el espectro primordial expresándolo en términos de una función de transferencia  $T(k, z)$  como sigue

$$P(k, z) = A(z)k^n T(k, z). \quad (1.47)$$

El factor de normalización  $A(z)$  se determina observacionalmente. Existen muchos procesos teóricos que determinan este espectro, tales como las fluctuaciones de grandes escalas, las fluctuaciones dentro del horizonte, es decir la región donde la densidad de radiación es la responsable de la expansión del Universo mientras éste se va enfriando hasta que la densidad de materia y radiación es la misma.

Después del corrimiento al rojo en el cual la densidad de materia y radiación es la misma, las fluctuaciones de materia oscura pueden crecer de manera gravitacional, dado que no interactúa con la radiación.

Es así que utilizando el modelo estándar cosmológico y observaciones hechas, por ejemplo con la misión WMAP3 o COBE, el espectro de potencias ofrece restricciones a las cotas de los diversos parámetros cosmológicos del modelo, su contenido de materia y el tiempo estimado para el cuál la materia oscura empezó a formar galaxias debido a las fluctuaciones a la densidad (Figura 1.9).

La Figura 1.10 resume la viabilidad de diferentes modelos de CDM, basados en mediciones del CMB y estimaciones de las fluctuaciones del espectro de potencias actual. Aquí se observa que el modelo sCDM es viable solo para valores pequeños de la constante de Hubble (menor que  $55 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ); la región de validez para  $\tau$ CDM es similar a la de sCDM con valores de hasta  $65 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ . El modelo  $\nu$ CDM tiene valor aproximado de  $H_0 \sim 60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , mientras que el modelo  $\Lambda$ CDM tiene los valores más altos para la constante de Hubble al día de hoy.

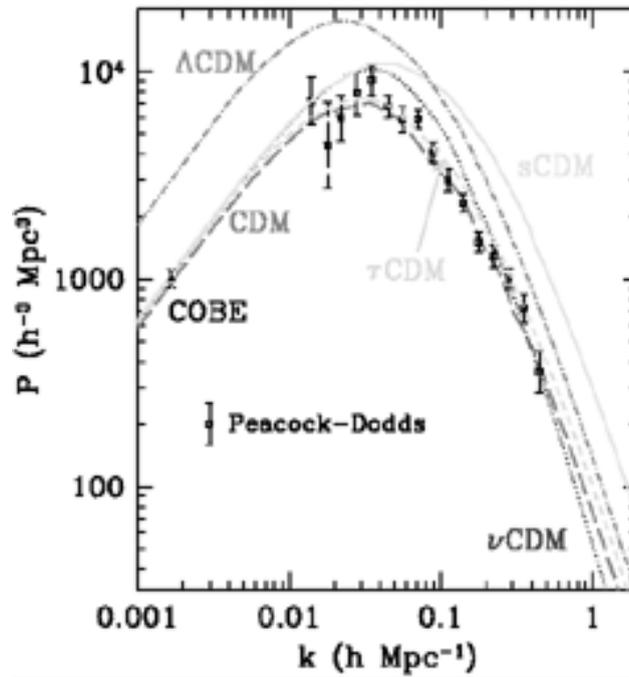


Figura 1.9: El espectro de potencias de fluctuaciones medido en la actualidad, obtenido de la luz de las galaxias a partir de corrimientos al rojo aproximados a  $z \sim 0$ . Las curvas corresponden a diversos modelos de materia oscura. Por ejemplo, la relación entre el espectro de potencias y las anisotropías obtenidas del CMB es diferente para distintos modelos de CDM, pero el espectro de  $\Lambda$ CDM concuerda muy bien con las observaciones de COBE (Peacock & Dodds; 1994 [32]).

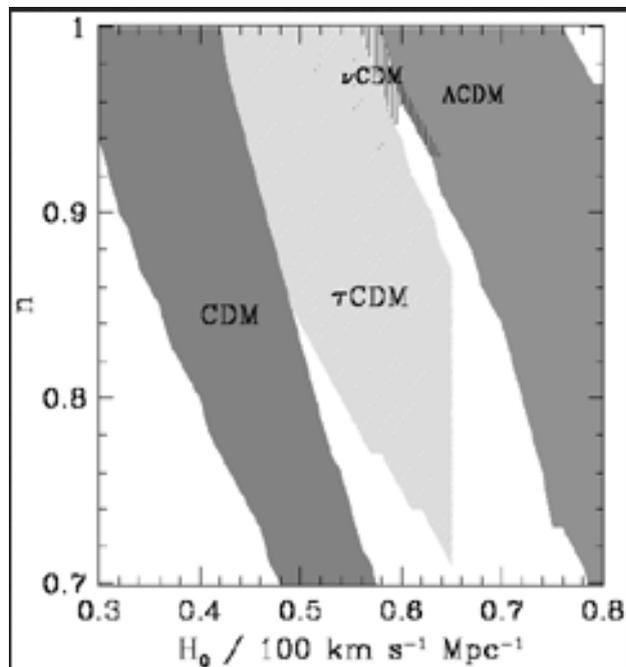


Figura 1.10: Valores aceptados de la constante de Hubble al día de hoy ( $H_0$ ) de diversos modelos de materia oscura, caracterizados por su contenido de materia. CDM simple (sCDM), CDM con constante cosmológica ( $\Lambda$ CDM), CDM con bariones y radiación ( $\nu$ CDM) y CDM con partículas relativistas ( $\tau$ CDM) (Dodelson et al. 1996 [33]).

## Problemas con el modelo estándar cosmológico

El modelo  $\Lambda$ CDM describe satisfactoriamente la expansión acelerada del Universo, explica la radiación del CMB y otorga un marco de referencia dentro del cual es posible entender la homogeneidad e isotropía en el Universo. También describe las características del origen, naturaleza y evolución de las fluctuaciones de densidad que se cree son las responsables de la formación de las galaxias y cúmulos de galaxias además de las estructuras a gran escala en el Universo. Hasta ahora  $\Lambda$ CDM es consistente con la abundancia de los cúmulos observados en  $z \sim 0$ , predice un cambio relativamente pequeño en la densidad de número de cúmulos como función del corrimiento al rojo. Lo anterior se debe a que dada la baja densidad de materia, se ha visto escaso crecimiento de estructuras alrededor de  $z \sim 1$ . El modelo  $\Lambda$ CDM puede “forzarse” a concordar de manera aproximada con la abundancia de cúmulos a escalas pequeñas y con las fluctuaciones del CMB a grandes escalas modificando el espectro de potencias de su forma habitual. Este cambio en el modelo tiene consistencia con las observaciones, ya que el espectro de potencias de  $\Lambda$ CDM puede normalizarse para así coincidir con el CMB y las observaciones de cúmulos. Pero a medida que las estimaciones de la densidad de materia oscura se hacen más y más precisas, es necesario saber cuál es su composición.

Existen, sin embargo, ciertos problemas con el modelo a escalas más pequeñas, tales como los perfiles CUSP de densidades de halos galácticos, la sobrepoblación de subestructuras predicha por simulaciones de  $N$ -cuerpos, el problema de la concordancia, entre otros [34]. Hasta hoy, la naturaleza de la materia oscura en las galaxias y cúmulos de galaxias es una discusión abierta.

### El problema CUSP-CORE

Una de las predicciones fundamentales del modelo  $\Lambda$ CDM es que la materia oscura debido a su naturaleza autogravitante, colapsa en halos que, en ausencia de efectos causados por materia bariónica, desarrollan un perfil de densidad que aumenta de manera abrupta. Este importante resultado surge de simulaciones de  $N$ -cuerpos, las cuales serán descritas en el siguiente capítulo. Estas simulaciones mostraron que la distribución de densidad de un halo de materia oscura de cualquier masa es perfectamente descrita por el perfil de densidad Navarro-Frenk-White o  $NFW$  (Navarro et al. 1996, 1997 [35]), independientemente de condiciones iniciales o de parámetros cosmológicos. Se predice que en los halos de materia oscura de las galaxias, la densidad tiene que tener un comportamiento CUSP o con “pico” central, es decir que la materia oscura está concentrada en el centro de la galaxia (Figura 1.11). Por ejemplo, la pendiente interna principal de un perfil  $NFW$  cumple que la densidad  $\rho$  es proporcional al inverso de la distancia  $r$  es decir  $\rho \propto r^{-1}$ , un resultado similar a la pendiente principal externa mostró que la densidad debía ser proporcional a  $r^{-3}$ . Navarro et al. 1997 [35] llamaron a esto el “perfil de densidad universal” que viene dado por

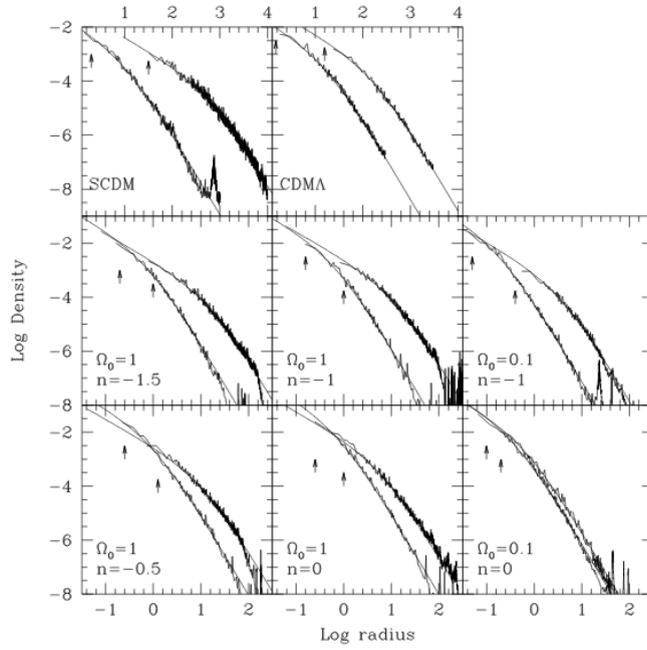
$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_i}{(r/R_s)(1+r/R_s)^2}, \quad (1.48)$$

donde  $\rho_i$  se relaciona a la densidad del Universo en la época del colapso del halo y  $R_s$  es el radio característico del halo. Simulaciones hechas por Moore et al. 1999 [39] mostraron un perfil de densidad incluso más pronunciado, pues encontraron que los halos que ellos simularon pueden ser descritos mejor con el siguiente perfil de densidad

$$\rho_{M99}(r) = \frac{\rho_i}{(r/R_s)^{1.5}(1+r/R_s)^{1.5}}, \quad (1.49)$$

es decir con una proporción interna de  $r^{-1.5}$  y proporción externa de  $r^{-3}$ . La diferencia entre estos dos resultados indicaba que detalles como la convergencia numérica, condiciones iniciales, análisis o interpretación aún podían ser un reto al definir la pendiente interna.

Pero las mediciones hechas para las curvas de rotación y modelos de galaxias enanas esferoidales predicen una densidad más suave o CORE, es decir que la densidad de materia oscura esté distribuida de manera homogénea en todo el halo galáctico (Moore, 1994 [40]). Esta discrepancia es conocida como el problema *CUSP-CORE*, que se ilustra en la Figura 1.9 y 1.10. Para tener una idea de las muchas publicaciones que se han hecho al respecto, Klypin et al. 2001 [41] derivaron pendientes proporcionales a  $r^{-1.5}$  en sus simulaciones. De argumentos de la densidad del espacio-fase, Taylor & Navarro 2001 [42] argumentaron que el perfil de densidad debe parecerse al del perfil  $NFW$ , pero con convergencia a  $r^{-0.75}$  en lugar del valor de  $r^{-1}$ . Colín et al. 2004 [43] investigaron halos de baja masa y encontraron que se describían mejor usando perfiles de densidad  $NFW$ . Diemand et al. 2005 [44] encontraron que los halos de CDM tenían perfiles CUSP con pendiente  $r^{-1.2}$ . Muchos estudios suponen que el CUSP central consiste de una región donde la densidad de



h

Figura 1.11: Perfiles de densidad de los halos más y menos masivos de una simulación hecha con los modelos  $\Lambda$ CDM y standard biased Cold Dark Matter spectrum (SCDM) (Navarro et al.; 1997 [36]). En los paneles superiores, los radios están dados en kpc y las densidades en unidades de  $10^{10} M_{\odot} / \text{kpc}^3$ . En el resto, las unidades son arbitrarias.

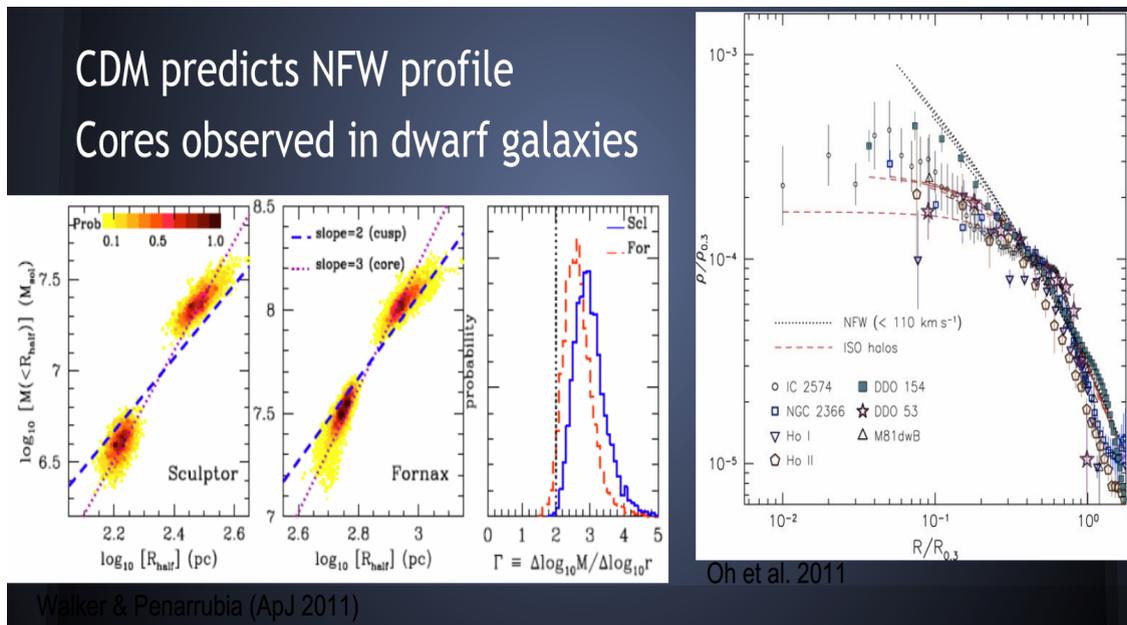


Figura 1.12: *Izquierda*: Constricciones sobre los perfiles de densidad en las galaxias Sculptor, Fornax, NGC 2366 (Walker & Peñarrubia; 2011 [37]). *Derecha*: Simulaciones hechas con CDM para galaxias pequeñas. CDM predice un perfil CUSP, se observa un perfil CORE (Oh et al. 2011 [38]).

masa se comporta como una ley de potencias con pendiente constante aunque se ha sugerido que este no tendría que ser el caso (Navarro et al. 2004 [45]) dado que no encuentran evidencia de una pendiente que se comporte como una ley de potencias, en cambio, esa pendiente no converge a un solo valor asintótico como se espera.

### Satélites faltantes

Otra serie de observaciones parece estar en contradicción con  $\Lambda$ CDM. Utilizando simulaciones de alta resolución, Moore et al. 1999 [39] y Klypin et al. 2001 [41] hicieron notar que el número de subhalos masivos predichos por estas simulaciones excede el número observado de satélites luminosos de la Vía Láctea en al menos un orden de magnitud (Figura 1.12). A esto se le conoce como el problema de los *satélites faltantes*. Este tipo de resultado sigue siendo una discrepancia considerable entre el número de satélites observados en la Vía Láctea y el número predicho por simulaciones de  $\Lambda$ CDM.

Las simulaciones predicen que una galaxia del tamaño de la Vía Láctea debería tener alrededor de 10 veces más galaxias satélites que las que se observan. Lo mismo sucede para galaxias de mayor tamaño. Así que, ¿Cuáles son las posibles soluciones?

1. La física involucrada falla en distintas escalas: Las simulaciones numéricas permiten recrear distintos sistemas físicos, astrofísicos y cosmológicos. Las escalas involucradas difieren en el tipo de aproximación que se esté utilizando, por ejemplo, para simular la evolución cosmológica a gran escala ( $> 100$  Mpc), la interacción gravitacional puede aproximarse de manera lineal, sin embargo, en escalas galácticas  $\mathcal{O}(\text{Mpc})$ , la interacción gravitacional ya no es lineal y debe involucrarse entonces teoría de perturbaciones no lineal para aproximar efectos gravitacionales [46].
2. La potencia observacional es limitada: La sensibilidad en telescopios y otros instrumentos de medición puede ser poco sensible a la luz emitida por galaxias satélites y a otros efectos que pueden provenir de halos pequeños de materia oscura, tales como el *efecto de lentes gravitacionales*. Existen publicaciones recientes sobre que, en efecto, algunas galaxias satélites predichas por CDM no habían sido observadas porque hasta entonces la tecnología no lo permitía [47].

Al ser el modelo estándar de la cosmología,  $\Lambda$ CDM está siempre bajo escrutinios que puedan confirmar o desmentir dicha teoría. En recientes estudios, se mostró que la galaxia NGC 1052-DF2 (Figura 1.13) tiene poca materia oscura [48], esto demuestra que la materia oscura no siempre está acoplada a la materia bariónica en escalas galácticas. Lo anterior es un gran reto para CDM, sin embargo, se requiere todavía de un número mayor de observaciones y mejores aproximaciones a simulaciones para tan solo confirmar o descartar este modelo.

Estas discrepancias dentro del modelo estándar pueden ser evidencia de la importancia de procesos físicos en la materia bariónica. Pero también pueden ser indicativos de un nuevo tipo de materia oscura, con propiedades diferentes a las propuestas por  $\Lambda$ CDM y con la posibilidad de resolver estas dificultades mencionadas.

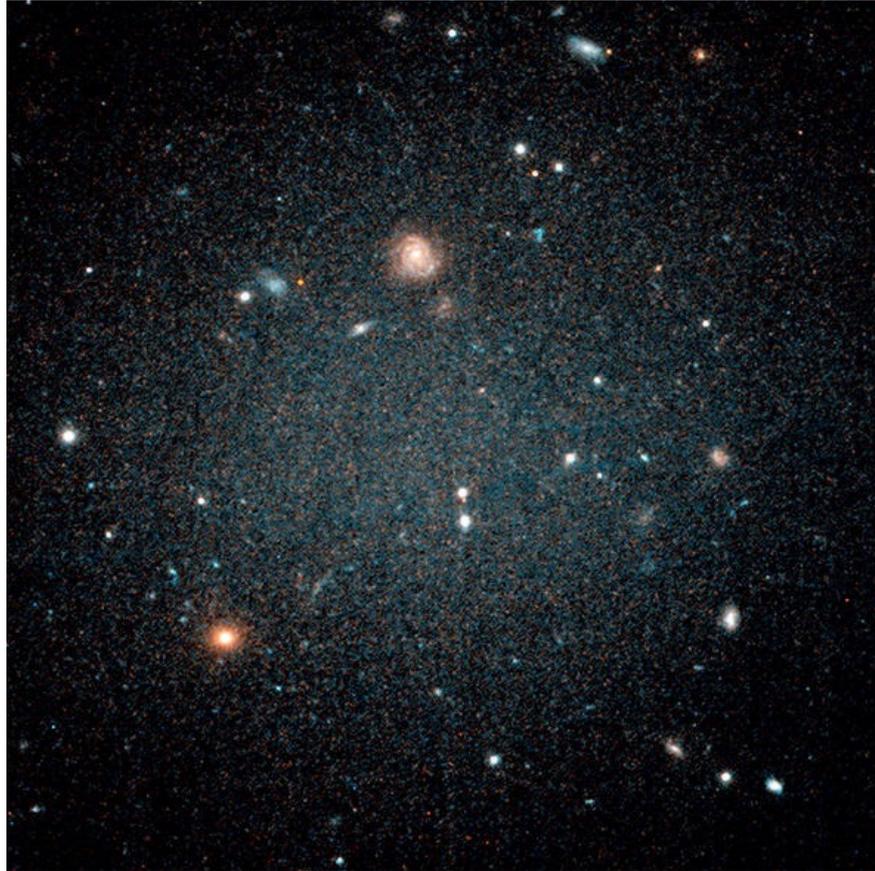


Figura 1.13: La galaxia NGC 1052-DF2 es una galaxia ultra difusa en la constelación Cetus, identificada en un estudio de imágenes de campo amplio del grupo NGC 1052 por el Dragonfly Telephoto Array (Dokkum et al. 2018 [48]).

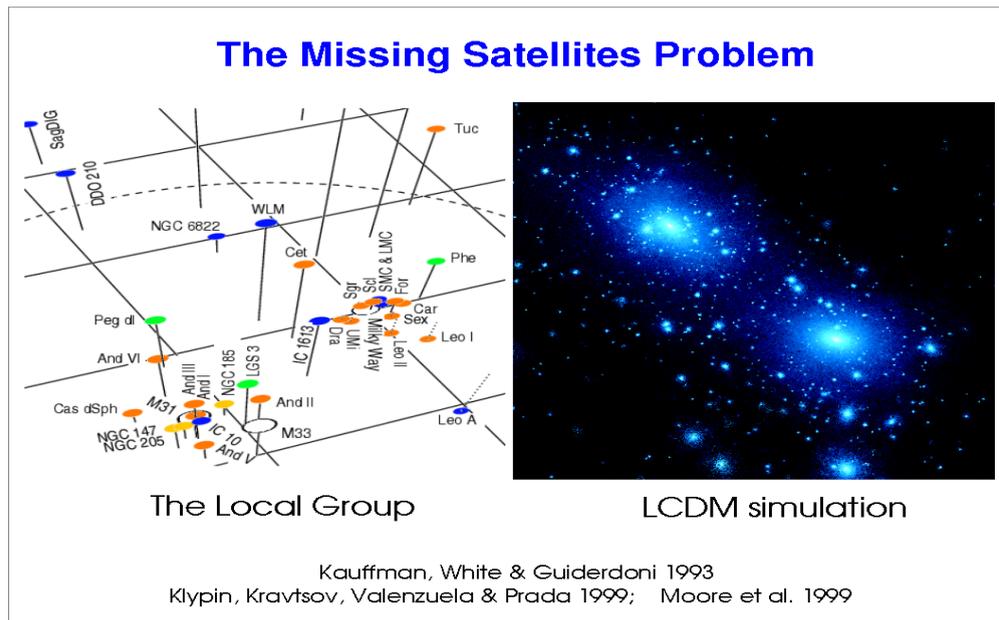


Figura 1.14: *Izquierda*: Galaxias observadas en el Grupo Local (Kauffmann, White & Guiderdoni 1993 [49] ). *Derecha*: Comparación con simulaciones de CDM (Klypin et al. 1999 [50]).

### 1.2.4. Scalar Field Dark Matter (SFDM)

Con los problemas que presenta el modelo  $\Lambda$ CDM parece necesario introducir alternativas al paradigma de la formación de estructura en el Universo. Estas son algunas razones por las que deben buscarse propuestas diferentes que puedan explicar la formación de estructura a un nivel cosmológico, la cantidad observada de galaxias enanas y los perfiles de densidad de materia oscura en las partes centrales de las galaxias. Una propuesta, de la gran cantidad que existe [52], es la de un campo escalar como materia oscura en el Universo. Este modelo supone que la materia oscura es un campo escalar real o complejo  $\Phi$  mínimamente acoplado a la gravedad, dotado de un potencial escalar  $V(\Phi)$  y que a cierta temperatura la interacción del campo es puramente gravitacional junto con el resto de la materia. Este campo escalar puede agregarse al Lagrangiano de las partículas del modelo estándar o al de la relatividad general, suponiendo que la constante de acoplamiento con el resto de la materia sea muy pequeña.

### Campo escalar

Un campo escalar asocia una cantidad escalar a cualquier punto del espacio. Su valor puede ser un número matemático o una cantidad física. Físicamente un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud escalar. Matemáticamente un campo escalar es una función escalar de las coordenadas.

En la teoría clásica de campos, la dinámica de procesos y fenómenos físicos macroscópicos se representa mediante un campo físico. El concepto de campo abarca los campos de fuerza clásicos, así como la mecánica de medios continuos, es decir, la de sólidos rígidos y deformables, además de líquidos y la propagación de ondas. Normalmente en la teoría clásica de campos se restringe al estudio de campos de fuerza clásica en su tratamiento relativista, es decir:

- Campo electromagnético,
- Campo gravitacional,
- Campos cuánticos tratados de manera clásica, que ayudan a formular la evolución de campos cuánticos sin interacción entre ellos.

Por otro lado la teoría cuántica de campos surgió de la necesidad de cuantizar el campo electromagnético, y con ello describir de forma adecuada los fenómenos cuánticos de la radiación. A esta construcción se le conoce como la electrodinámica cuántica y la partícula asociada con el campo electromagnético es el fotón. Hoy en día todas las partículas elementales son descritas en principio por cuantos de un campo asociado a ellas.

La descripción de un campo escalar libre en la teoría cuántica de campos, está dada por la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación describe correctamente partículas bosónicas de espín cero. La ecuación se deduce de la siguiente forma utilizando la densidad Lagrangiana y el principio de mínima acción (los detalles pueden ser consultados en el Apéndice A)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\hbar^2 \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 c^2 \phi^2), \quad (1.50)$$

donde  $\hbar$ ,  $m$  y  $c$  son la constante reducida de Planck, la masa del campo y la velocidad de la luz respectivamente. Utilizando el principio de Hamilton y realizando un análisis variacional a esta densidad Lagrangiana se obtiene

$$\begin{aligned} \int d^4x \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int d^4x \delta (\hbar^2 \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 c^2 \phi^2) = 0 \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x (\hbar^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu \delta \phi - 2m^2 c^2 \phi \delta \phi) = 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Al realizar la integración por partes en el primer término de la ecuación (1.51) se encuentra

$$\int d^4x \hbar^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta \phi = \int d^4x \hbar^2 \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta \phi) - \int d^4x \hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \phi \delta \phi. \quad (1.52)$$

Utilizando el teorema de Stokes en el primer término y considerando que en la frontera la variación se anula, entonces

$$\int d^4x \hbar^2 \partial^\mu (\partial_\mu \phi \delta \phi) = 0. \quad (1.53)$$

Llevando a cabo un procedimiento análogo para el segundo término de la ecuación (1.51) se tiene que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d^4x (-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi \delta\phi - \hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \phi \delta\phi - 2m^2 c^2 \phi \delta\phi) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x (-2\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi - 2m^2 c^2 \phi) \delta\phi = 0, \end{aligned} \quad (1.54)$$

entonces

$$\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 c^2 \phi = 0. \quad (1.55)$$

Esta es la ecuación de Klein-Gordon o ecuación de movimiento para campos. Introduciendo el operador d'Alambertiano  $\square$  definido por

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (1.56)$$

reduciendo el segundo término como  $\mu^2 \equiv \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ , la ecuación (1.55) se escribe de la siguiente forma

$$(\square + \mu^2) \phi = 0, \quad (1.57)$$

cuya signatura es  $(+, -, -, -)$ ; si se utiliza la signatura  $(-, +, +, +)$  aparecerá un signo  $-$  antes de  $\mu^2$ .

Muchos autores han propuesto alternativas de interés en las cuales se abordan las dificultades que  $\Lambda$ CDM no ha podido resolver hasta ahora. En el modelo de Campo Escalar (Guzmán & Matos, 1999 [53]), se propone que los halos galácticos se forman de condensados de Bose-Einstein (BEC) de un campo escalar (SF) cuyo bosón tiene una masa ultra ligera del orden de  $m \sim 10^{-22}$  eV. De este valor se sigue que la temperatura crítica de condensación  $T_c \sim 1/m^{5/3} \sim \text{TeV}$ , es muy alta, por lo tanto, se forman semillas de Condensados de Bose-Einstein (BEC) en épocas tempranas en el Universo. Además, la longitud de Compton  $\lambda_c = 2\pi\hbar/m$  asociada a este bosón es de  $\mathcal{O}(\text{kpc})$  que corresponde al tamaño de los halos de materia oscura de las galaxias en el Universo. Por otra parte, las grandes estructuras del Universo se forman al igual que en el modelo  $\Lambda$ CDM, por lo que todas las predicciones correctas del modelo estándar se reproducen de buena manera por el modelo SFDM. En este modelo, las partículas escalares con esa masa ultra ligera son tales que sus propiedades ondulatorias evitan el problema del perfil CUSP y reducen el alto número de galaxias satélite por medio del principio de incertidumbre.

La idea del tratamiento de materia oscura como campo escalar se introduce para solucionar dos de los problemas presentes en el modelo estándar cosmológico, el CUSP-CORE y los satélites faltantes. Fue considerada primero por Ji & Sin 1994 [51], y de forma independiente por Guzmán & Matos 1999 [53] y Lee & Koh 1996 [54]. Matos & Guzmán 2000 [55] sugieren el modelo de materia oscura como campo escalar para formación de halos galácticos. En el modelo de BEC, los halos de materia oscura pueden describirse, en el límite no relativista, como potenciales Newtonianos, hechos de condensados de Bose-Einstein ultra ligeros y con una sola función de onda asociada. Los halos hechos de BEC pueden describirse como un campo escalar  $\Phi$  coherente.

## 1.2.5. Descripción física de SFDM

### 1.2.5.1. Lagrangiano del campo escalar

Para efectos de este trabajo, la materia oscura se describe como un campo escalar complejo, el cual es una función continua del espacio y del tiempo definida en cada punto por  $\Phi(x^\mu) = \Phi(x, y, z, t)$ . La acción relativista de este campo escalar viene dada por [56]

$$S_\Phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\Phi, \quad (1.58)$$

donde  $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L}_\Phi(\Phi, \Phi^*, \partial_\mu \Phi, \partial_\mu \Phi^*)$  es la densidad Lagrangiana y  $g = \det(g_{\mu\nu})$  es el determinante del tensor métrico. La densidad Lagrangiana adopta la siguiente forma

$$\mathcal{L}_\Phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi - V(|\Phi|^2), \quad (1.59)$$

con el potencial escalar dado por la expresión

$$V(|\Phi|^2) = \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} |\Phi|^2 + \frac{m^2}{2\hbar^4} \lambda |\Phi|^4, \quad (1.60)$$

donde el término cuadrático es el término de masa en reposo y el término cuártico es una autointeracción. Anteriormente se mencionó que a temperaturas bajas, este campo escalar puede comportarse como un Condensado de Bose-Einstein, en este estado, todas las partículas estarán en el mismo estado base. En ese caso, la constante de autointeracción  $\lambda$  puede escribirse en términos de la longitud de dispersión de los bosones  $a_s$  y de su masa  $m$  como  $\lambda = 4\pi a_s \hbar^2/m$ . El potencial escalar se reescribe entonces como

$$V(|\Phi|^2) = \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2} |\Phi|^2 + \frac{2\pi a_s m}{\hbar^2} \lambda |\Phi|^4. \quad (1.61)$$

La autointeracción es repulsiva cuando  $a_s > 0$  y atractiva cuando  $a_s < 0$ .

### 1.2.5.2. Ecuación de Klein-Gordon

El campo escalar puede describirse mediante una ecuación de movimiento que se obtiene del principio de mínima acción. Imponiendo que  $\delta S_\Phi = 0$  para variaciones arbitrarias de  $\delta\Phi$  y  $\delta\Phi^*$  se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$D_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial (\partial_\mu \Phi)^*} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial \Phi^*} = 0, \quad (1.62)$$

donde  $D$  es la derivada covariante. Para el Lagrangiano de la ecuación (1.59), se obtiene la ecuación de Klein-Gordon

$$\square \Phi + 2V(|\Phi|^2)_{,\Phi^*} = 0. \quad (1.63)$$

En este caso, el operador d'Alambertiano se define como

$$\square \equiv D_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu), \quad (1.64)$$

y

$$V(|\Phi|^2)_{,\Phi^*} = \frac{dV}{d|\Phi|^2} \Phi. \quad (1.65)$$

Para el caso específico del potencial escalar definido en (1.61), la ecuación de Klein-Gordon toma la siguiente forma

$$\square \Phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Phi + \frac{8\pi a_s m}{\hbar^2} |\Phi|^2 \Phi = 0. \quad (1.66)$$

### 1.2.5.3. Tensor de energía-momento

Al tomar la variación de la acción del campo escalar (1.58) con respecto a  $g^{\mu\nu}$ , se obtiene

$$\delta S_\Phi = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.67)$$

donde

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\Phi \quad (1.68)$$

es el tensor de energía-momento del campo escalar. Para el Lagrangiano (1.59), este tensor toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^* \partial_\mu \Phi) - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi^* \partial_\sigma \Phi - V(|\Phi|^2) \right] \quad (1.69)$$

De forma análoga que para el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, los tensores de densidad de energía y presión del campo escalar se definen por  $\rho = T_0^0$  y  $P_j^j = -T_j^j$ .

Para estudiar la dinámica de SFDM en el Universo se utiliza la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) con factor de escala  $a(t)$ . El *background* o fondo del Universo se compone de un campo escalar ( $\Phi_0(t)$ ) dotado de un potencial escalar  $V \equiv V(\Phi_0)$ , radiación ( $z$ ), neutrinos ( $\nu$ ), bariones ( $b$ ) y una constante cosmológica ( $\Lambda$ ) (Magaña et al., 2012 [57]). Al recordar las ecuaciones de FLRW, el tensor de energía-momento  $T$  seguirá siendo homogéneo e isótropo para un campo escalar, en donde ahora la densidad

pasa a ser una densidad de energía escalar  $T_0^0$  y la presión, será una presión escalar  $T_j^i$ . Estas componentes tendrán la siguiente forma utilizando la signatura  $(+, -, -, -)$

$$T_0^0 = -\rho_{\Phi_0} = -\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V\right), \quad (1.70)$$

y

$$T_j^i = P_{\Phi_0} = \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V\right)\delta_j^i, \quad (1.71)$$

es importante observar que ambas son el equivalente del tensor de energía-momento para fluidos perfectos, donde el punto se entiende como la derivada respecto al tiempo cosmológico y  $\delta_j^i$  es la delta de Kronecker. Así, la ecuación de estado para el campo escalar es  $p_{\Phi_0} = \omega_{\Phi_0}\rho_{\Phi_0}$  con

$$\omega_{\Phi_0} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\Phi}_0^2 + V}. \quad (1.72)$$

Para simplificar el análisis, resulta conveniente introducir las siguientes variables adimensionales

$$x \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{\Phi_0}{H}, \quad u \equiv \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{V}}{H} \quad (1.73)$$

donde  $\kappa^2 \equiv 8\pi G$  y  $H \equiv \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble. El potencial escalar se elige como  $V = m^2\Phi^2/2\hbar^2 + \lambda\Phi^4/4$ , y si se toma  $c = 1$ , para un bosón ultra ligero se tendrá que  $\mu_{\Phi} \sim 10^{-22}$  eV. Con estas variables, el parámetro de densidad para el fondo  $\Omega_{\Phi}$  se escribe como

$$\Omega_{\Phi_0} = x^2 + u^2, \quad (1.74)$$

además, la ecuación de estado del campo escalar toma la forma

$$\omega_{\Phi_0} = \frac{x^2 - u^2}{\Omega_{\Phi_0}}. \quad (1.75)$$

Dado que  $\omega_{\Phi_0}$  es una función del tiempo, si su promedio temporal tiende a cero, implicaría que la materia oscura  $\Phi^2$  se comporta de igual manera que la ecuación de estado para CDM.

#### 1.2.5.4. Fondo del Universo: Aproximación hidrodinámica

En la llamada aproximación hidrodinámica, se hace una transformación para resolver las ecuaciones de Friedmann de manera analítica con la condición  $H \ll m$ . Se toma el potencial escalar como  $V = m^2\Phi^2/2\hbar^2 + \lambda\Phi^4/4$ . Así, para el bosón ultra ligero se tiene que  $m \sim 10^{22}$  eV.

El campo escalar,  $\Phi_0$  se expresa en términos de nuevas variables  $S$  y  $\rho_0$ , donde  $S$  es una cantidad constante en el fondo del Universo o *background* y  $\rho_0$  será la densidad de energía del fluido también en esta región, así el campo se expresa como

$$\Phi_0 = (\psi_0 e^{-imt/\hbar} + \psi_0^* e^{imt/\hbar}), \quad (1.76)$$

donde

$$\psi_0(t) = \sqrt{\rho_0(t)} e^{iS/\hbar}, \quad (1.77)$$

de esta manera, el campo escalar en la región del fondo del Universo se puede expresar como

$$\Phi_0 = 2\sqrt{\rho_0} \cos(S - mt/\hbar), \quad (1.78)$$

así se obtiene

$$\dot{\Phi}_0^2 = \rho_0 \left[ \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \cos(S - mt/\hbar) - 2(\dot{S} - m) \sin(S - mt/\hbar) \right]^2. \quad (1.79)$$

Observe que el principio de incertidumbre implica que  $m\Delta t \sim \hbar$ , y que para el fondo en el caso no relativista se cumple la relación  $\dot{S}/m \sim 0$ .

### 1.2.6. Perturbaciones de SFDM

El Universo no es exactamente isótropo ni espacialmente homogéneo, estas propiedades del principio cosmológico dependen de la escala que se esté analizando. En escalas pequeñas (entre 1 y 50 Mpc), el campo escalar tiene oscilaciones primordiales que se transmiten a las fluctuaciones y crecen de manera rápida. Este comportamiento no es físico, ya que se observan oscilaciones en los campos pero no se observa una evolución de su densidad. Para descartar estas oscilaciones se hacen dos transformaciones. La primera cambia la ecuación de Klein-Gordon perturbada en una ecuación tipo Schrödinger, la segunda transformación cambia esta ecuación a un sistema hidrodinámico, para que puedan interpretarse de manera más sencilla las cantidades físicas observables [58].

Una perturbación del campo escalar es la diferencia entre su valor correspondiente en un evento en el espacio-tiempo real y su correspondiente valor en el fondo o *background*, de esta manera se obtiene lo siguiente

$$\Phi = \Phi_0(t) + \delta\Phi(\vec{x}, t), \quad (1.80)$$

que al insertar en la ecuación de Klein-Gordon, con  $\dot{\phi} = 0$ , se tiene que

$$\delta\ddot{\Phi} + 3H\delta\dot{\Phi} - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\delta\Phi + V_{,\Phi\Phi}\delta\Phi + 2V_{,\Phi}\phi = 0. \quad (1.81)$$

Donde  $\phi$  es el potencial gravitacional (solo depende de la posición). El campo escalar perturbado  $\delta\Phi$  en términos de  $\Psi$  puede expresarse de la siguiente manera

$$\delta\Phi = \Psi e^{-imt/\hbar} + \Psi^* e^{imt/\hbar}, \quad (1.82)$$

que se interpreta como una superposición de ondas. Estas oscilan con una frecuencia proporcional a  $m$  y  $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$ . Esta función es proporcional a una función de onda de un conjunto de partículas en el condensado. Con esta ecuación y la expresión del potencial del campo escalar,  $V = m^2\Phi^2/2\hbar^2 + \lambda\Phi^4/4$ , la ecuación (1.81) se convierte en

$$-i\hbar(\dot{\Psi} + \frac{3}{2}H\Psi) + \frac{\hbar^2}{2m}(\square\Psi + 9\lambda|\Psi|^2\Psi) + m\phi\Psi = 0, \quad (1.83)$$

donde  $\square$  se define como

$$\square = \frac{d^2}{dt^2} + 3H\frac{d}{dt} - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2 \quad (1.84)$$

Para entender la naturaleza hidrodinámica de este modelo de materia oscura, se hace una aproximación utilizando una transformación de Madelung [88, 89, 90], la cual conecta la teoría de campos y las funciones de onda de los condensados, es decir, se considera

$$\Psi = \sqrt{\hat{\rho}}e^{iS}, \quad (1.85)$$

donde  $\Psi$  será la función de onda del condensado, con  $\hat{\rho} = \rho/m = \hat{\rho}(\vec{x}, t)$  y  $S = S(\vec{x}, t)$ . La función  $\Psi$  se separa en una fase real  $S$  y una amplitud real  $\hat{\rho}$ , mientras que se satisface la condición  $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = \hat{\rho}$ . Sustituyendo en la ecuación (1.83), se obtiene

$$\dot{\hat{\rho}} + 3H\hat{\rho} - \frac{\hbar}{m}\hat{\rho}\square S + \frac{\hbar}{a^2m}\vec{\nabla}S\vec{\nabla}\hat{\rho} - \frac{\hbar}{m}\hat{\rho}\dot{S} = 0, \quad (1.86)$$

y

$$\hbar\dot{S}/m + \omega\hat{\rho} + \phi + \frac{\hbar^2}{2m^2}\left(\frac{\square\sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}}\right) + \frac{\hbar^2}{2a^2}[\vec{\nabla}(S/m)]^2 - \frac{\hbar^2}{2}(\dot{S}/m)^2 = 0. \quad (1.87)$$

Al tomar el gradiente de las ecuaciones (1.86), (1.87) dividiendo por  $a$  y utilizando la definición

$$\vec{v} \equiv \frac{\hbar}{ma}\vec{\nabla}S \quad (1.88)$$

se obtiene

$$\dot{\hat{\rho}} + 3H\hat{\rho} - \frac{\hbar}{m}\hat{\rho}\square S + \frac{1}{a}\vec{v}\vec{\nabla}\hat{\rho} - \frac{\hbar}{m}\hat{\rho}\dot{S} = 0, \quad (1.89)$$

$$\dot{\vec{v}} + H\vec{v} + \frac{1}{2a\hat{\rho}}(\vec{\nabla}p) + \frac{1}{a}(\vec{\nabla}\phi) + \frac{\hbar^2}{2m^2a}\vec{\nabla}\left(\frac{\square\sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}}\right) + \frac{1}{a}(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \hbar(\dot{\vec{v}} + H\vec{v})(\dot{S}/m) = 0 \quad (1.90)$$

donde se ha definido  $\omega = 9\hbar^2\lambda/2m^2$  y  $p = \omega\hat{\rho}^2$ . Ignorando los términos cuadráticos así como las derivadas temporales de segundo orden y el producto de derivadas temporales en las ecuaciones (1.89) y (1.90) se obtiene

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\vec{v}) + 3H\hat{\rho} = 0, \quad (1.91)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + H\vec{v} - \frac{\hbar^2}{2m^2}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2\hat{\rho}}\vec{\nabla}^2\hat{\rho}\right) + \omega\vec{\nabla}\hat{\rho} + \vec{\nabla}\phi, \quad (1.92)$$

$$\vec{\nabla}^2\phi = 4\pi G\hat{\rho}, \quad (1.93)$$

donde la ecuación para el campo gravitacional está dado por la ecuación de Poisson y se ha introducido la notación de coordenadas comóviles  $\vec{r} = a(t)\vec{x}$  de tal forma que  $1/a\vec{\nabla} = \vec{\nabla} = \partial_r$ . En la ecuación (1.88) se observa una proporcionalidad entre el gradiente de la fase y la velocidad del fluido. Es importante observar que  $\vec{v}$  puede representar el campo de velocidades para el fluido y  $\hat{\rho}$  será la densidad de número de las partículas dentro del fluido. Además existe un término extra con derivadas de tercer orden en el espacio, que varía con el gradiente de

$$\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\square\sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}}.$$

Las ecuaciones (1.89) y (1.90) conducen al análogo de las ecuaciones de Euler para fluidos clásicos, con la diferencia de la existencia de un término cuántico, llamado  $Q$  y definido por

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\square\sqrt{\hat{\rho}}}{\sqrt{\hat{\rho}}}, \quad (1.94)$$

este último término puede describir una fuerza o algún tipo de presión negativa de naturaleza cuántica. La cantidad  $Q$  se puede interpretar como un tipo de interacción entre partículas de rango corto, cuyo orden es de un valor  $Q \sim \lambda$ , que es la longitud de onda de Compton de las partículas del campo. En particular, este término es el responsable de que en la teoría de SFDM se solucionen los problemas CUSP-CORE y de satélites faltantes, dada la naturaleza de este campo escalar, la interacción entre esas partículas depende de la longitud de onda y de la masa del campo.

La materia oscura es un tipo de materia que solo interactúa con la materia bariónica de forma gravitacional, hasta ahora el modelo que mejor describe su comportamiento es  $\Lambda$ CDM, a pesar de presentar problemas y contradicciones, la mayoría a escalas galácticas. El modelo SFDM ayuda a solucionar en gran parte estas discrepancias presentes en CDM. Las simulaciones numéricas de  $N$ -cuerpos son una herramienta útil para realizar una comparación directa de la naturaleza de distintos modelos de materia oscura y pueden apoyarlos o contradecirlos. Las simulaciones de  $N$ -cuerpos se describen en el siguiente capítulo.

## Capítulo 2

# Simulaciones de $N$ -cuerpos

Como se mencionó en el capítulo anterior, la naturaleza de la materia oscura es aún desconocida. El crear teorías que expliquen esa naturaleza y además concuerden con las observaciones actuales del Universo no es tarea fácil. Al no conocer su composición, una de las soluciones que se proponen es emplear simulaciones que involucren toda la física desarrollada en la teoría y que a su vez permitan tener resultados comparables con las observaciones. Las simulaciones de  $N$ -cuerpos son uno de los enfoques más amplios para comprender la formación a gran escala del Universo, la inestabilidad gravitacional en escalas cosmológicas, y la formación y evolución de las galaxias. En años recientes, el poder computacional ha permitido crear simulaciones de alta resolución que muestran la evolución del Universo desde la época del CMB, iniciando de un  $z \sim 1100$ .

La evolución cosmológica se aproxima con aglomeramiento gravitacional lineal a grandes escalas ( $\geq 100$  Mpc), y no lineal en escalas más pequeñas o galácticas (entre 10 kpc y 1 Mpc), generando condiciones iniciales específicas de partículas de materia oscura que además pueden refinarse introduciendo efectos de dinámica de gases, procesos químicos, transferencia radiativa y otros procesos astrofísicos. La fiabilidad de una simulación se mide por su resolución en masa, longitud y tiempo. La resolución de masa es especificada por la masa de la partícula más pequeña considerada, siendo la escala por debajo de la cual las interacciones no se pueden cuantificar. La resolución en longitud está limitada por una escala de “suavizado” (softening), introducida para evitar infinitos en la fuerza gravitacional cuando las partículas colisionan.

La formación de estructura en el Universo es originada por pequeñas perturbaciones en la densidad de materia, o fluctuaciones cuánticas que se expanden a escalas cosmológicas en la época de inflación. Al simular materia oscura se debe enfocar en su colapso gravitacional, al haber más colapso, las perturbaciones crecen. La teoría de perturbaciones lineal proporciona una excelente primera aproximación a la evolución temprana del Universo. El resultado de este conjunto de consideraciones es una red de halos que se forman a lo largo de paredes y filamentos, creando un entramado cósmico. Este entramado es consistente con mediciones de aglomeraciones de galaxias en un amplio intervalo de escalas.

Existe una gran variedad de códigos que involucran teoría de simulaciones de  $N$ -cuerpos, incluyendo dinámica de gases, conocida como Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Estos códigos han sido utilizados en numerosas ocasiones obteniendo resultados consistentes con observaciones. Por mencionar algunos: ART (Kravtsov, A. V.; 1999 [59]), ENZO (O’Shea et al.; 2004 [60]), RAMSES (Teyssier, R.; 2002 [61]), GADGET Springel et al.; 2001 [62]) etc.

Este capítulo está dedicado a describir las bases teóricas para simulaciones de  $N$ -cuerpos e Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (SPH) que utiliza el código GADGET.

### 2.1. Modelos de fluidos sin colisión autogravitantes

Para derivar las ecuaciones del problema cosmológico de  $N$ -cuerpos, se puede iniciar desde las ecuaciones de la relatividad general y deducir las ecuaciones de movimiento de partículas no relativistas autogravitantes en un Universo en expansión. Para el caso de materia no relativista en el límite de campo débil, se llega a las ecuaciones de Newton. Hay algunas limitaciones con esta aproximación: no se pueden estudiar partículas relativistas y se ignoran las perturbaciones a la gravedad, es decir, los cambios en el potencial gravitacional se consideran instantáneos.

Iniciando con las definiciones de coordenadas comóviles del Capítulo 1, la distancia propia se define como

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala. Al diferenciar la ecuación (2.1) respecto del tiempo se obtienen las velocidades

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \equiv \dot{\vec{r}} = a\dot{\vec{x}} + \dot{a}\vec{x} = H\vec{r} + \vec{v}_{pec}. \quad (2.2)$$

Aquí,  $\vec{v}_{pec} = a\dot{\vec{x}}$  es la velocidad peculiar y  $H = \dot{a}/a$  es la constante de Hubble. El problema de  $N$ -cuerpos en cosmología es algo específico. Los sistemas estudiados en cosmología tales como la evolución no lineal de la materia oscura pueden tratarse utilizando la ecuación de Boltzmann sin colisiones en coordenadas comóviles acoplada en conjunto con la ecuación de Poisson. La ecuación de Boltzmann sin colisiones describe el comportamiento y evolución de un fluido sujeto a fuerzas externas y tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_v f = 0, \quad (2.3)$$

donde  $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  es una función de distribución de la densidad,  $\vec{v}$  es la velocidad,  $\vec{r}$  es la posición,  $\vec{F}$  es la fuerza y  $m$  la masa que describen completamente al fluido [64].

En el caso de que esta fuerza  $\vec{F}$  se derive de un potencial  $\Phi$  se tiene que

$$\vec{F} = -m\nabla\Phi, \quad (2.4)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula del sistema. Sustituyendo la ecuación (2.4) en (2.3) se encuentra

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f - \nabla\Phi \cdot \nabla_v f = 0 \quad (2.5)$$

Este potencial  $\Phi$  debe satisfacer la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \int_S f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.6)$$

donde  $S$  es todo el espacio y  $f$  se define mediante la siguiente expresión

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v d^3r \quad (2.7)$$

que viene dada por la masa total de las partículas que se encuentran en un cubo de volumen  $d^3r$  centrado en  $\vec{r}$  y velocidad ubicada en un cubo de volumen  $d^3v$  centrado en  $\vec{v}$ . Al integrar en el espacio, lo que se obtiene es la densidad de masa que puede depender del tiempo  $\rho(t)$ , con esto la ecuación de Poisson presentada en la ecuación (2.6) se reduce a la conocida.

La evolución del fluido requiere un gran número de partículas para describirlo entonces el problema que se intenta resolver numéricamente es el siguiente:

- Dadas las coordenadas iniciales  $\vec{r}_{init}$  y velocidades  $\vec{v}_{init}$  de  $N$  partículas con masa en el momento  $t = t_i$ , encontrar sus velocidades  $\vec{v}$  y coordenadas  $\vec{r}$  en el siguiente instante  $t = t_{next}$ , suponiendo que las partículas interactúan mediante la fuerza de gravedad, que se considera Newtoniana.

Si  $\vec{r}_i$  y  $m_i$  es la coordenada y masa para cada partícula, entonces las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_j(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \quad (2.8)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación universal.

Se debe tomar la siguiente consideración antes de resolver estas ecuaciones de forma numérica.

- Para evitar aceleraciones grandes se introduce un suavizante de fuerza, el cual permite que la fuerza se haga más débil a distancias pequeñas.

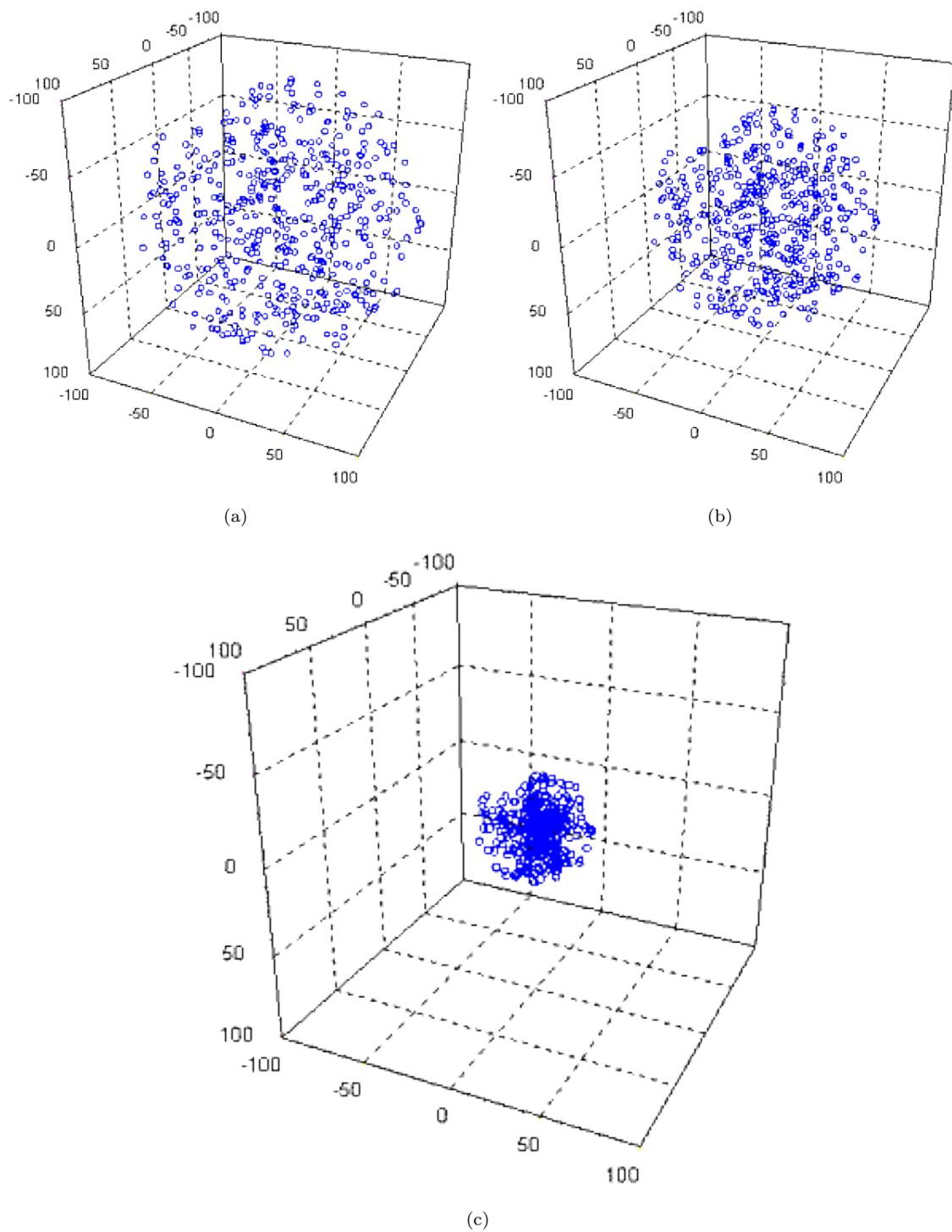


Figura 2.1: Colapso gravitacional en una simulación de  $N$ -cuerpos realizada con Python. Las ecuaciones de fluidos sin colisión autogravitantes permiten observar el movimiento de  $N$  partículas debido a la interacción gravitacional entre ellas.

En otras palabras, si dos partículas se encuentran muy cercanas entre sí, estas ecuaciones pueden indefinirse. Al añadir el suavizado, la integración numérica se estabiliza. Otra razón para realizar esta acción es que cuando se integran galaxias, cúmulos de galaxias, o la estructura a gran escala, los efectos de las colisiones cercanas entre partículas individuales puede ignorarse, es decir, la fuerza que actúe en una partícula está dominada por la contribución acumulada de todas las partículas, no de pocas partículas cercanas.

Para este propósito se agrega un parámetro  $\epsilon$  conocido como “suavizante gravitacional” que permite evitar una divergencia repentina en el cálculo de la fuerza. Esto se soluciona si se agrega un parámetro  $\epsilon^2$  de manera que

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1, i \neq j}^N \frac{m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{(\Delta \vec{r}_{ij}^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad (2.9)$$

donde se ha definido  $\Delta \vec{r}_{ij}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2$  y  $\epsilon$  es el parámetro de suavización o “softening length” (Bodenheimer et al., 2007 [65]). Físicamente, se puede interpretar a este parámetro  $\epsilon$  como la distancia entre los centros de dos partículas que están “unidas”.

En el caso descrito al comienzo de la sección, el potencial puede escribirse de la siguiente manera

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int_S \int_S \frac{f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v' d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.10)$$

e introduciendo el parámetro  $\epsilon$  se obtiene

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int_S \int_S \frac{f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v' d^3 r'}{|\epsilon^2 + \vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.11)$$

Estos resultados son válidos para el caso de un Universo Newtoniano.

Al considerar el modelo de Friedman–Lemaître–Robertson–Walker, es decir, el de un Universo homogéneo e isótropo en expansión, la dinámica de las partículas se describe mejor con el siguiente Hamiltoniano [63]

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i a^2(t)} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq 1, i \neq j}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_i m_j \Phi(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}{a(t)}, \quad (2.12)$$

donde  $\vec{p}_k$  y  $\vec{x}_k$  son los vectores de momento y posición en el sistema de coordenadas comóviles y  $a$  es el factor de escala de la métrica FLRW. El caso Newtoniano se recupera al tomar  $a = 1$  mientras que el momento canónico viene dado por  $\vec{p}_k = a^2(t) m_k \dot{\vec{x}}_k$ .

Se suponen además condiciones periódicas a la frontera para una caja de volumen  $L^3$ . Así el potencial de interacción  $\Phi(\vec{x})$  será solución de la ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \left[ -\frac{1}{L^3} + \sum_{\vec{n}} \tilde{\delta}(\vec{x} - \vec{n}L) \right], \quad (2.13)$$

donde  $\vec{n}$  simboliza un vector de números naturales. Esta solución corresponde a un “potencial peculiar”

$$\Phi = \sum_{i=1}^N m_i \phi(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad (2.14)$$

cuya dinámica la gobierna la ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G [\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}]. \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es la ecuación de Poisson con un campo de fluctuaciones de densidad  $\rho(\vec{x})$  y densidad media  $\bar{\rho}$ . El suavizamiento gravitacional se normaliza utilizando una función con factor de escala comóvil  $\epsilon$ , para esto se aplica la función tipo kernel de Spline (Monaghan & Lattanzio 1985 [74]) usado en SPH y se toma  $\tilde{\delta} = W(\vec{x} - \vec{n}L, 2.8\epsilon)$  (para más detalles, se puede consultar la sección 2.3.5. Kernels), la ecuación (2.13) se convierte entonces en

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \left[ -\frac{1}{L^3} + \sum_{\vec{n}} W(\vec{x} - \vec{n}L, 2.8\epsilon) \right]. \quad (2.16)$$



derivadas espaciales, a diferencia del método de  $N$ -cuerpos, que divide el espacio en celdas para calcular fuerzas entre partículas. Las ecuaciones de energía y momento se convierten en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para describir la mecánica y termodinámica del fluido. La SPH utiliza un conjunto de partículas discretas para describir el estado de un fluido con cantidades continuas asociadas a la dinámica de fluidos. Se hace la suposición de que, en cualquier momento, las posiciones de los elementos del fluido se distribuyen de manera aleatoria conforme a su densidad. Recuperar la densidad conocida de su distribución inicial es equivalente a recuperar la probabilidad de distribución de una muestra del fluido. Existen dos métodos para hacer esto posible. El primero de ellos es un método de suavizado de kernel o núcleo, para estimar la función de densidad de probabilidad de una función (Parzen 1962 [69]), el otro método es la técnica de spline delta (Boneva, Kendall & Stepanov 1971 [70]) para análisis de datos (Gingold & Monaghan, 1977; Lucy, 1977; Monaghan 1997 [71, 72]). Estos métodos son utilizados para aproximar múltiples integrales y que utilizan menor cantidad de procedimientos para llevar a cabo dichos cálculos.

### 2.2.1. Ecuaciones fundamentales

La idea principal detrás de la SPH es un método de interpolación que permite que cualquier función pueda expresarse en términos de sus valores en un conjunto de puntos desordenados, es decir, las partículas. Por ejemplo, para representar al medio intergaláctico, las partículas que representan al medio en forma de gas deben moverse como elementos de un fluido en un sentido Lagrangiano, este fluido se considera como un fluido perfecto. Para que las partículas se muevan de manera correcta, es necesario construir las fuerzas que un elemento del fluido pudiese experimentar.

El modelo de SPH (Monaghan 1992; Price 2004 [73, 75]) comienza definiendo la interpolación integral de cualquier función  $A(r)$  como

$$A_I(\vec{r}) = \int_S A(\vec{r}') W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r', \quad (2.18)$$

donde la integración es sobre todo el espacio y  $W$  es un núcleo o kernel de interpolación que debe satisfacer

$$\int_S W(\vec{r} - \vec{r}', h) d^3 r' = 1 \quad (2.19)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{r} - \vec{r}', h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.20)$$

donde el límite se interpreta como el límite correspondiente a la interpolación de la integral y  $h$  es un parámetro con dimensiones de longitud mientras que el espacio se considera tridimensional. Al hacer cálculos numéricos, la interpolación integral se aproxima con una sumatoria

$$A_I(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (2.21)$$

donde los índices de sumatoria  $j$  denotan la etiqueta para cada partícula, la suma se hace sobre todas las partículas. La partícula  $j$  tiene una masa  $m_j$ , su posición es  $\vec{r}_j$ , su densidad es  $\rho_j$  y su velocidad es  $\vec{v}_j$ . El valor de cualquier otra cantidad  $A$  en  $\vec{r}_j$  se denota por  $A_j$ . El punto esencial de este método es que se puede construir un interpolador diferenciable de cualquier función a partir de sus valores particulares (puntos de interpolación) utilizando un kernel de interpolación que también es diferenciable. No hay necesidad de utilizar diferencias finitas o de separar el espacio en mallas tal como lo hace  $N$ -cuerpos. Por ejemplo, si se requiere calcular  $\vec{\nabla} A$ , simplemente se utiliza

$$\vec{\nabla} A(\vec{r}) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_j, h). \quad (2.22)$$

Los cálculos originales de Gingold & Monaghan 1977 [76] utilizan un kernel Gaussiano unidimensional

$$W(x, h) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-(x^2/h^2)}, \quad (2.23)$$

y en tres dimensiones

$$W(\vec{r}, h) = \frac{1}{h\pi^{3/2}} e^{-(\vec{r}^2/h^2)}. \quad (2.24)$$

el cual es el ejemplo usual de una secuencia que imita a una función delta en el límite  $h \rightarrow 0$ . Si se quiere hallar una interpretación física de las ecuaciones de SPH, es mejor asumir siempre que el kernel es Gaussiano. Así, por ejemplo, la densidad en cualquier punto del espacio se estima como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j m_j W(\vec{r} - \vec{r}_j, h), \quad (2.25)$$

es decir, la densidad del fluido ya se está expresando de manera discreta al utilizar estas funciones de interpolación.

## 2.3. Ecuaciones de movimiento

Al tratar el fluido perfecto, este debe obedecer las ecuaciones de Euler de dinámica de fluidos, es decir, la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.26)$$

y la ecuación de momento

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} - \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.27)$$

junto con la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.28)$$

donde  $\rho, \vec{v}, P$ , son la densidad, velocidad y presión del fluido en cualquier tiempo  $t$  y  $\Phi, G$  representan el potencial gravitacional y la constante universal de gravitación, respectivamente. Estas ecuaciones ofrecen una visión global del fluido. En la representación de Lagrange, se elige un punto del campo vectorial obtenido por el esquema de Euler en algún tiempo  $t = t_0$  y se analiza su evolución temporal, lo que permite estudiar la dinámica de las partículas que conforman al fluido de manera individual. Expresando la derivada total como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad (2.29)$$

entonces la ecuación (2.26) toma la forma siguiente

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.30)$$

y la ecuación (2.27) se puede escribir como

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} - \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.31)$$

En la siguiente subsección se analizará este esquema desde el punto de vista de SPH y se obtendrán expresiones consistentes con las ecuaciones de movimiento de Euler de la hidrodinámica.

### 2.3.1. Ecuación de momento

Utilizando las ideas de las secciones anteriores, se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de la siguiente manera. El gradiente de la presión se calcula utilizando

$$\rho_i \vec{\nabla} P_i = \sum_j m_j (P_j - P_i) \vec{\nabla}_i W_{ij}, \quad (2.32)$$

donde  $W_{ij}$  denota  $W(\vec{r}_i - \vec{r}_j, h)$ . Este particular resultado tiene la ventaja de que la fuerza se hace cero cuando la presión es constante. Aunque su desventaja es que el momento lineal y angular no se conservan de forma exacta (un par aislado de partículas con diferentes presiones podría crear un *loop* que resultaría en

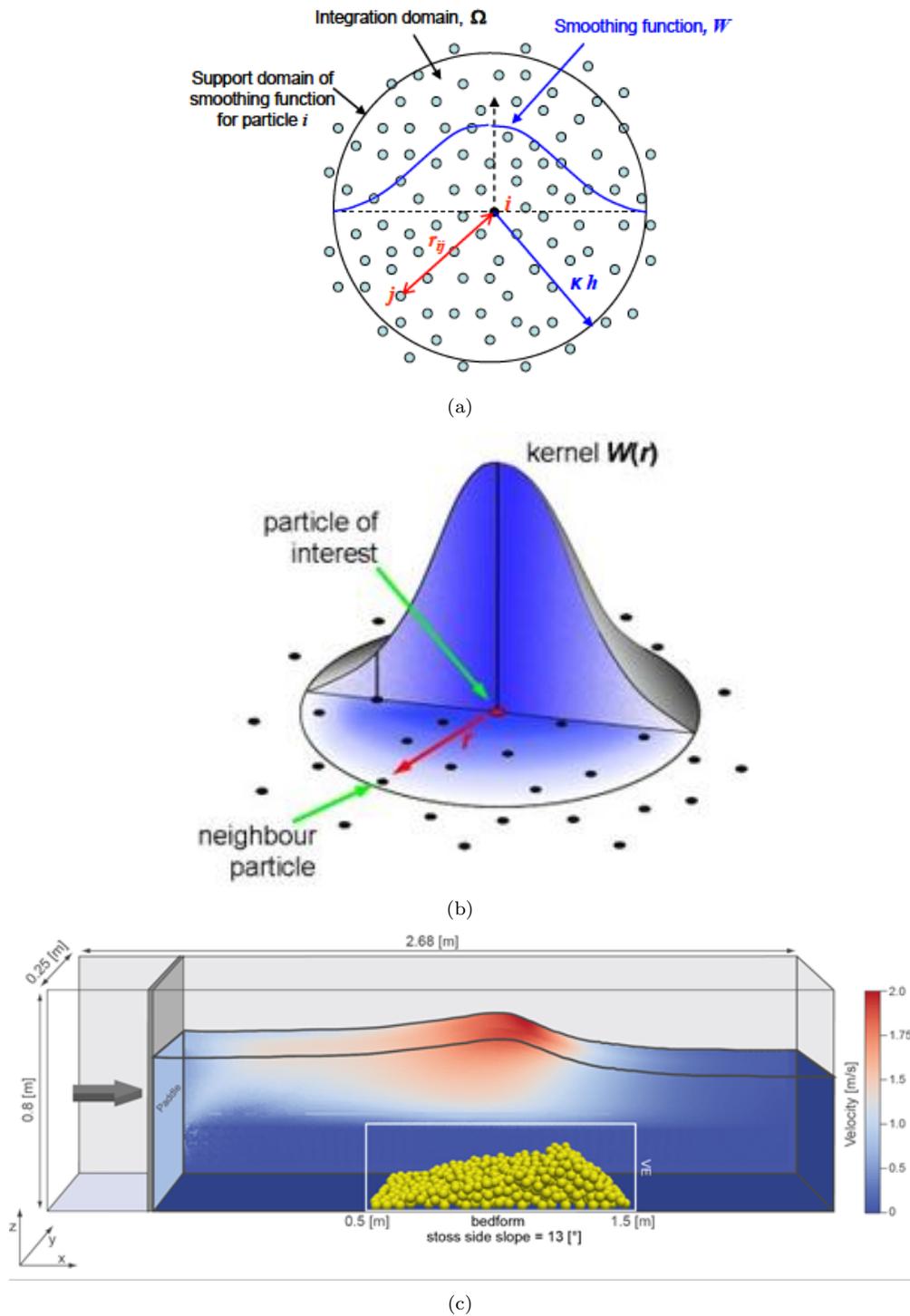


Figura 2.3: Modelo de SPH. *Superior*: El volumen de un fluido se discretiza mediante partículas, cada partícula representa una cierta cantidad del volumen del fluido. *Medio*: La partícula contiene información que para evaluarse se debe tomar un promedio de los valores de la partícula alrededor de un dominio mediante un kernel. *Inferior*: Después de evaluar la información de una partícula, se hace lo mismo para las partículas restantes de la simulación. La figura (c) muestra el modelo SPH para simular una ola en un tanque de agua (Gingold & Monaghan; 1977 [71]).

valores infinitos), y es difícil construir una ecuación de energía consistente. Monaghan apunta que es mejor simetrizar el término de gradiente de presión reescribiendo  $\nabla P/\rho$  como

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} = \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho. \quad (2.33)$$

La ecuación de momento para la partícula  $i$  se escribe entonces de la forma siguiente

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left( \frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij}. \quad (2.34)$$

El resultado de la ecuación (2.34) se obtuvo de una forma discreta del principio de acción de un fluido adiabático. Existen otras formas simétricas de las ecuaciones de momento para SPH, aunque para este caso particular es suficiente con el obtenido en la ecuación (2.33).

### 2.3.2. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad puede interpolarse de dos maneras

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij} \quad (2.35)$$

o bien

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_j m_j \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \quad (2.36)$$

donde se hace uso de la notación  $\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$ . Con la ecuación (2.36) la densidad de cada partícula se puede fijar y variar solamente cuando las partículas se mueven relativamente unas a otras.

### 2.3.3. Ecuación de energía térmica

La ecuación para el intercambio de energía térmica por unidad de masa en forma continua se escribe como

$$\frac{du}{dt} = - \left( \frac{P}{\rho} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad (2.37)$$

para la partícula  $i$  puede escribirse de la forma

$$\frac{du_i}{dt} = \left( \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \sum_j m_j \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}, \quad (2.38)$$

o, empleando la relación

$$\frac{du}{dt} = - \vec{\nabla} \left( \frac{P\vec{v}}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{P}{\rho} \right), \quad (2.39)$$

también como

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j m_j \left( \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla} W_{ij}. \quad (2.40)$$

Al tomar el promedio de las ecuaciones (2.38) y (2.40), se tiene

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left( \frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \vec{v}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}, \quad (2.41)$$

la cual tiene los mismos valores simétricos de la ecuación (2.34). Cualquier forma de la ecuación de energía al ser interpretada utilizando un kernel Gaussiano muestra que la energía térmica de la partícula  $i$  se incrementa cuando la partícula  $j$  se aproxima a ella.

### 2.3.4. Viscosidad

Para evitar una discontinuidad en el flujo de gases ideales, es necesario además introducir una viscosidad artificial (Monaghan & Gingold 1983 [77]) denotada por  $\Pi_{ij}$ . La viscosidad artificial más utilizada se obtiene escribiendo la ecuación de momento como

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_j m_j \left( \frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij}, \quad (2.42)$$

donde  $\Pi_{ij}$  está dada por

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0 \\ 0 & \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} > 0 \end{cases}, \quad (2.43)$$

y

$$\mu_{ij} = \frac{h \vec{v}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\vec{r}_{ij}^2 + \eta^2}, \quad (2.44)$$

siendo  $c_{ij}$  la velocidad media del sonido,  $\alpha$  y  $\beta$  dos parámetros adimensionales y que según pruebas hechas en simulaciones, deben tener valores cercanos a  $\alpha = 1$  y  $\beta = 2$ , mientras que el valor  $\eta^2$  previene singularidades y es el equivalente de suavizado gravitacional para la viscosidad. Esta expresión tiene ciertas ventajas:

1. Es invariante ante transformaciones de Galileo;
2. Desaparece para rotación de cuerpo rígido;
3. Conserva momento lineal y angular.

La expresión para  $\Pi_{ij}$  contiene un término que es lineal con la diferencia de velocidades, que produce viscosidad de corte.

### 2.3.5. Kernels

Utilizar diferentes kernels en SPH es análogo a utilizar diversos esquemas en métodos de diferencias finitas. El kernel basado en las funciones delta spline (Monaghan & Lattanzio 1985 [74]) es

$$W(\vec{r}, h) = \frac{\sigma}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3 & \text{si } 0 \leq \frac{r}{h} \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-q)^3 & \text{si } 1 \leq \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}, \quad (2.45)$$

donde  $q \equiv \vec{r}/h$ ,  $\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$  y  $\nu$  es el número de dimensiones y  $\sigma$  es una constante de normalización, con valores

$$\frac{2}{3}, \frac{10}{7\pi}, \frac{1}{\pi},$$

en una, dos y tres dimensiones, respectivamente. Este kernel es de soporte compacto; la segunda derivada es continua y el error dominante del interpolador de la integral es del orden  $\mathcal{O}(h^2)$ . Que sea de soporte compacto significa que las interacciones se anulan exactamente para  $r > 2h$ ; la continuidad de la segunda derivada implica que el kernel no es sensible al desorden de las partículas y los errores de los interpoladores son pequeños dado que el desorden de las partículas no es muy grande. La diferencia al utilizar SPH para modelar fluidos, tales como agua o gas, es que sobre la partícula de interés de estudio, se crea un dominio dependiendo de la distancia  $\vec{r}$  y de  $h$ , por lo que dentro de ese dominio existen partículas que influyen en la interacción de la partícula, lo cual eventualmente permite modelar la interacción (Figura 2.3).

El método SPH describe la dinámica de un gas de partículas, en este caso, materia visible o bariónica y junto con la dinámica de fluidos sin colisión autogravitantes, se tiene lo necesario para llevar a cabo una simulación cosmológica que pueda incluir ambos componentes. En el siguiente capítulo se describe la función lógica, aunque de manera breve, del código GADGET-2.

## Capítulo 3

# GADGET

En este capítulo se presenta uno de los códigos más populares y a su vez más accesibles para calcular simulaciones cosmológicas conocido como GALaxies with Dark matter and Gas intERacT (GADGET), el cual es un código libre que utiliza el método de  $N$ -cuerpos en conjunto con SPH para el cálculo de simulaciones cosmológicas y que ha tenido varias etapas y modificaciones desde su primer aparición en 2001. El código fue desarrollado en su mayoría por Volker Springel [62] como parte de su tesis de doctorado en el Max Planck Institute for Astrophysics. Puede utilizarse para analizar sistemas aislados o para simulaciones que involucren la expansión del espacio. En ambos casos con o sin condiciones periódicas a la frontera. En todas las simulaciones, GADGET sigue la evolución de un sistema de  $N$ -cuerpos sin colisión autogravitante y permite la inclusión de dinámica de gases, descrita por el método SPH. GADGET es capaz de simular sistemas aislados, tales como la colisión y formación de galaxias hasta la formación a gran escala del Universo. La versión pública del código, Gadget-2 (Springel V.; 2005 [78]), lanzada en 2005 es la que se utilizó para las diversas simulaciones de este trabajo.

En la sección 2.1 del Capítulo 2, se comenta que GADGET hace uso de distintos algoritmos para calcular fuerzas entre partículas de materia oscura y la dinámica de gases para materia bariónica. Se describe de forma breve dos algoritmos para calcular la fuerza entre partículas, los algoritmos tree y PM. GADGET-2 utiliza una combinación de ambos algoritmos, el *TreePM method* (Bode, Ostriker & Xu 2000; Bagla 2002 [79, 80]). Este método construye un campo de densidades de masa en la malla, en la cual se efectúa una transformada de Fourier discreta. Se deja evolucionar en el tiempo y se aplica una transformada de Fourier inversa para obtener el potencial gravitacional de la malla.

Una simulación cosmológica requiere de un poder computacional más allá del de una simple computadora, se necesita un arreglo de computadoras que permitan el cálculo de manera paralela, es decir, un clúster computacional. Este es un conjunto de ordenadores unidos entre sí normalmente por una red de alta velocidad y que se comportan como si fuesen una única computadora. El clúster es un recurso vital para llevar a cabo una simulación de tal magnitud. Gadget-2 utiliza una serie de algoritmos de descomposición. Este arreglo permite distribuir la carga de memoria en procesadores individuales, reduciendo el tiempo de cálculo de manera jerárquica, es decir, se le da prioridad a los cálculos que requieran mayor memoria, por ejemplo en el método TreePM, que divide el espacio en celdas cada vez más pequeñas. Los cálculos que requieren mayor memoria son distribuidos a más procesadores, se les da más prioridad, un proceso como esto se observa mejor en la Figura 3.1.

El equipo de Volker Springel realizó la Simulación del Milenio [81] (Figura 3.2) utilizando Gadget-2; esta simulación utilizó más de 10 mil millones de partículas para rastrear la evolución de la distribución de la materia en una región cúbica del Universo de más de 500 Mpc. Mantuvo ocupado el superordenador principal en el Centro de Supercomputación de la Sociedad Max Planck en Garching, Alemania, durante más de un mes y la cantidad de información obtenida durante esa simulación rebasa los 25 Tbytes.

La simulación incluye 20 millones de galaxias dentro de este enorme volumen agrupadas en halos de materia oscura, visualizada a esta escala como filamentos.

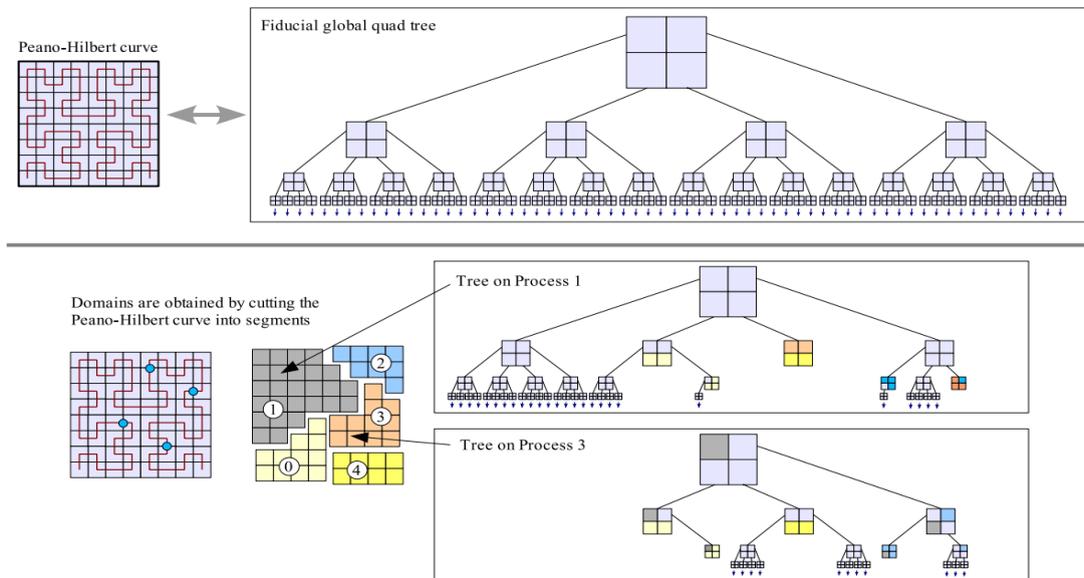


Figura 3.1: Ilustración entre un algoritmo BH y una descomposición de procesos Peano-Hilbert. Esta es una curva que recorre cada celda de la simulación solo una vez. El volumen de la simulación se reparte en dominios al segmentar esta curva en puntos arbitrarios entre los límites de la celda. Esto genera una manera de distribuir el conjunto de partículas en procesadores individuales (Springel et al. 2005; [78]).

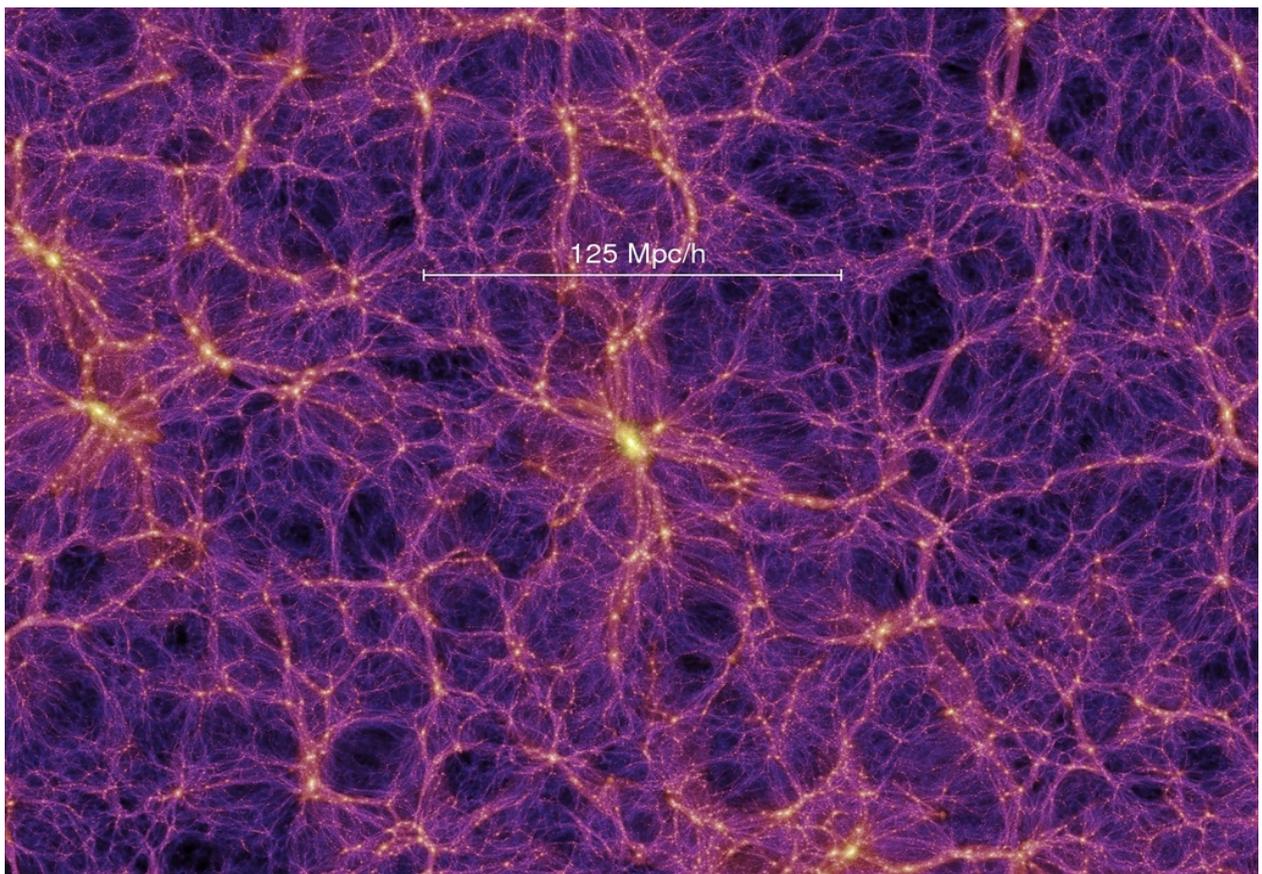


Figura 3.2: Resultado de la Simulación del Milenio llevada a cabo en el Max Planck Institute for Astrophysics, en esta imagen se observa la distribución a gran escala de materia oscura en forma de una inmensa red que conecta a las galaxias dentro de la simulación (Springel et al. 2005 [81]).

### 3.1. Axion-Gadget

Axion-Gadget [82] es una modificación del código de simulaciones de  $N$ -cuerpos/SPH de Gadget-2. Está basado en un modelo diferente de materia oscura, el Axion Ultra-Ligero o Ultra-Light Axion DM, también llamado Fuzzy Dark Matter (Turner 1983 [83], Sin 1994 [84], Matos et al. 2002 [85] Guzmán & Ureña-López, 2003 [86], Kim & Marsh 2016 [87]), sugiere la utilización del modelo SFDM para resolver los problemas que han surgido de la teoría de  $\Lambda$ CDM así como en sus resultados numéricos. FDM es un bosón escalar, ya discutido en la sección 1.2.3., con una masa ultra ligera ( $m \sim 10^{-22}$  eV), la cuál es requerida debido a una reciente observación de la época de reionización del Universo.

Con el valor de la masa del orden de  $m \sim 10^{-22}$  eV, la longitud de onda de Compton de este campo escalar, dada por la expresión  $\lambda = 2\pi\hbar/m$ , debe tener un valor aproximado a  $\lambda \sim \text{kpc}$ , el tamaño aproximado de una galaxia en el Universo. El campo escalar, de aquí en adelante referido como FDM, se produce de manera no térmica y en el régimen no relativista se comporta como CDM. La característica más llamativa del FDM es que el halo tiene un núcleo solitónico de tamaño  $\sim \mathcal{O}(\text{kpc})$  resultante de la presión cuántica de las partículas FDM, que puede ser más grande que su propia gravedad. Por lo tanto, la presión cuántica juega un papel esencial en la resolución de la crisis de pequeña escala.

La modificación propone un nuevo esquema de la interacción efectiva Partícula-Partícula del algoritmo PM para simular el modelo FDM, mediante el cual se puede calcular el efecto cuántico del FDM en simulaciones de  $N$ -cuerpos.

#### 3.1.1. Propiedades Físicas

La naturaleza de FDM se describe mediante las ecuaciones de Schrödinger-Poisson (Zhang et al. 2017 [82]), dadas respectivamente por

$$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m_\chi} \vec{\nabla}^2 \Psi + m_\chi V \Psi, \quad (3.1)$$

y

$$\vec{\nabla}^2 V = 4\pi G m_\chi |\Psi|^2, \quad (3.2)$$

donde  $\hbar$ ,  $m_\chi$  y  $V$  son la constante de Planck, la masa de la partícula y el potencial gravitacional que actúa sobre la partícula. La función de onda se escribe como

$$\Psi = \sqrt{\frac{\rho}{m_\chi}} \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right), \quad (3.3)$$

en términos de la densidad de número  $\rho/m_\chi$ , mientras que se puede definir el gradiente de  $S$  como el momento lineal de la DM

$$\vec{\nabla} S = m_\chi \vec{v}. \quad (3.4)$$

Con esta definición, al introducir la función de onda  $\Psi$  en la ecuación (3.1) y resolviendo las ecuaciones de Schrödinger-Poisson, de la parte imaginaria, se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.5)$$

mientras que de la parte real, se obtiene la ecuación de conservación de momento

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} (Q + V). \quad (3.6)$$

con  $Q$  un potencial cuántico, llamado potencial de Bohm el cual está definido como

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m_\chi^2} \frac{\vec{\nabla}^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.7)$$

Es importante observar la relación entre esta presión y la presión encontrada en el Capítulo 1, dada por la ecuación (1.94). La diferencia está en que en lugar de utilizar el operador d'Alambertiano  $\square$  se utiliza el operador Laplaciano  $\nabla$ , dado que la interacción entre partículas de materia oscura en este punto no es relativista, si no que meramente gravitacional. Esta "presión cuántica" es la que hace posible que en SFDM

los halos de materia oscura sean creados en menor medida a comparación de  $\Lambda$ CDM. Esto es un resultado esperado para el modelo.

Estas dos últimas ecuaciones son llamadas ecuaciones de Madelung (Spiegel 1980 [88], Uhleman et al. 2014 [89], Marsh 2015 [90]). Se observa que la presión  $Q$  solo está definida por la densidad de masa  $\rho$  y puede identificarse como una fuerza adicional ejercida sobre las partículas.

Para tomar en cuenta el efecto de la presión cuántica, se inicia con el Hamiltoniano sin el término de gravedad

$$H = \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} |\vec{\nabla}\Psi|^2 d^3x = \int \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 d^3x + \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla}\sqrt{\rho})^2 d^3x. \quad (3.8)$$

Entonces la energía cinética en forma discreta, con índice  $j$  para identificar a cada partícula se escribe como

$$T = \int \frac{\rho}{2} |\vec{v}|^2 d^3x = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left( \frac{dq_j}{dt} \right)^2, \quad (3.9)$$

donde  $q_j$  es la coordenada de la  $j$ -ésima partícula y la energía potencial será

$$K_p = \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla}\sqrt{\rho})^2 d^3x. \quad (3.10)$$

Note que el término de la energía potencial  $K_p$  no está discretizado aún, esto se realizará más adelante.

El correspondiente Lagrangiano del sistema será entonces

$$L = T - K_p = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left( \frac{dq_j}{dt} \right)^2 - \int \frac{\hbar^2}{2m_\chi} (\vec{\nabla}\sqrt{\rho})^2 d^3x, \quad (3.11)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange tendrán la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow m_j \ddot{q}_j = - \frac{\partial K_p}{\partial q_j}. \quad (3.12)$$

El potencial  $K_p$  es una función continua por lo que no puede usarse en el método Particle-Particle (*PP method*). Para eso debe implementarse una aproximación numérica con funciones delta que discreticen a la densidad de número de cada partícula individual.

### 3.1.2. Implementación de la presión cuántica

Para una interacción partícula-partícula, la densidad de número para cada partícula individual se describe con funciones delta. De esta manera la densidad de masa  $\rho$  puede escribirse como

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (3.13)$$

Numéricamente, una función delta puede ser un problema computacional dada la cobertura de la función, ya que eso podría llevar a inconsistencias en el cálculo, tales como valores infinitos o no definidos. Sin embargo, se puede aproximar esta función delta como una función kernel/Gaussiana muy angosta, con tal de que su anchura sea lo suficientemente pequeña. Las ventajas de esta aproximación son las siguientes:

1. Mantiene naturalmente el suavizamiento del kernel, es diferenciable y esféricamente simétrico.
2. La interacción partícula-partícula evita singularidades en posiciones donde la densidad sea nula.

Debido al tamaño infinito de la red, esa singularidad puede hacer que numéricamente, el resultado no tenga sentido físico. Con esto en mente, se escribe la función  $\delta$  como una Gaussiana de la forma

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda^3 \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}{\lambda^2}\right). \quad (3.14)$$

El valor de  $\lambda$  no es arbitrario, debe ser del mismo orden de la longitud de onda de Compton del campo escalar, ya que una partícula de FDM debe tener probabilidad alta de ser encontrada dentro de un paquete

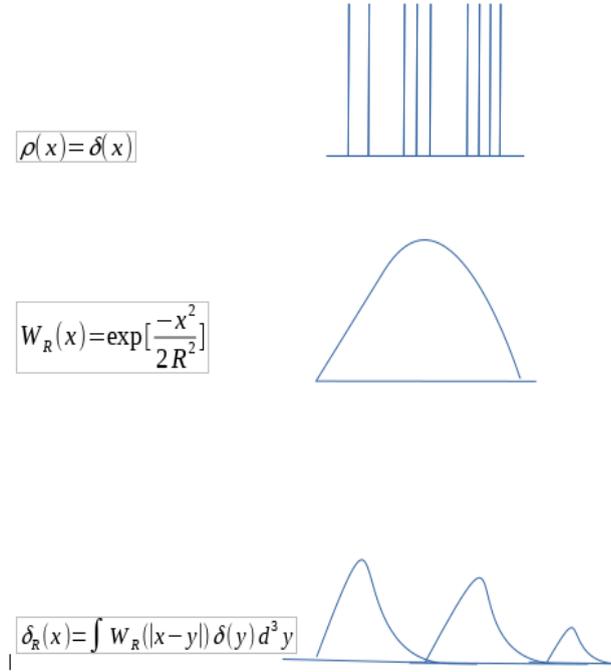


Figura 3.3: Interpretación física de las funciones de densidad de partículas del código Axion-Gadget. *Superior*: Cuando la densidad es descrita por una función delta de Dirac, las partículas son puntuales. *Central*: La densidad de una función Gaussiana se asemeja a la densidad de SPH. *Inferior*: La densidad que combina ambas funciones crea un movimiento continuo de las partículas.

de onda descrito por la ecuación (3.3). Con estos valores, la probabilidad de encontrar una partícula de FDM en una longitud de onda es de 95%. Tomando la masa del FDM con orden  $\mathcal{O}(M_\chi) \sim 10^{-22}$  eV como ejemplo, su longitud de onda  $\lambda_M$  es de  $\mathcal{O}(\lambda_M) \sim \text{kpc}$ . Insertando la ecuación (3.14) en el término  $(\vec{\nabla}\sqrt{\rho})^2$  de la ecuación (3.10) la expresión se puede expandir utilizando la función kernel

$$\begin{aligned}
 [\vec{\nabla}\sqrt{\rho(\vec{r})}]^2 &= \frac{1}{4\rho(\vec{r})} \left[ \sum_i m_i \vec{\nabla}\delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2, \\
 &= \frac{1}{4\rho(\vec{r})} \left[ \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \left(-\frac{4}{\lambda^2}\right) (\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2, \\
 &= \frac{4}{\lambda^4 \rho(\vec{r})} \left[ \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

En la simulación, esas partículas de FDM se agrupan en cúmulos masivos en el espacio, estos cúmulos pueden tratarse como partículas puntuales (ignorando el tamaño de los cúmulos a escalas cosmológicas). La densidad de masa (3.13) toma así la forma

$$\rho(\vec{r}) = \sum_j \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_j), \tag{3.16}$$

con el índice  $j$  para cada agrupación de cúmulos.

Matemáticamente, se puede pensar que la densidad de masa se expande alrededor de  $\vec{r}_j$  para incluir a todas las partículas de FDM:  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - \vec{r}_j$  y  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i - \vec{r}_j$ . Tomando eso en consideración, la suma de partículas individuales de FDM es efectivamente la misma que sumando sobre todos los puntos y la ecuación (3.15)

puede reescribirse como

$$\left[ \vec{\nabla} \sqrt{\rho(\vec{r})} \right]^2 \simeq \frac{4}{\lambda^4} \left[ \sum_i m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) (\vec{r} - \vec{r}_i) \right]^2 \left[ \sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^{-1}. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.15) y (3.17) son prácticamente iguales pero su significado no debe confundirse en este punto; el paquete de onda Gaussiano se vuelve un kernel imaginario de suavizamiento de partículas.

Para discretizar completamente  $\partial K_p / \partial q_j$  debe integrarse la ecuación (3.17) en todo el espacio; dada la naturaleza de la propia función  $\delta$ , se enfoca en el volumen que rodea los puntos imaginarios de las partículas. Así, la integración total con la aproximación del kernel da

$$\int \left[ \vec{\nabla} \sqrt{\rho(\vec{r})} \right]^2 \simeq \int \frac{4d^3x}{\lambda^4} \left[ \sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^2 \left[ \sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right]^{-1} \quad (3.18)$$

$$\simeq 4\lambda^{-4} \sum_j m_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) (\vec{r} - \vec{r}_j)^2 \Delta V_j B_j, \quad (3.19)$$

$$\simeq 4\lambda^{-4} \sum_j m_j \frac{\Delta V_j B_j}{\lambda^3 \pi^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_j)^2}{\lambda^2} \right] (\vec{r} - \vec{r}_j)^2, \quad (3.20)$$

donde  $V_j$  y  $B_j$  son el volumen efectivo y el factor de corrección de la  $j$ -ésima partícula respectivamente.

El factor de corrección  $B_j$  para la  $j$ -ésima partícula en la simulación se propone para que numéricamente pueda distinguirse entre los resultados de la integración de la función  $\delta$  como un kernel Gaussiano, es decir, cuando se considera a esta función como kernel cuya anchura es igual a una longitud de onda de una partícula, no se comporta como una función  $\delta$  en la región donde la distancia entre dos centros del kernel es menor a una longitud de onda. En rangos tan pequeños, la superposición entre dos Gaussianas puede contribuir significativamente, especialmente al hacer integraciones con alta densidad de partículas.

El volumen efectivo  $\Delta V_j$  para cada partícula en la simulación es del orden de  $\lambda^3 \pi^{3/2}$ , resultado de una integral del kernel Gaussiano; el valor exacto de  $\Delta V_j$  puede diferir de sistema a sistema por la propia complejidad de la región central del kernel. Se trata de un parámetro libre fenomenológico o constante, pero se ajusta su valor para hacer coincidir el resultado dentro del núcleo del solitón obtenido con otras aproximaciones con mejor resolución en regiones que miden menos de una longitud de onda. (Schieve et al. 2014 [91]).

Finalmente; la ecuación (3.10) puede expresarse como

$$\sum_j \frac{\partial K_p}{\partial q_j} = \frac{4\hbar^2}{m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j m_j \Delta V_j B_j \exp \left[ -\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left( 1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_j), \quad (3.21)$$

al igual que la ecuación de movimiento (3.12)

$$\sum_j m_j \ddot{q}_j = \frac{4\hbar^2}{m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j m_j \Delta V_j B_j \exp \left[ -\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left( 1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r} - \vec{r}_j). \quad (3.22)$$

Sustituyendo  $q$  con  $\vec{r}$ , la aceleración adicional de la presión cuántica en la simulación se describe como

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{4M\hbar^2}{M_0 m_\chi^2 \lambda^4} \sum_j B_j \exp \left[ -\frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right] \left( 1 - \frac{2|\vec{r} - \vec{r}_j|^2}{\lambda^2} \right) (\vec{r}_j - \vec{r}), \quad (3.23)$$

donde  $M$  es la masa de la partícula en la simulación y  $M_0$  es un factor de normalización que involucra a  $\Delta V_j$ , cuyo valor se elige  $M_0 = 10^6 M_\odot$ . Si se coloca cualquier partícula solitaria de prueba alrededor de fuentes de presión cuántica, la energía adicional dada al sistema por parte de esta presión es cero. El trabajo total (la integración de la ecuación (3.23) de  $r = 0$  a  $r = \infty$ ) se anula.

Es decir, se ha deducido que la presión cuántica es una interacción de rango corto, mostrado con la ecuación (3.23) ya que el término exponencial que decrece y depende en gran manera de la longitud de onda  $\lambda$  de Compton que posea la materia oscura.

Zhang en su artículo menciona que pone a prueba esta nueva modificación con un sistema de dos partículas ( $B_j = 1$ ), separadas por una distancia del orden de  $\mathcal{O}(\text{kpc})$ , la aceleración causada por la presión cuántica será de  $\mathcal{O}(\frac{\hbar^2}{m^2 \lambda^3}) \sim \mathcal{O}(10^{-10} m/s^2)$ . La presión cuántica puede ser atractiva si la distancia entre dos partículas es menor a  $\lambda/\sqrt{2}$ . Sin embargo, se vuelve repulsiva si la distancia es mayor a  $\lambda/\sqrt{2}$ . Al recordar el término  $Q$  de la ecuación (3.3), la presión cuántica es proporcional a la segunda derivada de la densidad de masa, que

puede tener valores positivos, negativos o nulos, correspondientes físicamente a fuerzas atractivas, repulsivas o nulas.

La modificación al código se hace solamente para el cálculo de fuerzas entre partículas de materia oscura, es decir el *TreePM algorithm* es el gran cambio en este código, el cálculo de fuerza para materia bariónica, es decir, SPH se deja intacto. La finalidad de utilizar esta modificación es la de comparar el modelo FDM con  $\Lambda$ CDM en escalas cosmológicas.

## 3.2. Ejemplos

Los siguientes son ejemplos incluidos dentro de la distribución de GADGET-2. Antes de ejecutar cualquier simulación se debe editar el `makefile` dentro del folder de `Gadget2`, este proceso se detalla más profundamente en el Apéndice B. Las simulaciones ejecutadas son una colisión de dos galaxias y la evolución a gran escala en un Universo  $\Lambda$ CDM y fueron realizados en una laptop con un solo procesador.

### 3.2.1. Colisión de galaxias

Esta simulación consiste de dos discos de galaxias acercándose una a otra, llevando a una fusión entre ellas. Cada galaxia consiste de un disco estelar y un halo masivo extenso de materia oscura. Este ejemplo utiliza física Newtoniana, con 20000 partículas de disco y 40000 partículas de halo (Figura 3.4).

### 3.2.2. Formación de estructura a gran escala

Este ejemplo consiste de  $32^3$  partículas de materia oscura, junto con  $32^3$  partículas de gas, la formación de estructura se lleva a cabo en una caja periódica de tamaño  $(50h^{-1}\text{Mpc})^3$  en un Universo  $\Lambda$ CDM. La física involucrada es para gases adiabáticos y la temperatura mínima del gas se fija en 1000 K. Este ejemplo utiliza condiciones iniciales tipo malla, donde las partículas de gas se colocan en los centros de la malla rodeados por partículas de materia oscura. La simulación inicia en  $z = 10$  y termina en la época presente (Figura 3.5).

Los parámetros utilizados para esta simulación se indican en la tabla 3.1

Tabla 3.1: Parámetros del ejemplo incluido en Gadget para  $\Lambda$ CDM

Descripción	Símbolo	Valor
Densidad de materia oscura	$\Omega_0$	0.3
Densidad de energía oscura	$\Omega_\Lambda$	0.7
Densidad de materia bariónica	$\Omega_b$	0.04
Parámetro de Hubble ( $h = H_0/100 \text{ Mpc} \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$h$	0.7

El ejemplo de la formación de estructura a gran escala es el que se analizará con ambos códigos. Para este fin, se generan condiciones iniciales idénticas para ambas simulaciones, haciendo cambios en el suavizamiento gravitacional y en el caso de FDM, en el valor de la longitud de onda de Compton de las partículas de materia oscura.

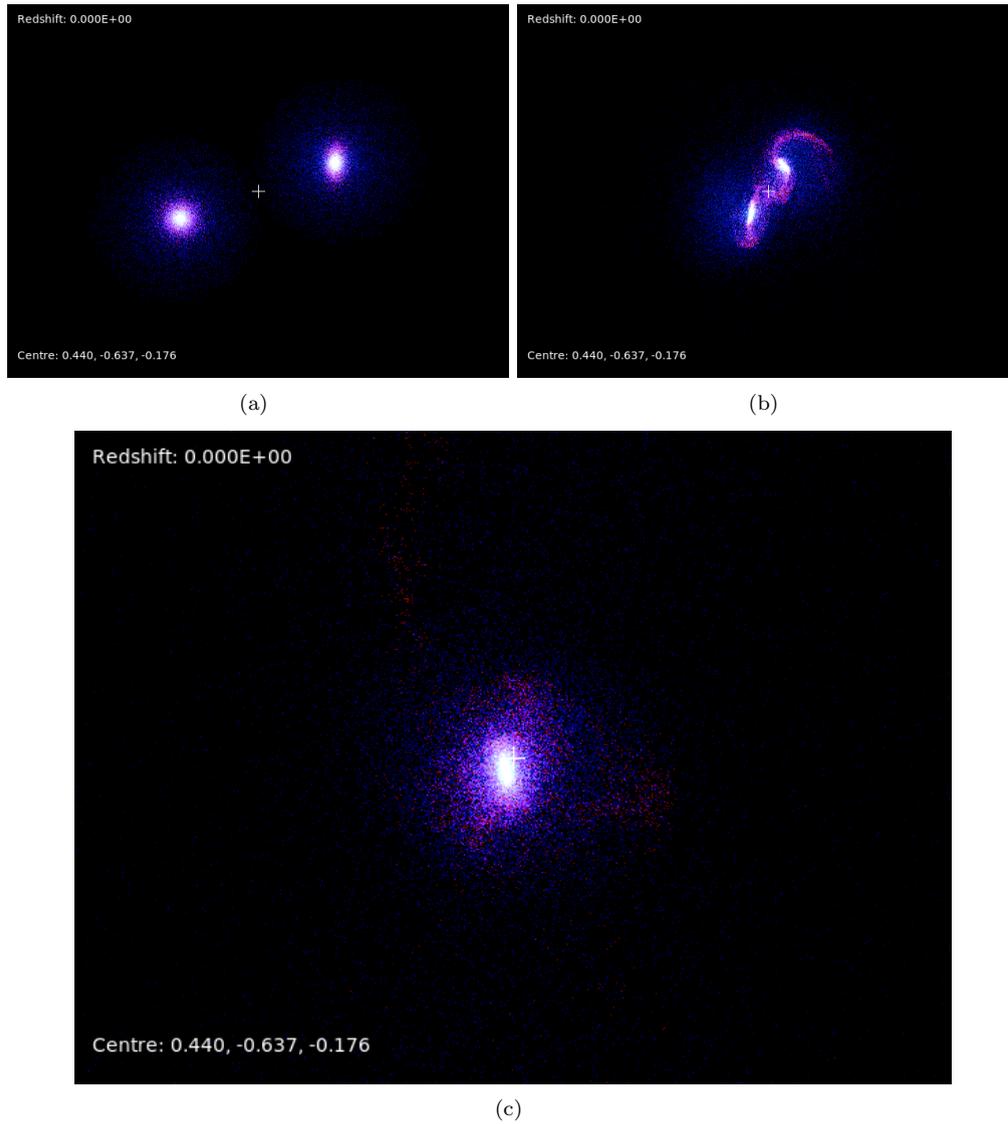


Figura 3.4: Evolución de dos galaxias espirales colisionando para formar una sola. En la figura las partículas azules representan el halo de materia oscura, las partículas rojas representan el disco estelar.

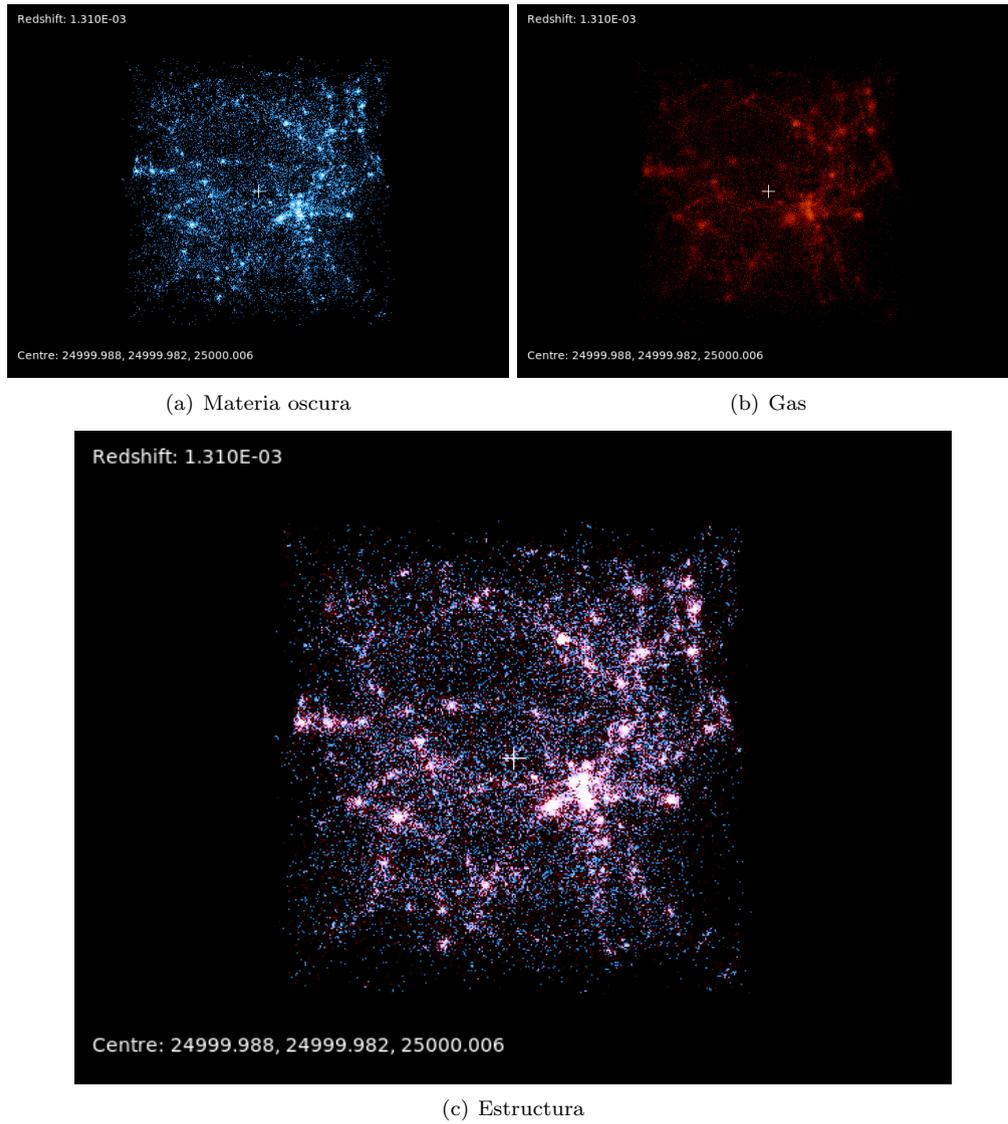


Figura 3.5: Representación de una evolución cosmológica desde  $z = 10$  hasta  $z = 0$ . En la figura se observan los halos de materia oscura y las agrupaciones de gas debido a la atracción gravitacional de la materia oscura.

## Capítulo 4

# Simulaciones cosmológicas con GADGET y Axion-Gadget

En los capítulos anteriores se han descrito los modelos de evolución cosmológica, las simulaciones de  $N$ -cuerpos y el código GADGET junto a la modificación que utiliza la teoría de campo escalar para poder ejecutar simulaciones cosmológicas a grandes escalas. Por lo que es necesario llevar a cabo un estudio a detalle de los resultados obtenidos, la cual no es tarea sencilla dado que los archivos de salida en formato binario contienen toda la información de la simulación que después debe extraerse para luego analizarse. Existe una gran variedad de programas y códigos hechos para poder generar condiciones iniciales, visualizar las simulaciones e interpretar dichos resultados, otros deben crearse de acuerdo a los resultados físicos que se requieran. Hay códigos que ayudan a la visualización directa de las partículas y permiten una observación y manipulación en 3 dimensiones de los archivos de salida o *snapshots*. En este capítulo se describen las herramientas computacionales para crear condiciones iniciales de acuerdo a la capacidad de cálculo disponible; códigos para analizar los datos que se obtienen de cada *snapshot* y programas para interpretar resultados.

### 4.1. Generar condiciones iniciales

Para poder llevar a cabo una simulación cosmológica con Gadget-2 y en general, con cualquier otro código, se debe contar con un archivo de condiciones iniciales. En dicho archivo se indica:

1. El tipo de simulación que se va a llevar a cabo: cosmológica, galáctica, etc.
2. La cantidad de partículas que se usarán en la simulación ( $N$ ).
3. El tiempo de inicio de la simulación en caso de que sea cosmológica ( $z$ ).
4. La densidad de materia oscura ( $\Omega_0$ ).
5. La densidad de energía oscura ( $\Omega_\Lambda$ ).
6. La densidad de materia bariónica ( $\Omega_b$ ).
7. El parámetro de Hubble ( $h$ ).
8. El tamaño de la caja de simulación ( $L$ ).
9. El término de normalización del espectro de potencias ( $\sigma_8$ ) [92].

Además, es necesario definir otras cantidades, tales como la longitud, la masa y la velocidad en unidades convencionales, es decir kpc,  $M_\odot$  y km/s. El código que genera este archivo de parámetros lleva a cabo una aproximación, llamada *Aproximación Zeldovich* [93, 94].

La aproximación Zeldovich describe el estado no lineal de la evolución gravitacional; la distribución de materia se considera homogénea y sin colisión. Si las coordenadas Lagrangianas (iniciales) no perturbadas de las partículas están descritas por  $\vec{q}$ , entonces las coordenadas Eulerianas en el tiempo  $t$  se definen como

$$\vec{r}(\vec{q}, t) = a(t)[\vec{q} + b(t)\vec{s}(\vec{q})], \quad (4.1)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala y  $b(t)$  es la razón de crecimiento de las fluctuaciones lineales. El término de velocidad  $\vec{s}(\vec{q})$  describe el desplazamiento de las partículas con respecto a la posición inicial (Laplaciana) y se encuentra relacionando el potencial  $\Phi_0(\vec{q})$  originado por las fluctuaciones lineales de la siguiente manera

$$\vec{s}(\vec{q}) = \vec{\nabla}\Phi_0(\vec{q}). \quad (4.2)$$

Se considera un medio homogéneo, sin presión ni viscosidad y sin interacción gravitacional. Para este sistema, las posiciones Eulerianas  $\vec{x}$  en  $t$  se relacionan con las posiciones Laplacianas como sigue

$$\vec{x}(\vec{q}, t) = \vec{q} + \vec{v}(\vec{q})t. \quad (4.3)$$

Dado que en  $t > 0$  se crean inhomogeneidades a la densidad, por conservación de masa se requiere que

$$\rho(\vec{r}, t)d\vec{r} = \rho_0 d\vec{q}, \quad (4.4)$$

entonces, el campo de densidad en función de las coordenadas Lagrangianas será

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right| = \frac{\bar{\rho}}{\left| \delta_{ij} - b(t) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right|}, \quad (4.5)$$

donde se define el tensor de deformación  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ , que describe la evolución gravitacional del fluido y la densidad media  $\bar{\rho}$  se define como  $\bar{\rho} \equiv (a_0/a)^3 \rho$ . En un estado lineal, cuando  $b(t)\vec{s}(\vec{q}) \leq 1$ , la ecuación (4.5) cambia a

$$\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}[1 - b(t)\vec{\nabla}_q \cdot \vec{s}(\vec{q})], \quad (4.6)$$

donde  $\vec{\nabla}_q \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{q}}$ . De forma más general, dado que la expresión (4.2) hace que el tensor de deformación se convierta en una matriz simétrica real, sus eigenvectores definen un conjunto de 3 ejes ortogonales principales. Después de diagonalizar, la ecuación (4.5) puede escribirse en términos de sus eigenvalores,  $-\alpha(\vec{q})$ ,  $-\beta(\vec{q})$ ,  $-\gamma(\vec{q})$ , los cuales indican la contracción o expansión a lo largo de los tres ejes principales

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\bar{\rho}}{[1 - b(t)\alpha(\vec{q})][1 - b(t)\beta(\vec{q})][1 - b(t)\gamma(\vec{q})]}. \quad (4.7)$$

Si los eigenvalores se ordenan de tal forma que  $\alpha(\vec{q}) \geq \beta(\vec{q}) \geq \gamma(\vec{q})$ , entonces, conforme a que  $b(t)$  crece, la primer singularidad en la ecuación (4.7) ocurre en correspondencia con la primer coordenada Lagrangiana  $\vec{q}_1$ , donde  $\alpha$  obtiene su valor máximo posible  $\alpha_{max}$ , en el tiempo  $t_1$  de tal forma que  $b(t_1) = \alpha_{max}^{-1}$ . Esto corresponde a la formación de una *rebanada de panqué* (estructura laminar) por contracción a lo largo de los ejes principales. Zeldovich argumentó que estos panqués son los que se producen primero debido al aglomeramiento gravitacional. Otras estructuras como filamentos y nodos provienen de contracción y expansión a lo largo de los ejes restantes.

Esta es una aproximación simple que describe la etapa no lineal de la evolución gravitacional de una distribución de materia, que se considera homogénea y sin colisiones y en ella se utiliza la teoría de perturbaciones no lineal para la densidad de materia. La aproximación Zeldovich se aplica de forma exitosa para describir la agrupación a gran escala de la distribución de los cúmulos de galaxias.

Existe una gran cantidad de códigos para generar condiciones iniciales (MuSIC, pyICs, S-GenIC [95]); en este trabajo se utilizó N-GenIC [81], dado que fue creado por Volker Springel en 2003 y sus archivos de salida son creados específicamente para GADGET, incluso este código fue utilizado para crear las condiciones iniciales para la Simulación del Milenio.

Las condiciones iniciales para la formación de estructura utilizada en este trabajo se indican en la tabla 4.1. No se utilizaron partículas de materia bariónica debido a la implementación de Axion-Gadget.

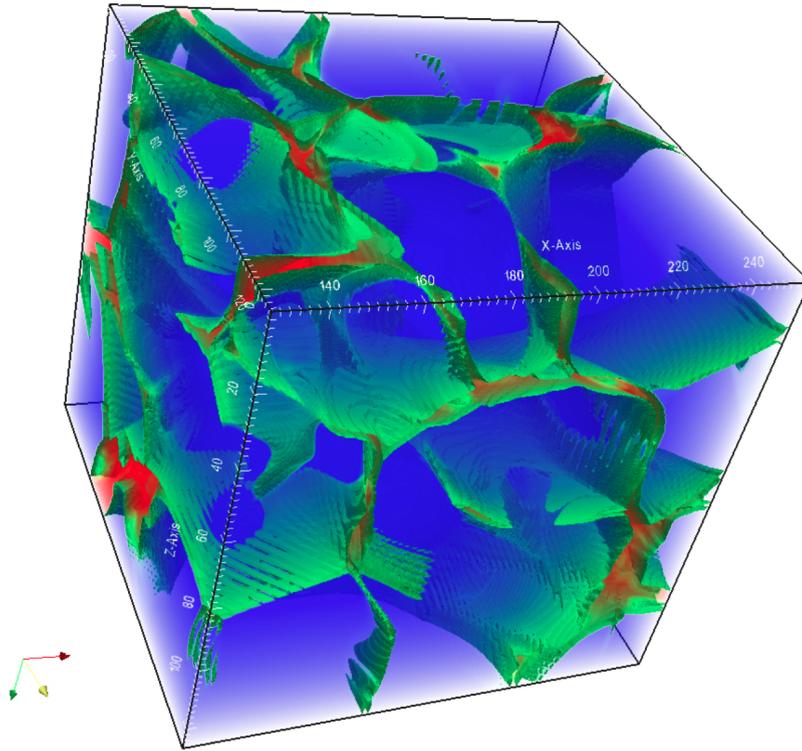


Figura 4.1: Estructura tridimensional de la Aproximación Zeldovich. En esta figura se observa como se genera una “rebanada de panqué”, las cuales representarán estructuras cosmológicas.

Tabla 4.1: Condiciones Iniciales.

	Descripción	Símbolo	Valor
Densidades ( $z = z_f$ )	Materia oscura	$\Omega_0$	0.268
	Energía oscura	$\Omega_\Lambda$	0.683
	Materia bariónica	$\Omega_b$	0.049
Simulación	Boxsize	$L$	[50 Mpc, 5 Mpc]
	No. de partículas	$N$	$2^{21} \sim 2$ Millones
Redshift	Inicial	$z_{init}$	[90, 70, 50, 30]
	Final	$z_f$	0
Otras cantidades	Parámetro de Hubble	$h$	0.7
	Espectro de potencias	$\sigma_8$	0.8

Tabla 4.2: Parámetros adicionales en las simulaciones.

	Descripción	Cantidad	Unidades
Sistema de unidades	Longitud(cm)	$3.08 \times 10^{21}$	1 kpc
	Masa (g)	$1.989 \times 10^{43}$	$10^{10} M_\odot$
	Velocidad (cm/s)	$10^5$	1 km/s
Suavizados	$\Lambda$ CDM( $\epsilon$ )	0.89	kpc
	SFDM( $\lambda$ )	1.414	kpc, pc
SFDM	FdmAxionMass ( $M_\chi$ )	$2.5 \times 10^{-22}$	eV
	FDmKernelLambda ( $\lambda_M$ )	1.41	kpc, pc

## 4.2. Ejecución de los códigos

Gadget y Axion-Gadget cuentan con archivos de parámetros para cada simulación, lo importante es especificar distintos valores al ejecutar el código, ya que estos deben coincidir con los valores que se han generado en las condiciones iniciales.

Al utilizar el código Axion-Gadget deben añadirse 3 parámetros más: la masa de las partículas  $M_\chi$  de FDM, un parámetro de normalización para la masa y su longitud de onda de Compton  $\lambda_M$  (figura 4.3). Las longitudes de suavizado escogidas tiene valores entre [pc] y [kpc] dado que la longitud de onda de Compton es de ese mismo orden, si se cambia el suavizado del archivo para ejecutar Axion-Gadget, el programa se detiene, esto es debido a que no puede interpretar de manera correcta los cálculos de la fuerza entre partículas. La modificación del código solo cambia la interacción entre partículas de materia oscura en rangos pequeños, dado que la presión entre ellas es de naturaleza cuántica.

Al hacer simulaciones para los modelos descritos de materia oscura no es necesario implementar materia bariónica, ya que implementar gas a las simulaciones implica una doble carga de partículas. Esto se debe a que el código que genera las condiciones iniciales indica el número de partículas de materia oscura que se van a simular y además tiene la opción de generar partículas bariónicas en forma de gas para las simulaciones cosmológicas. La cantidad de partículas de materia oscura generadas será igual a la cantidad de partículas de materia bariónica, por ejemplo, si se generan  $128^3$  partículas de materia oscura, habrá también  $128^3$  partículas de materia bariónica, eventualmente esa doble carga lleva a tiempo invertido en simulación. Sin embargo, está contemplado el añadir partículas de gas en un trabajo suplementario a este.

Durante la etapa de simulación, se hizo notar que hay diferentes factores a tomar en cuenta antes de generar condiciones iniciales. Algunos de ellos fueron,

- Iniciar las simulaciones desde  $z$  grandes: permitir una mayor evolución del sistema simulado.
- Agregar una función de transferencia a N-GenIC: el espectro de potencias de masa de halos de materia puede obtenerse de datos observacionales del CMB realizados por las misiones Planck a través de códigos como CAMB [96], CLASS [97] o CosmoMC [98].
- Resolución: simular cubos de escalas pequeñas con millones de partículas y cambiar parámetros de condiciones iniciales.
- Simular cubos grandes ( $> 50$  Mpc): con la finalidad de analizar los halos masivos de materia oscura.

En la tabla 4.3 se listan las primeras pruebas de simulaciones realizadas. La razón para ejecutar tantas simulaciones fue la de obtener distintos resultados respecto a las mismas condiciones iniciales generadas por la Teoría de Perturbaciones Lagrangiana de primer orden (1LPT) tomando en cuenta corrimientos al rojo grandes, medios y pequeños o tardíos, así como el impacto de la implementación del código modificado en escalas pequeñas.

Estos motivos han sido discutidos por mucho tiempo y de manera amplia, se ha llegado a la conclusión de que las condiciones iniciales y el tamaño de la simulación influyen en el resultado, como mencionan Bagla & Rasad 2006 [99] y L'Huillier et al. 2014 [100]. Por ejemplo, iniciar desde un corrimiento al rojo muy alto causa que el desplazamiento sea pequeño con respecto a la longitud de resolución, produciendo inexactitud de las condiciones iniciales. Por otro lado, iniciar la simulación en corrimientos al rojo tardíos puede causar que la aproximación no sea confiable (se rompa) para las perturbaciones iniciales.

La implementación de Axion-Gadget en este estudio requiere declarar ciertas limitantes [101]:

1. El tiempo de simulación es mayor debido a la presión cuántica entre partículas en escalas pequeñas.
2. El volumen de la simulación y el número de partículas están relacionados al resultado final, las simulaciones en cajas de tamaño  $L = 50$  Mpc no son recomendadas, su resultado no es fiable.
3. Generar condiciones iniciales utilizando Teoría de Perturbaciones Lagrangiana de primer orden (1LPT), como se ha hecho en este trabajo, también tiene impacto en el resultado final.

La elección de la masa del campo escalar también influye en el resultado para la creación de halos de materia oscura. Suárez & Chavanis 2015; 2017 [103, 104], han calculado de forma analítica y numérica la masa  $M_\chi$  del campo escalar y su longitud de onda de Jeans  $\lambda_J$ , que causa el colapso de materia oscura en halos para formar galaxias. La elección de una masa de  $\mathcal{O}(M) \sim 10^{-22}$  eV genera una longitud de inestabilidad de Jeans de aproximadamente  $\mathcal{O}(\lambda_J) \sim$  pc. Estudios relacionados están planeados para complementar este trabajo.

**% Characteristics of run**

```

TimeBegin          0.09090901 % z=10, Begin of the simulation
TimeMax           1          % z=0, End of the simulation

Omega0            0.26
OmegaLambda       0.7
OmegaBaryon       0.04
HubbleParam       0.7
BoxSize           5000.0

```

(a) Condiciones Iniciales

**% System of units**

```

UnitLength_in_cm   3.085678e21      ; 1.0 kpc
UnitMass_in_g      1.989e43         ; 1.0e10 solar masses
UnitVelocity_in_cm_per_s 1e5       ; 1 km/sec
GravityConstantInternal 0

```

**% Softening lengths**

```
MinGasHsm1Fractional 0.25
```

```

SofteningGas       1.0
SofteningHalo      1.0
SofteningDisk      0
SofteningBulge     0
SofteningStars     0
SofteningBndry    1.0

```

```

SofteningGasMaxPhys 1.0
SofteningHaloMaxPhys 1.0
SofteningDiskMaxPhys 0
SofteningBulgeMaxPhys 0
SofteningStarsMaxPhys 0
SofteningBndryMaxPhys 1.0

```

(b) Unidades y longitud de suavizado

Figura 4.2: Imágenes de pantalla del formato del archivo de parámetro para GADGET-2.

```

FdmAxionMass 1.0 %1e-22eV
FdmNormMass 0.00775466
FdmKernelLambda 1.414213562 %kpc

```

Figura 4.3: Imagen de pantalla que indica los parámetros adicionales para ejecutar Axion-Gadget. Estos parámetros son añadidos al final del archivo original. Estos parámetros son añadidos al final del archivo original. Para la modificación de Axion-Gadget, FdmKernelLambda es la longitud de onda de Compton de las partículas de materia oscura, mientras que FdmAxionMass y FdmNormMass son los valores de la masa (en eV) y su respectivo término de normalización.

Tabla 4.3: Simulaciones hechas en este trabajo. El primer conjunto consiste en simulaciones con Gadget. El segundo conjunto fue para Axion-Gadget.

ID	$N_p$	$L_{box}$	$z_{ini}$	Tiempo	Comentarios
Set 1:					
N1	$2^{21}$	50 Mpc	90	~4 horas	
N2	$2^{21}$	50 Mpc	70	~4 horas	
N3	$2^{21}$	50 Mpc	50	~3 horas	
N4	$2^{21}$	50 Mpc	30	~3 horas	
N5	$2^{21}$	5 Mpc	90	~4 horas	
N6	$2^{21}$	5 Mpc	70	~4 horas	
N7	$2^{21}$	5 Mpc	50	~3 horas	
N8	$2^{21}$	5 Mpc	30	~3 horas	
Set 2:					
SF1	$2^{21}$	50 Mpc	90	~7 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF2	$2^{21}$	50 Mpc	90	~7 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
SF3	$2^{21}$	50 Mpc	70	~5 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF4	$2^{21}$	50 Mpc	70	~5 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
SF5	$2^{21}$	50 Mpc	50	~4 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF6	$2^{21}$	50 Mpc	50	~4 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
SF7	$2^{21}$	50 Mpc	30	~3 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF8	$2^{21}$	50 Mpc	30	~3 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
SF9	$2^{21}$	5 Mpc	90	~7 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF10	$2^{21}$	5 Mpc	90	~7 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
SF11	$2^{21}$	5 Mpc	70	~5 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF12	$2^{21}$	5 Mpc	70	~5 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
stop en $z = 2$					
SF13	$2^{21}$	5 Mpc	50	~4 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF14	$2^{21}$	5 Mpc	50	~4 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc
stop en $z = 2.57$					
SF15	$2^{21}$	5 Mpc	30	~3 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ kpc
SF16	$2^{21}$	5 Mpc	30	~3 horas	$\mathcal{O}(\lambda_M)$ pc

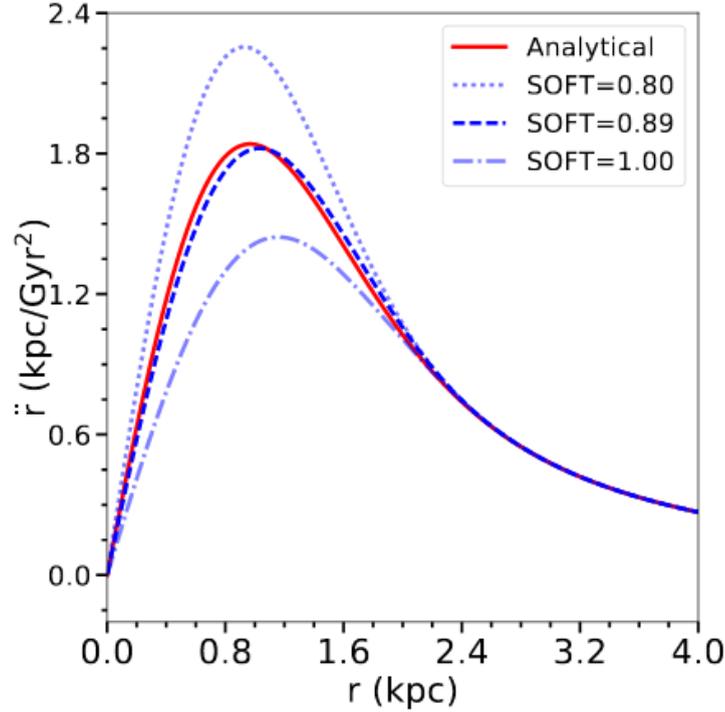


Figura 4.4: Comparación de la curva de aceleración analítica de una distribución de densidad de masa gaussiana con diferentes longitudes de suavizado (Zhang et al. 2018).

### Suavizamiento gravitacional

Como ya se ha mencionado, el parámetro de longitud de suavizamiento gravitacional (opción `SofteningHalo` en `Gadget-2`), es un parámetro numérico crítico en simulaciones de  $N$ -cuerpos, ya que evita singularidades cuando la distancia entre dos partículas es muy pequeña. Sin embargo, en simulaciones con FDM (Axion-Gadget), esta longitud no puede ser cero, ni un parámetro completamente artificial porque la distribución de densidades la define un kernel Gaussiano. A diferencia de simulaciones con CDM, la longitud de suavizamiento gravitacional de FDM está fuertemente ligada a la longitud de onda del campo escalar.

Para una distribución de masa con distribución de densidad Gaussiana, la aceleración gravitacional de una partícula de prueba es

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{GM(< r)}{r^3} \vec{r}, \quad (4.8)$$

donde  $M(< r)$  es la masa encerrada en el radio  $r$  del centro del kernel Gaussiano. La masa encerrada en este radio  $r$  puede parametrizarse nuevamente como

$$\begin{aligned} \frac{M(< r)}{M(r = \infty)} &= \frac{\int_0^r \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda^2}\right) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda^2}\right) 4\pi r^2 dr} \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\lambda}\right) - 1.13 \exp\left(-\frac{2r^2}{\lambda^2}\right) \frac{\sqrt{2}r}{\lambda} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde  $\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}r}{\lambda}\right)$  es una función de error del kernel Gaussiano, definida por

$$\operatorname{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

En su artículo [82], Zhang menciona que del cálculo analítico para la aceleración gravitacional de una distribución de densidad Gaussiana, el mejor ajuste de suavizamiento gravitacional tiene un valor de `Soft` = 0.89 kpc. Por lo que este suavizamiento es el que se utiliza como parámetro central en las simulaciones para CDM.

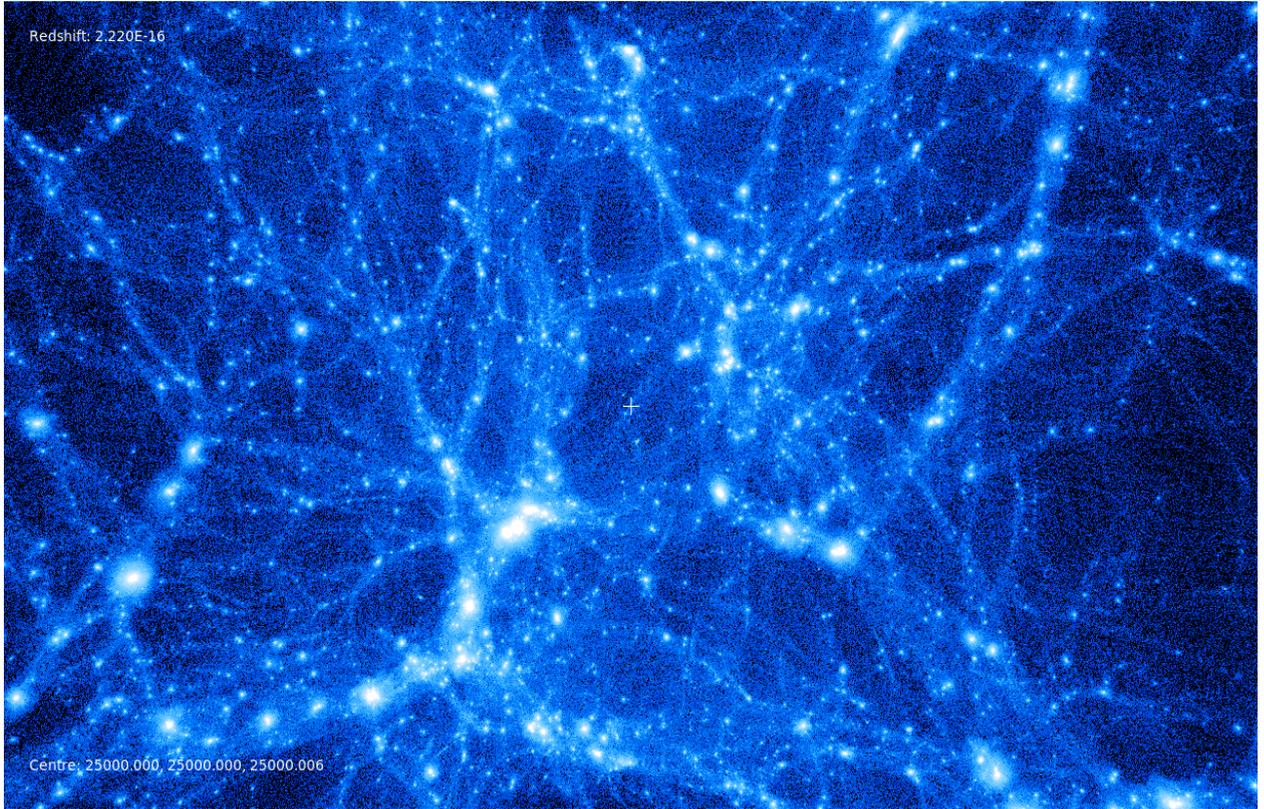


Figura 4.5: Simulación de  $\Lambda$ CDM con 7 millones de partículas en una caja de 50 Mpc. En esta figura se observan los halos de materia oscura como los puntos más brillosos, en total se contaron cerca de 4000 halos.

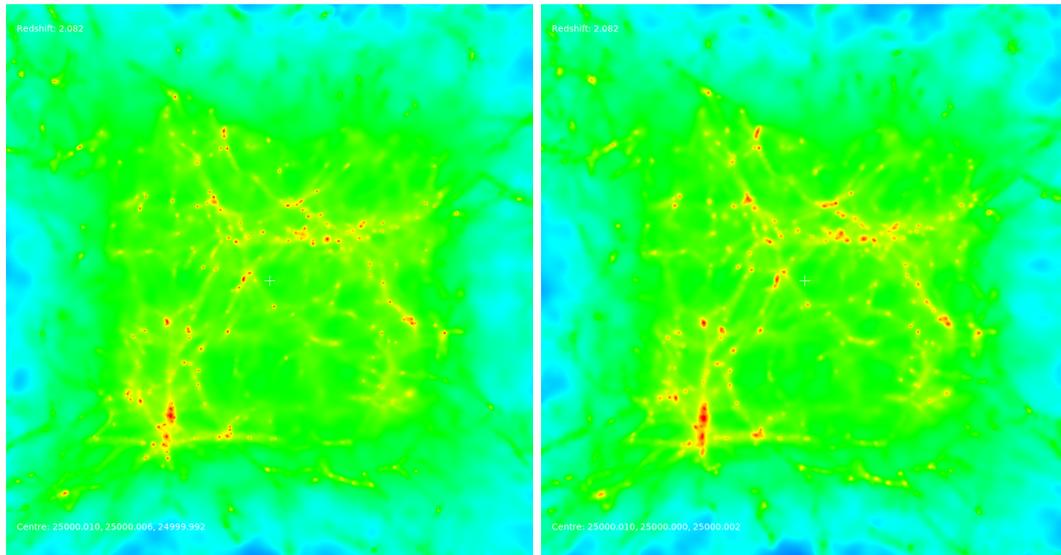
En la figura 4.4 puede observarse el cálculo de la aceleración debido a una distribución de densidad de masa gaussiana comparada con diversas longitudes de suavizado gravitacionales, siendo el  $\text{Soft} = 0.89$  kpc el que más se acerca al cálculo analítico. La longitud de onda  $\lambda_M$  y el suavizado están correlacionados y su estudio profundo será objetivo de trabajos futuros.

### 4.3. Formación de estructura

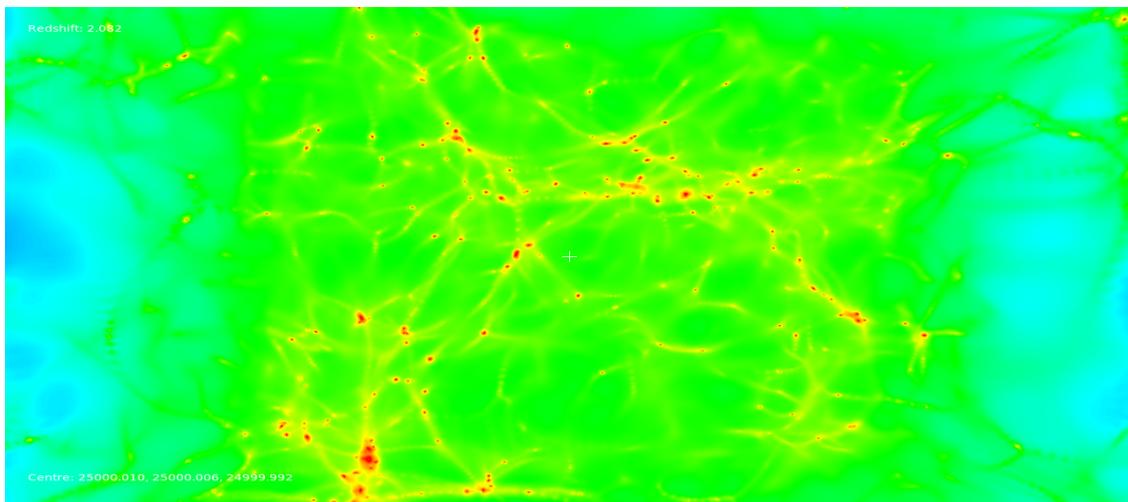
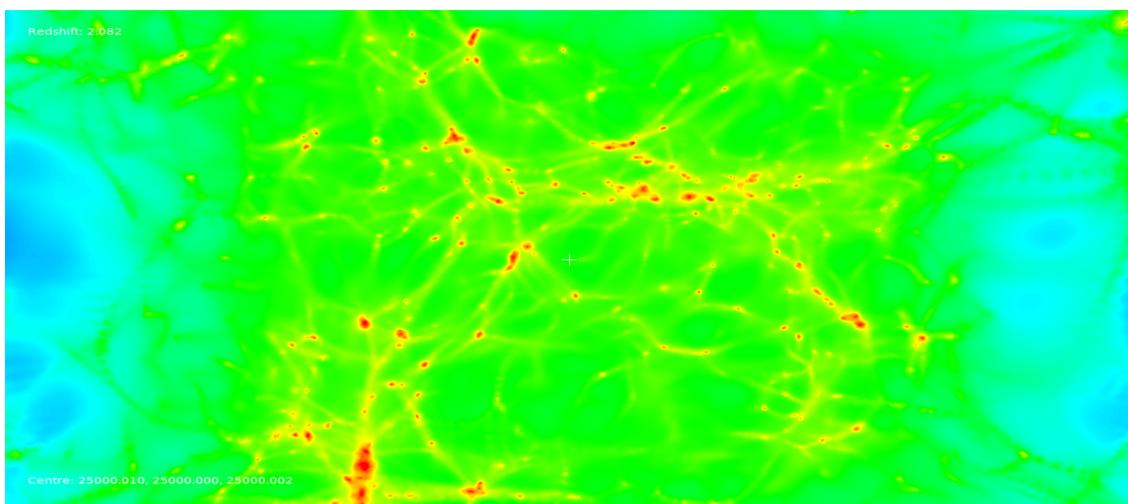
En la Figura 4.5 se aprecia el resultado de una simulación con el modelo  $\Lambda$ CDM utilizando aproximadamente 7 millones de partículas. La formación de estructura de ambos modelos es, a grandes rasgos muy similar en lo que a escala se refiere. Por ejemplo, la Figura 4.6 es el resultado de una simulación de una caja de 50 Mpc por lado y se observa la distribución de agrupaciones y cúmulos de materia oscura a un  $z \approx 2$ , haciendo después un acercamiento a la simulación. Estas imágenes se encuentran en escala logarítmica, siendo las partes rojas donde hay mayor concentración de partículas de materia oscura y que eventualmente formarán halos de galaxias

La Figura 4.6 es una imagen de una simulación de (a)  $\Lambda$ CDM y (b) SFDM cuyas dimensiones son 50 Mpc por lado, ambas fueron hechas con las mismas condiciones iniciales. El acercamiento (c) en la simulación de  $\Lambda$ CDM muestra una porción de 25 Mpc por lado, comparado con el acercamiento (d) de SFDM. Se observa que  $\Lambda$ CDM forma, en general, más halos pequeños de materia oscura alrededor de cúmulos grandes, y que estos halos tienen una densidad mayor, ya que las zonas rojas en los cúmulos indican más concentración de materia oscura. A diferencia de SFDM, donde las grandes estructuras se reproducen al igual que  $\Lambda$ CDM, notando que la cantidad de halos pequeños creados alrededor de los cúmulos grandes es menor y que su densidad está mayormente distribuida sobre todo el halo.

Comparando simulaciones similares desde otros corrimientos al rojo, la diferencia persiste en lo que se ha observado anteriormente para escalas de 50 Mpc, aunque se ha mencionado que el corrimiento al rojo influye en el resultado final de las simulaciones, dadas las condiciones iniciales que se generan y que la caja simulada

(a)  $\Lambda$ CDM

(b) SFDM

(c)  $\Lambda$ CDM

(d) SFDM

Figura 4.6: Densidad de materia oscura en logarítmica. el Tamaño de la caja en (a) y (b) es de 50 Mpc de los modelos  $\Lambda$ CDM y SFDM respectivamente a  $z \approx 2$ . Las imágenes (c) y (d) son acercamientos a 25 Mpc del centro de la simulación. En general los halos de materia oscura formados en ambas simulaciones tienen halos pequeños (satélite) alrededor de ellos, sin embargo, la simulación de SFDM muestra menos formación de halos pequeños y la densidad de los halos masivos se nota con menor concentración.

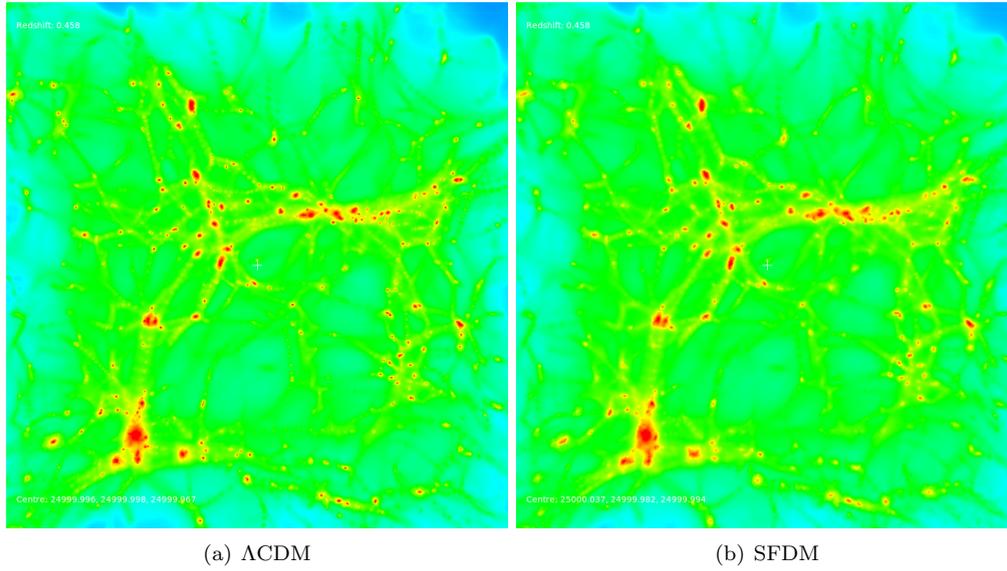


Figura 4.7: Simulaciones N1 y SF3. EL tamaño de estas imágenes es de 50 Mpc. Ambas imágenes son de la misma región en un tiempo cercano al actual ( $z \approx 0.5$ ).  $\Lambda$ CDM (a) forma más halos de materia oscura que SFDM (b), además de que los halos de materia oscura de (b) tienen densidad menor, esto se debe a que el código Axion-Gadget distribuye la materia oscura cuando la distancia entre una partícula y un aglomerado es menor a mayor a la longitud de Compton de las partículas ( $\lambda_C$ ).

no sobrepasa los 100 Mpc, la diferencia a simple vista permanece inalterada (Figura 4.7), esto también se debe a que la resolución es muy baja, para simulaciones de este tamaño, 2 millones de partículas no son suficientes para obtener una diferencia mayor.

También se observó que a escalas mayores de 50 Mpc, la longitud de onda de Compton  $\lambda_M$  tuvo impacto en los resultados, al observar la Figura 4.8 dado que a pesar de que la cantidad de halos formados es similar, la simulación SF3 ( $\mathcal{O}(\lambda) \sim \text{kpc}$ ) forma halos más suavizados, la materia oscura está extendida de mayor forma en las estructuras, a diferencia de SF4 ( $\mathcal{O}(\lambda) \sim \text{pc}$ ), cuyos halos pueden observarse con mayor densidad, pero con menor formación de satélites. La longitud de onda de Compton si repercute en el resultado de la simulación, sin embargo, el cambio del valor de este parámetro no está justificado de manera física. En recientes trabajos y discusiones [102], se ha llegado a la conclusión de que este resultado no dicta nada sobre la naturaleza de la materia oscura, dado que la implementación del código se efectúa en una caja pequeña, los parámetros de la simulación no son los correctos para esos valores, debe efectuarse un cálculo más para la frecuencia de Nyquist del archivo de condiciones iniciales así como cambiar el parámetro de normalización de la masa de Axion-Gadget  $\Delta V_0$ .

Sin embargo, al analizar simulaciones en cajas menores a 10 Mpc, se obtiene un resultado no esperado para SFDM. Observando las imágenes de la simulación SF10 y comparando con SF9 (Figura 4.9), la estructura para ( $\mathcal{O}(\lambda) \sim \text{kpc}$ ) no se forma y no tiene una geometría en lo más parecido a una distribución de halos de materia oscura. Este resultado es interesante, dado que, comparando el mismo resultado para SF10 ( $\mathcal{O}(\lambda) \sim \text{pc}$ ), puede notarse una gran diferencia. Los halos de materia oscura para esta simulación sí se forman y sí es posible observar la estructura de un clúster pequeño. Las causas probables son dos principalmente:

1. **El código no está modificado para rango corto:** En rango corto, el código que se utiliza es uno diferente al aplicado en grandes escalas, el cual Axion-Gadget no modifica y es la causa más probable del error.
2. **Normalización de la masa:** El término  $\Delta V_j$  contiene información sobre la masa del campo escalar, el cual puede poseer un error de normalización.

Como se ha mencionado, Suárez & Chavanis 2015; 2017 [103, 104], calcularon que la longitud de onda de Jeans para el colapso gravitacional debería tomar un valor del orden  $\mathcal{O}(\lambda_J) \sim \text{pc}$ . La formación de estructura está ligada a la longitud de onda de Jeans por el principio de incertidumbre en escalas no mayores a 5 Mpc. Cabe resaltar que este resultado es para el modelo de materia oscura escalar autointeractuante, el potencial  $V(|\Phi|^2)$  descrito en la ecuación (1.60) tiene un término de autointeracción que va como  $|\Phi|^4$ . Sin embargo

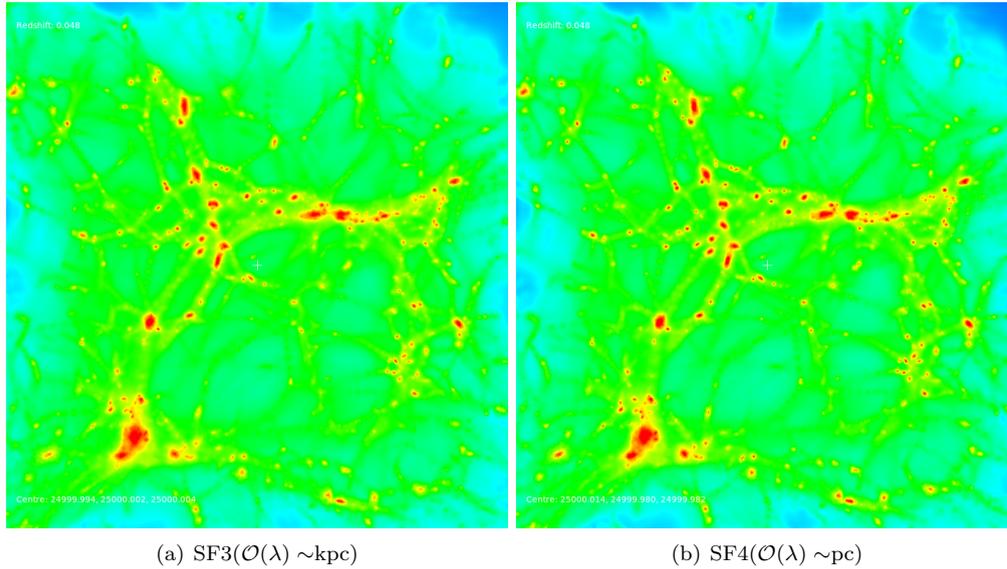


Figura 4.8: Simulaciones SF3 y SF4 en  $z \approx 0.05$ . Ambas cajas tienen un volumen de 50 Mpc. En (a) se aprecia la cantidad de halos generados para el modelo SFDM con una longitud de onda del orden de  $\lambda \sim \text{kpc}$ . En (b) se presenta la misma simulación de SFDM con una longitud de onda de Compton orden de  $\lambda \sim \text{pc}$ . La cantidad de halos generados es similar en ambos casos.

para este modelo de FDM en particular, dicho término no se toma en cuenta, pues aún no está implementado dentro del código. Se debe estudiar y modificar el código para escalas menores a 10 Mpc y potenciales de autointeracción.

#### 4.4. Función de masas de halos

Existen básicamente dos caminos para encontrar halos en una simulación. Uno de ellos, el método de sobredensidad, el cual se basa en la identificación de regiones superdensas sobre una cierta región límite. Este límite puede definirse con respecto a la densidad crítica  $\rho_c = 3H^2/8\pi G$ . La masa  $M_\Delta$  de un halo identificado de esta forma se define entonces como la masa encerrada en un radio  $r_\Delta$  cuya densidad media es  $\Delta\rho_c$  (Voit 2005 [105]).

El otro método, el algoritmo *Friends-of-Friends* (FOF) encuentra vecindades de partículas y vecindades de vecindades definidas por una distancia de separación (Davis et al. 1985 [106]). El algoritmo FOF identifica halos con formas arbitrarias ya que no se toman en cuenta suposiciones sobre la simetría de los halos. La masa del halo se define simplemente como la suma de las partículas que pertenecen al halo.

La función de masas de halos (la abundancia de halos como función de su masa), por sus siglas en inglés, *Halo Mass Function* (HMF) es una cantidad fundamental que caracteriza la distribución no lineal de masa en el Universo. Existen muchos trabajos sobre la construcción de modelos teóricos para esta función y así calibrarla junto con simulaciones numéricas (Press & Schechter 1973 [107], Mo & White 1996 [108], Sheth & Tormen 1999 [109], Jenkins et al. 2001 [110]).

La definición exacta de la función de masas varía mucho en la literatura. Para caracterizar diferentes ajustes, Jenkins introdujo la función de masas diferencial escalada  $f(\sigma, z)$  como una fracción de la masa total por el  $\ln \sigma^{-1}$  perteneciente a los halos

$$F(\sigma, z) \equiv \frac{d\rho/\rho_b}{d \ln \sigma^{-1}} = \frac{M}{\rho_b(z)} \frac{dn(M, z)}{d \ln[\sigma^{-1}(M, z)]}, \quad (4.10)$$

donde  $n(M, z)$  es la densidad de número de halos con masa  $M$ ,  $\rho_b(z)$  es la densidad del background en el corrimiento al rojo  $z$ , y  $\sigma(M, z)$  es la variación lineal del campo de densidad. Esta definición de la función de masas tiene la ventaja de que una buena precisión no depende explícitamente del corrimiento al rojo, el espectro de potencias de masa o de la cosmología, ya que están descritas en la función  $\sigma(M, z)$ .

La función de masas de halos indica la población de halos de materia oscura en distintas épocas del

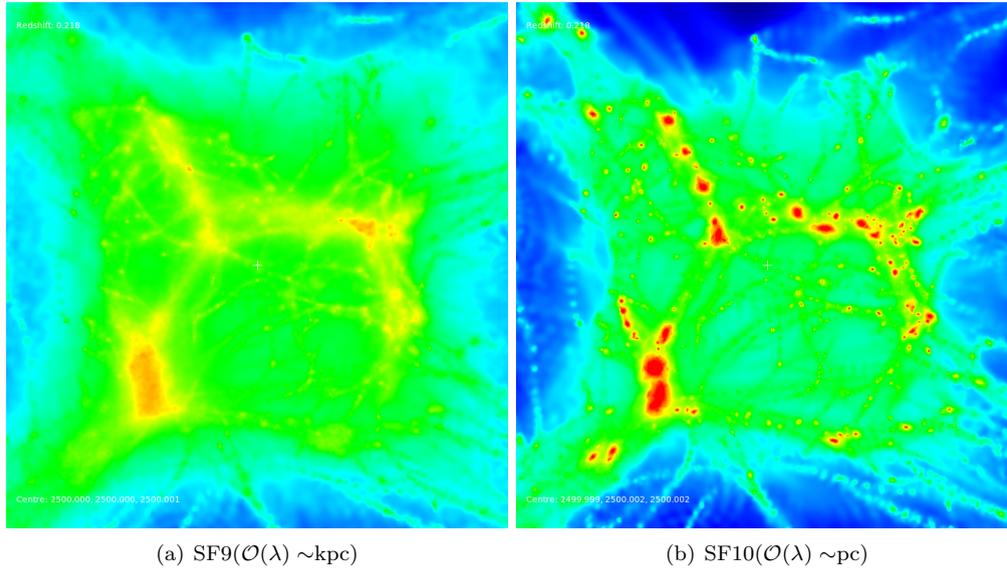


Figura 4.9: Simulaciones SF9 y SF10 en  $z \approx 0.2$ . Las simulaciones fueron hechas para el modelo SFDM en un volumen de 5 Mpc, se observa que la longitud de onda de Compton de un orden de  $\lambda \sim \text{kpc}$  de las partículas no es consistente con la formación de halos (a). Al cambiar la longitud de onda a  $\lambda \sim \text{pc}$  se obtiene nuevamente la estructura esperada (b). Se especula que el motivo principal por el cuál se obtenga esta discrepancia entre la teoría y la simulación es que el código no está modificado para un rango corto, donde el algoritmo para aproximar la interacción gravitacional es diferente que en grandes escalas.

Tabla 4.4: Simulaciones adicionales

	ID	$N_p$	$L_{box}$	$z_{ini}$	$\lambda_M$	$\epsilon$	Tiempo
ΛCDM:	N1	7077888	50 Mpc	23	N.A.	0.89 kpc	~10 horas
SFDM:							
$M_\chi = 2.5 \times 10^{-22}$ eV	SFN2	7077888	50 Mpc	23	1.41 kpc	0.89 kpc	~8 horas
$M_\chi = 2.5 \times 10^{-23}$ eV	SFN3	7077888	50 Mpc	23	14.14 kpc	0.89 kpc	~8 horas

Universo. Muchos estudios están de acuerdo en que esta puede aproximarse como la ley de potencias

$$dn/dm \sim m^{-\alpha}, \quad (4.11)$$

donde  $n$  es el número de subhalos,  $m$  es la masa de los halos de materia oscura y  $\alpha = 1.7 - 1.9$ , este resultado es independiente del corrimiento al rojo y de la masa del halo principal (Moore et al. 1999 [111]; Ghigna et al. 2000 [112]; De Lucia et al. 2004 [113]).

Otro conjunto de simulaciones con mayor resolución (7 millones de partículas) fue llevado a cabo, añadiendo ahora la simulación SFN3, cuya masa y longitud de onda del campo escalar se cambiaron a un orden de  $m = 2.5 \times 10^{-23}$  eV y  $\lambda_M = 14.142$  kpc, esto con el fin de observar posibles constricciones en los valores de la masa y longitud de onda de Compton de las partículas de materia oscura. Las simulaciones tardaron cerca de 8 horas en terminar de ser ejecutadas empleando 8 procesadores. Con los datos de las simulaciones indicados en la tabla 4.4, se han analizado `snapshots` de las simulaciones a  $z = 3, 2, 1$  y 0 respectivamente, con el objetivo de para observar la cantidad de halos creados en diferentes épocas y también el HMF de cada snapshot, los datos obtenidos se indican en la tabla 4.5.

En la figura 4.10 se observa la similitud entre ambos modelos de materia oscura, la diferencia entre ellos es muy sutil, dado que a simple vista es difícil observarlas. Para dicha tarea, se escribió un pequeño código de similitud de estructura, como se explica en el Apéndice C. Este código permite realizar una diferencia entre imágenes con dimensiones iguales. La similitud entre imágenes entra en un rango de  $[0,1]$ , siendo 0 una imagen nada parecida, y 1 una imagen exactamente igual. La similitud obtenida para las simulaciones N1 y SFN2 fue de 0.887 y para las simulaciones N1 y SFN3 fue de 0.777, una similitud entre el 89% y 78% para las simulaciones. Dado que el `snapshot` es una imagen tridimensional, esta comparación se hace solo

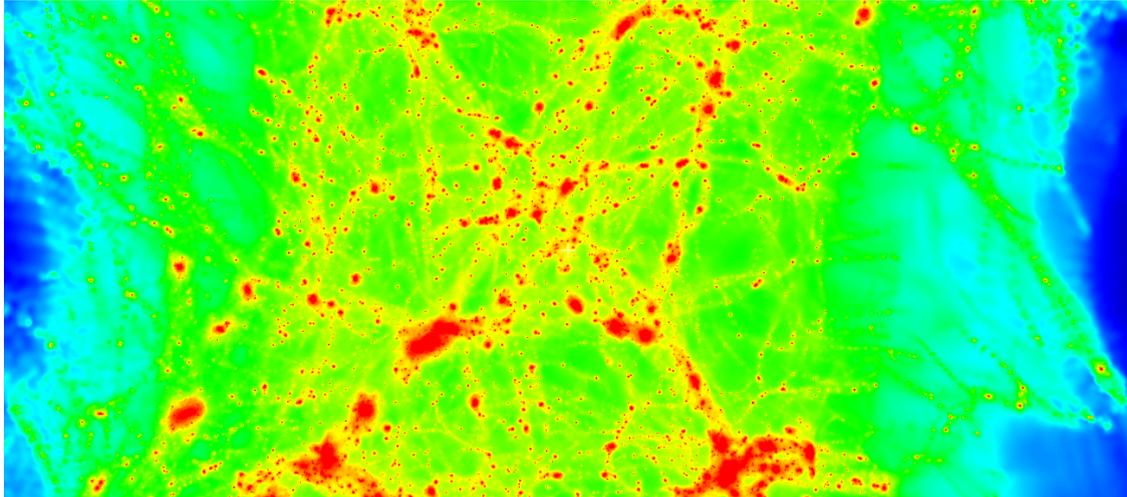
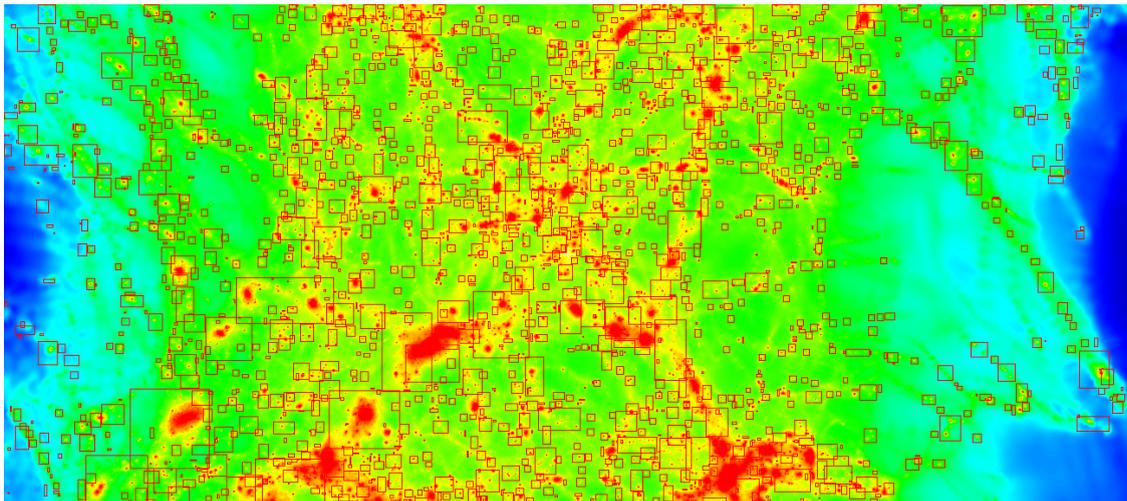
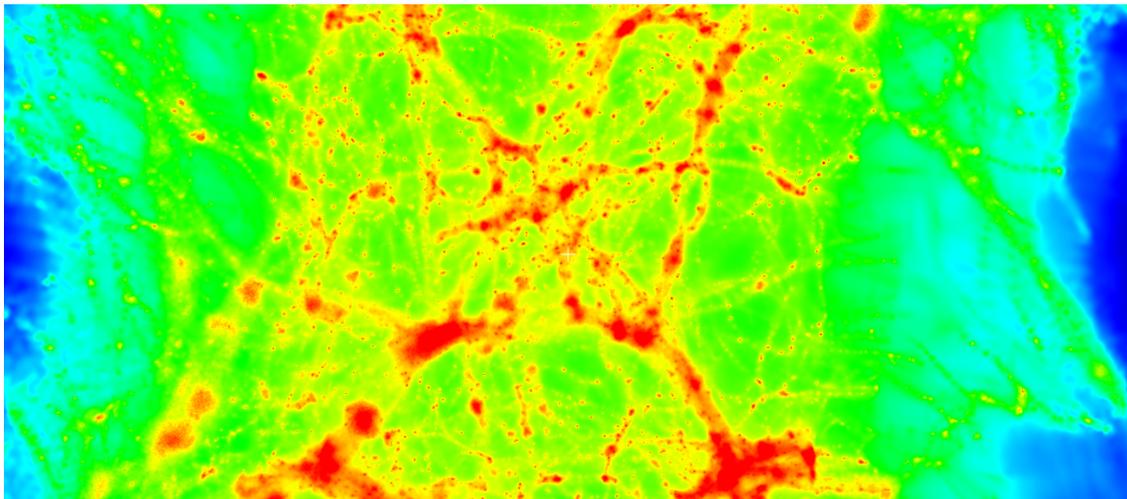
(a)  $\Lambda$ CDM(b) SFN2 ( $m \sim 10^{-22}$  eV)(c) SFN3 ( $m \sim 10^{-23}$  eV)

Figura 4.10: Simulaciones para  $\Lambda$ CDM y SFDM a  $z \sim 0$ . La figura (a) contiene aproximadamente 3900 halos de materia oscura. La figura (b) es una imagen creada a partir del modelo de campo escalar con una masa del orden de  $m \sim 10^{-22}$  eV junto con un algoritmo de identificación de diferencias entre imágenes de igual dimensión, para esta simulación se generaron 2800 halos de materia oscura. La figura(c) es de igual forma una imagen para una simulación de campo escalar con masa de un orden de  $m \sim 10^{-23}$  eV, en ella se aprecia que la estructura generada no tiene un comportamiento similar en grandes halos comparado con  $\Lambda$ CDM, se generaron cerca de 3300 halos de materia oscura en esta simulación.

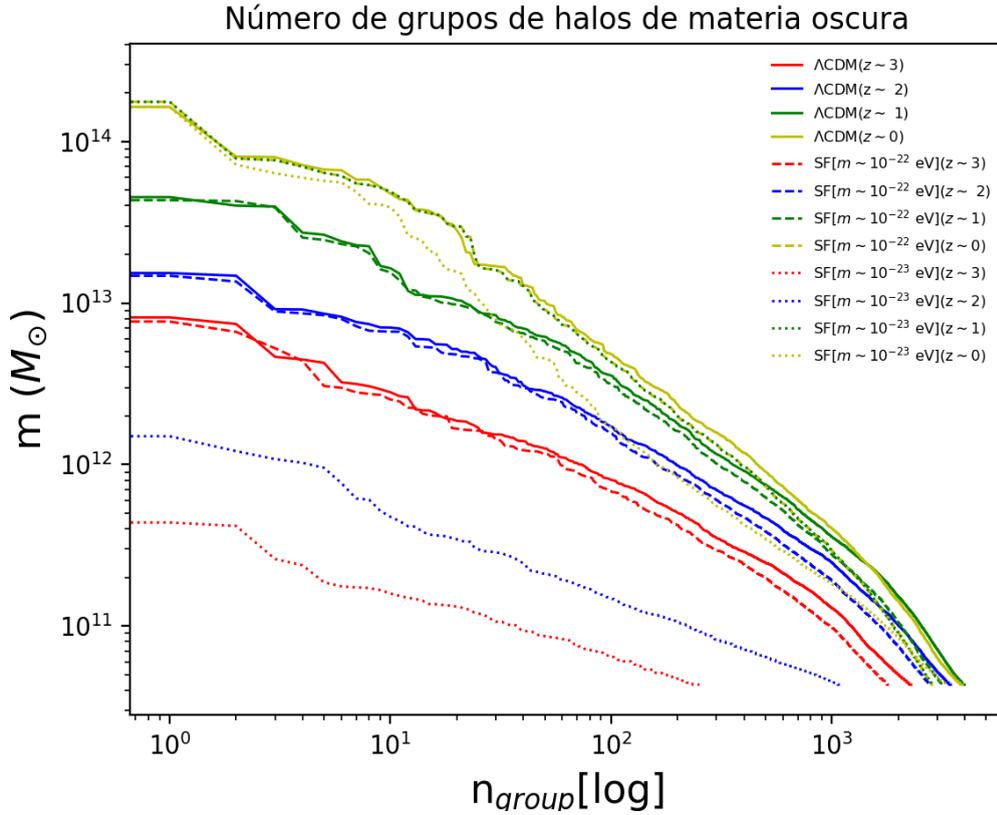


Figura 4.11: Cantidad de halos creadas en las simulaciones para  $\Lambda$ CDM (líneas continuas), SFDM con masa del campo escalar del orden de  $m \sim 10^{-22}$  eV y  $\lambda_C \sim 1.4$  kpc (líneas punteadas) y SFDM con masa del campo escalar del orden de  $m \sim 10^{-23}$  eV y  $\lambda_C \sim 14$  kpc (puntos). La diferencia entre modelos reside en la cantidad de halos contabilizados a diferentes  $z$ , ya que para  $\Lambda$ CDM se crean alrededor de un orden de magnitud mayor que para SFDM.

para una parte de ella y puede mejorarse utilizando procesos paralelos y analizando imágenes de manera más detallada.

Como puede observarse de la figura 4.11 y de los datos de la tabla 4.5 existe una gran diferencia de halos creados en las simulaciones, dependiendo del corrimiento al rojo  $z$  y en el caso de campo escalar, la masa y longitud de onda. En  $z = 0$ , la cantidad de halos detectados difiere entre 600 y 1000, en una simulación de esta escala este resultado es bastante favorable para el modelo SFDM, pues la cantidad de halos creada es mucho menor que en una simulación con las mismas condiciones iniciales realizada con CDM.

Por otra parte, el HMF de materia oscura a  $z = 0$  de la Figura 4.12 para ambos modelos cae dentro de los valores esperados dados por la ecuación (4.11), salvo los subhalos de masas pequeñas ( $\sim 10^{11} M_{\odot}$ ), pues en promedio los halos más masivos contienen mayor cantidad de subhalos que aquellos no tan masivos. Las simulaciones de CDM obedecen esta función universal y además, analizando otros valores de  $z$  se obtiene un comportamiento semejante, corroborando de esta manera la no dependencia del corrimiento al rojo de la función de halos de masa. A pesar de que dicha función está predicha solamente para modelos de  $\Lambda$ CDM, el modelo SFDM también cumple con este comportamiento, probando entonces su similitud con el modelo estándar pero presentando ahora la solución a los satélites faltantes en observaciones y simulaciones.

Tabla 4.5: Resultados del conteo de halos de materia oscura para obtener el HMF de las simulaciones de  $\Lambda$ CDM y SFDM.

	N1( $\Lambda$ CDM)	SFN1(SFDM)	SFN3(SFDM)
<i>z</i> $\sim$ 3:			
snap	N1_004	SFN1_004	SFN3_004
$\lambda_M$	N.A.	1.41 kpc	14.14 kpc
$\epsilon$	0.89 kpc	0.89 kpc	0.89 kpc
Groups	2289	1815	252
Mmax ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	1277.184	1229.110	97.075
Mmin ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	4.335	4.335	4.335
<i>z</i> $\sim$ 2:			
snap	N1_005	SFN1_005	SFN3_005
$\lambda_M$	N.A.	1.41 kpc	14.14 kpc
$\epsilon$	0.89 kpc	0.89 pc	0.89 kpc
Groups	3458	2808	1107
Mmax ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	2367.107	2194.51	371.378
Mmin ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	4.335	4.335	4.335
<i>z</i> $\sim$ 1:			
snap	N1_006	SFN1_006	SFN3_006
$\lambda_M$	N.A.	1.41 kpc	14.14 kpc
$\epsilon$	0.89 kpc	0.89 kpc	0.89 kpc
Groups	3995	3192	2438
Mmax ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	5245.197	4996.162	2532.079
Mmin ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	4.335	4.335	4.335
<i>z</i> $\sim$ 0:			
snap	N1_007	SFN1_007	SFN3_007
$\lambda_M$	N.A.	1.41 kpc	14.14 kpc
$\epsilon$	0.89 kpc	0.89 kpc	0.89 kpc
Groups	3908	2871	3323
Mmax ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	26014.205	25280.607	22566.453
Mmin ( $\times 10^{10} M_\odot$ )	4.335	4.335	4.335

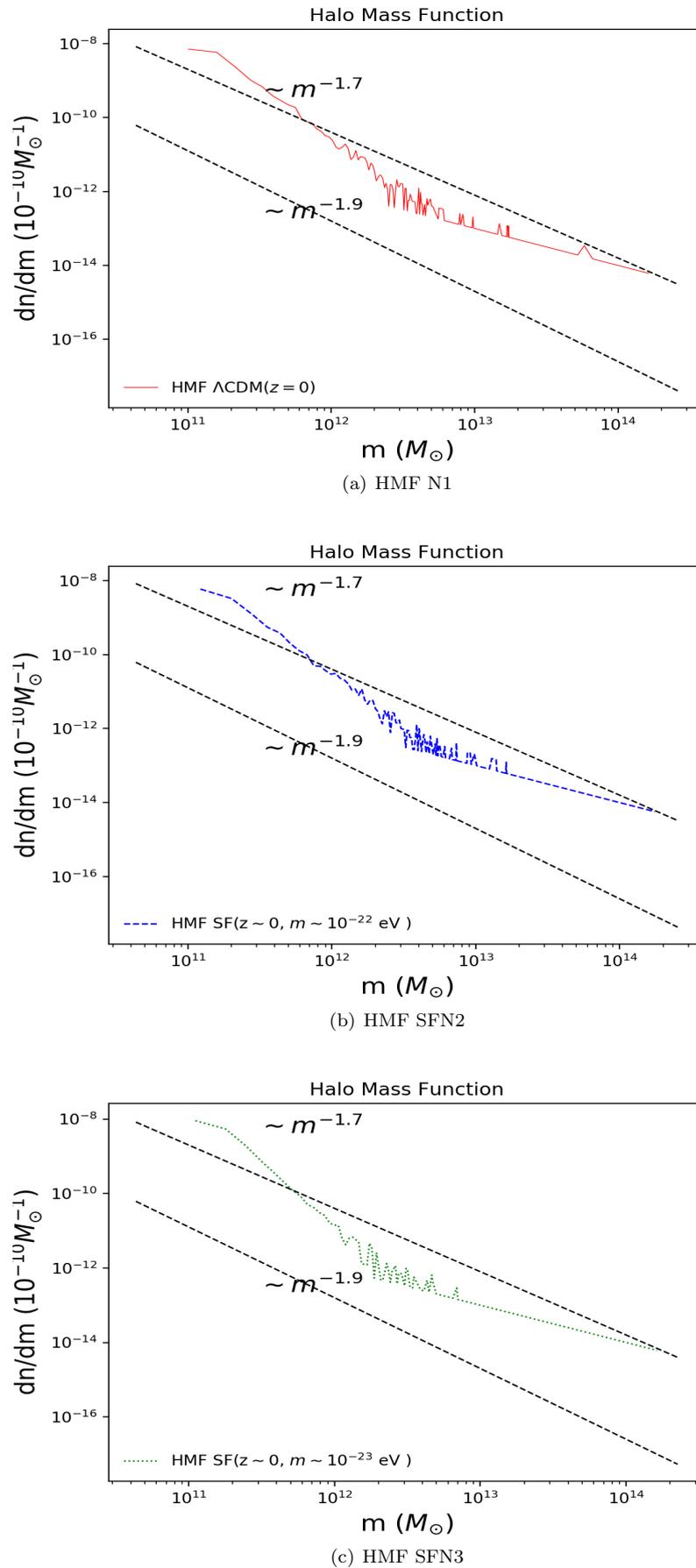


Figura 4.12: Función de masas de halos de materia oscura en  $z = 0$  para los dos modelos de materia oscura. Se indica la cantidad de subhalos de materia oscura en función de los halos más masivos. La figura (a) es la función para el modelo  $\Lambda$ CDM la cual contiene mayor concentración de subhalos en halos con masas entre  $10^{12} - 10^3 M_{\odot}$ . La figura (b) muestra menor cantidad de subhalos en el mismo rango. La figura (c) tiene inclusive menos subhalos de materia oscura que (a) y (b).

## 4.5. Espectro de potencias de masa en las simulaciones de $\Lambda$ CDM y SFDM

Como se ha mencionado desde el capítulo 1, el espectro de potencias de masa de materia oscura permite categorizar los modelos respecto a las mediciones de las fluctuaciones de densidad del CMB obtenidas por las misiones WMAP, COBE o más reciente, Planck. Para eso existen dos métodos de normalización del espectro de potencias de fluctuaciones de densidad. El primero utiliza la amplitud de las anisotropías de la temperatura del CMB. Datos de COBE de fluctuaciones de temperatura constriñen la amplitud del espectro de potencias en grandes escalas, esto es,  $k \sim 0.001 h \text{ Mpc}^{-1}$ . El segundo método es el conteo del número de cúmulos emisores de rayos-X en el Universo local. La abundancia de estos objetos es sensible a la amplitud de las fluctuaciones de densidad en escalas alrededor  $8 h \text{ Mpc}^{-1}$ , que corresponden a una masa de  $10^{15} h^{-1} M_{\odot}$  en un Universo con densidad crítica.

La forma y la amplitud del espectro de potencias de estas fluctuaciones de densidad contiene información acerca de la cantidad y comportamiento de la materia en el Universo. Las mediciones directas del espectro de potencias de masa se obtienen de observaciones y conteos de cúmulos de galaxias.

Uno de los códigos más conocidos para obtener este espectro de potencias de datos observacionales es *CAMB* (Code for Anisotropies in the Microwave Background) [96]. En este trabajo se modificó dicho código para obtener un espectro de potencias con los datos de la tabla 4.1, así como la implementación del código *POWMES* [114], el cual efectúa las transformaciones de Fourier en archivos de simulaciones de  $N$ -cuerpos. Utilizando estas herramientas, es posible obtener un espectro de potencias de datos observacionales proveniente de *CAMB* y compararlo con la reconstrucción del espectro para simulaciones de  $N$ -cuerpos en  $z = 0$ .

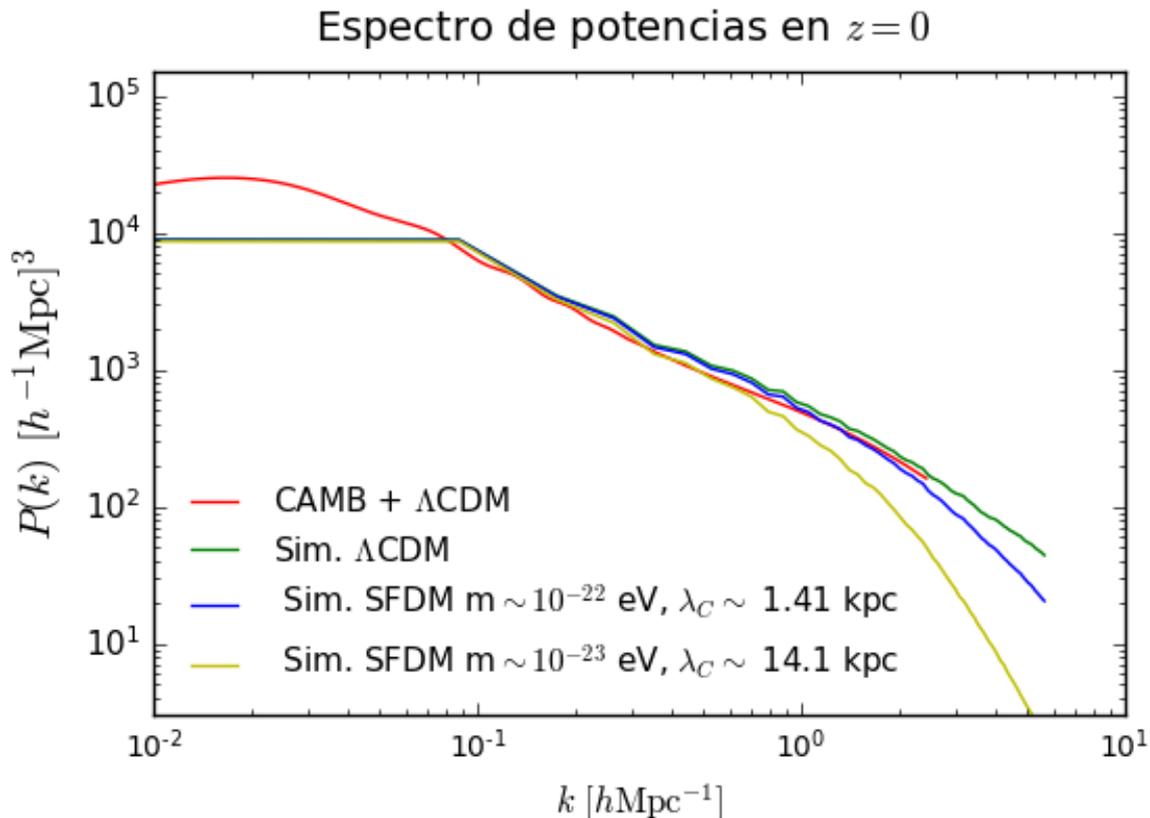


Figura 4.13: Espectro de potencias creado en  $z = 0$ . Las curvas representan la distribución de materia oscura en la época actual. La curva roja es una representación de las mediciones de las fluctuaciones del CMB obtenidas por la misión WMAP3 y acotadas por el modelo de  $\Lambda$ CDM, utilizando *CAMB*, la curva verde es resultado de la simulación de  $\Lambda$ CDM utilizando el código *GADGET-2*, la curva azul es para el modelo de campo escalar con una masa del orden  $m \sim 10^{-22} \text{ eV}$ , cuya longitud de onda de Compton es de  $\lambda_C \sim 1.41 \text{ kpc}$ , la curva amarilla representa el modelo de campo escalar con masa del orden de  $m \sim 10^{-23} \text{ eV}$  y con longitud de onda de Compton de  $\lambda_C \sim 14.1 \text{ kpc}$ . Las últimas dos son resultados del código *Axion-Gadget*.

El espectro de potencias obtenido de las simulaciones se muestra en la figura 4.13, donde se ha separado un régimen lineal y un régimen no lineal de la evolución de las fluctuaciones de densidad de materia en el Universo. La línea roja es el espectro producido por CAMB de datos observacionales.

El régimen lineal proviene de  $k$  muy pequeños, es decir de grandes escalas del Universo y de épocas tempranas ( $z \sim 1100$ ), cuando la materia y la radiación estaban acopladas e inicia un proceso de enfriamiento que desacople a la materia bariónica de la radiación. En esa época las fluctuaciones en la densidad son lineales; al entrar en el régimen no lineal, la materia no colisional, es decir la materia oscura se empieza a acumular en halos que atraen gravitacionalmente a la materia bariónica para formar las galaxias en el Universo, proceso que sólo puede reproducirse con simulaciones de  $N$ -cuerpos.

Observe que el régimen lineal de las simulaciones es una línea recta exacta, este comportamiento es debido a dos razones principales:

1. **Resolución:** Las simulaciones hechas en este trabajo tienen resolución baja, no sobrepasan las 10 millones de partículas, además de que las cajas simuladas son regiones pequeñas del Universo.
2. **Tipo de simulación:** Sólo se han simulado modelos de materia oscura, la cual inicia su evolución hasta la etapa de desacoplamiento de materia bariónica y radiación.

En el régimen no lineal se observa que los datos de CAMB y de las simulaciones concuerdan muy bien, incluso las simulaciones tienen un espectro inicial igual entre ellas que naturalmente se desacopla al avanzar temporalmente. La diferencia entre  $\Lambda$ CDM y SFDM es que los halos de materia oscura empiezan a formarse en distintas épocas, ya que para el modelo de materia oscura escalar, los halos de materia oscura se empezaron a formar justo después de la última dispersión del CMB, es decir, desde la primer imagen que se tiene del universo debido a esta radiación, a diferencia del modelo estándar, pues los halos de materia oscura fueron colapsados mucho tiempo después de esa época. Es decir que una masa de  $M_\chi \sim 10^{-23}$  eV y longitud de onda  $\lambda_M \sim 14$  kpc crea halos de materia oscura en etapas mucho más tempranas que el modelo estándar cosmológico. Estos resultados permiten entonces constreñir las condiciones iniciales para campo escalar, por ejemplo, al hacer una simulación con una masa de  $M_\chi \sim 10^{-21}$  eV o  $M_\chi \sim 10^{-20}$  eV, Axion-Gadget no puede seguir calculando después de un  $z = 8$ , el código tarda demasiado y no avanza temporalmente. Así que los resultados para las masas y longitudes de onda del campo escalar estudiadas en este trabajo son una cota que se tomará en cuenta para futuros trabajos.

Los resultados obtenidos para estas simulaciones de mediana resolución han corroborado los problemas que  $\Lambda$ CDM ha tenido desde su concepción, la cantidad de halos satélites que eventualmente formarían galaxias satélites en el Universo es mucho mayor comparada con las simulaciones del modelo de campo escalar con masa de  $m \sim 10^{-22}$  eV, así como en la simulación de  $m \sim 10^{-23}$  eV (Figura 4.13). Por otro lado, el problema del CUSP-CORE que predice el perfil de densidades de los halos de materia oscura de las galaxias no pudo ser abordado en este trabajo debido a la resolución de las simulaciones, aunque visualmente se observa una ligera diferencia entre la densidad de materia oscura presente en los halos galácticos, un estudio futuro implementando mayor resolución podrá generar mayores detalles sobre este tema específico.

Finalmente vale la pena mencionar que la implementación de este código fue en una etapa preliminar, se efectuaron pocas modificaciones a Axion-Gadget, un estudio detallado sobre la modificación deberá llevarse a cabo con el objetivo de tener resultados comparables con observaciones y utilizando no sólo el modelo de materia oscura escalar, si no otro tipo de materia oscura, modificando correctamente los parámetros y valores utilizados en la modificación.

# Conclusiones

El objetivo fundamental de esta tesis era comparar dos modelos de materia oscura utilizando simulaciones numéricas con tal de obtener un mejor entendimiento del comportamiento de la materia oscura presente en el Universo. Durante más de un siglo, la cosmología se ha consolidado como una de las ramas de la ciencia con mayores retos y enigmas por descifrar. Su desarrollo ha sido tanto de forma teórica como observacional y existen diversas áreas dentro de la cosmología que tienen un futuro prometedor.

La aportación principal de este trabajo consiste en describir dos modelos de evolución cosmológica para poder compararlos de forma numérica, utilizando el recurso computacional como apoyo principal y haciendo simulaciones de  $N$ -cuerpos, para después realizar un análisis de datos que permita entender la naturaleza de la materia oscura.

En este trabajo se pone a prueba la validez del modelo estándar cosmológico desde un punto de vista computacional utilizando simulaciones numéricas, y efectivamente el modelo estándar cosmológico sigue teniendo validez y aceptación dentro de la comunidad científica pues su parametrización concuerda en gran forma con datos observacionales en el Universo. No es la teoría definitiva, algunas predicciones hechas por este modelo no tienen solución alguna, aunque existen vías alternativas para tratar de mejorar esas predicciones o darle solución a problemas observacionales.

La existencia de otras teorías de materia oscura permiten modelar su comportamiento en el Universo en grandes escalas, y su presencia en todas o la mayoría de las galaxias. Estas proposiciones son importantes ya que modifican el comportamiento de la dinámica de la materia oscura y buscan darle solución a las inconsistencias que se presente en el modelo  $\Lambda$ CDM.

El modelo de materia oscura como campo escalar (SFDM) es una buena alternativa para darle solución a esos problemas, en específico dos de ellos, el problema del CUSP-CORE y el problema de satélites faltantes, ambos se tratan al introducir perturbaciones al campo escalar y realizando un tratamiento hidrodinámico para las funciones de onda de los condensados de Bose-Einstein que forman los halos galácticos, con esta aproximación se obtienen ecuaciones hidrodinámicas con un término cuántico, o “presión” cuántica, la cual es la responsable de que la interacción entre partículas de materia oscura de campo escalar tengan una interacción atractiva o repulsiva, dependiente de la longitud de onda de Compton de las partículas del campo escalar.

Puesto que solo se pueden obtener datos de observaciones al Universo en la época actual, las simulaciones numéricas permiten recrear y experimentar con esos datos la dinámica del Universo como se ha comprendido hasta ahora, existe una gran cantidad de códigos numéricos que tienen la base teórica de  $N$ -cuerpos para materia oscura y SPH para gas y fluidos en simulaciones a gran escala ( $\geq 50$  Mpc).

Los códigos utilizados son desarrollados en su mayoría utilizando la teoría de  $\Lambda$ CDM, la capacidad de modificar la dinámica de la materia oscura dentro del código es un gran reto que requiere de un esfuerzo conjunto y años de estudio. En este trabajo se utilizó una modificación hecha para el modelo alternativo SFDM. Durante las simulaciones hechas con estos códigos surgieron varias dudas acerca del uso y del funcionamiento del código para campo escalar, dado que los resultados en escalas pequeñas ( $\leq 50$  Mpc) no son favorables para el modelo, aunque existan publicaciones que respaldan SFDM en estas escalas, es necesario revisar a fondo dicho código o en su caso, desarrollar una modificación propia que obtenga resultados esperados para esas escalas.

Los resultados obtenidos para grandes escalas corroboran las predicciones del modelo SFDM, el problema de satélites faltantes en  $\Lambda$ CDM se resuelve en las simulaciones de campo escalar, dado que la interacción cuántica entre las partículas de materia oscura puede ser atractiva o repulsiva dependiendo de su longitud de onda de Compton, la elección de la masa y longitud de onda del campo escalar influye mucho en estos resultados, esto se debe a que el espectro de potencias de masa tiene distinto comportamiento dependiendo

del modelo simulado.

Sin embargo en escalas pequeñas (menores a 10 Mpc), se observa que el código modificado no obtiene un resultado esperado para SFDM, este error puede deberse a que el algoritmo dentro del código que se encarga de calcular la interacción de rango corto aún no está modificado para el campo escalar, se requiere entonces un análisis de esta parte del código para cambiar el algoritmo de interacción en rango corto a manera de obtener resultados mejor detallados.

De igual forma, las simulaciones numéricas permiten obtener constricciones sobre las condiciones iniciales y los valores de masa, cuyos valores deben ser aproximadamente  $10^{-23}\text{eV} \leq M_\chi \leq 10^{-21}\text{eV}$  y la longitud de onda de Compton, con valores aproximados de  $0.1 \text{ kpc} \leq \lambda_M \leq 10 \text{ kpc}$ . Con estos valores es posible obtener resultados comparables con datos observacionales a gran escala. El problema del CUSP-CORE se minimiza por la interacción cuántica, aunque sólo se ha corroborado este resultado de forma visual; analizar los perfiles de densidad de halos de materia oscura será un trabajo futuro.

La resolución de las simulaciones también mejorará utilizando el clúster computacional ABACUS del CINVESTAV, donde ya se han realizado pruebas con  $256^3$  partículas, aproximadamente 16 millones. Se espera usar los datos más actualizados publicados por la misión Planck 2018 [115] con el fin de obtener simulaciones con mayor precisión.

La materia oscura es un componente abundante en el Universo, su naturaleza es desconocida y podría pasar mucho tiempo antes de determinar su composición, es por esta razón que las simulaciones numéricas son una herramienta clave para confirmar o descartar teorías de evolución cosmológica, de igual forma, el análisis de datos en simulaciones y otras áreas científicas está en una etapa inicial, el conocer diversos métodos de análisis numérico y de datos colocará a la cosmología numérica como una de las ramas de la ciencia con mayor producción de resultados en los próximos años.

## Apéndice A

# Principio de mínima acción

El principio de mínima acción o principio de Hamilton establece que, para sistemas en mecánica clásica, su evolución temporal es tal que la acción tiende a ser una cantidad mínima. La acción tiene unidades de energía por tiempo y se define como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (\text{A.1})$$

donde  $L$  es el Lagrangiano del sistema. Para un sistema clásico cualquiera, se puede encontrar su trayectoria minimizando su acción

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\delta$  es una variación en la acción. Es así que se puede asegurar que, de las diferentes trayectorias que pudiese tener una partícula de un sistema desde un punto inicial a un punto final, la trayectoria real será la que minimice la acción, aunque la distancia de esa trayectoria no es necesariamente la más corta entre dos puntos del espacio.

### Densidad Lagrangiana

En este formalismo, el Lagrangiano será una función que tome funciones como argumento, es decir un funcional. El objetivo es obtener el comportamiento dinámico de un campo para después encontrar sus ecuaciones de movimiento utilizando el principio de mínima acción. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para teoría de campos provienen de requerir que la acción permanezca invariante ante pequeñas variaciones en el campo. Dada una función  $\phi$ , entonces

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu(\delta\phi). \quad (\text{A.4})$$

Así, el Lagrangiano tiene la siguiente forma

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \rightarrow \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu(\delta\phi)), \quad (\text{A.5})$$

entonces

$$\delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi). \quad (\text{A.6})$$

Aplicando el principio de mínima acción se tiene que

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right]. \quad (\text{A.7})$$

Al realizar la integración por partes en el segundo término, se encuentra

$$\int d^4x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) - \int d^4x \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi, \quad (\text{A.8})$$

Este resultado se simplifica mediante el teorema de Stokes en el primer término. Si  $V^\mu$  es un vector del campo sobre una región  $\Sigma$  con frontera  $\partial\Sigma$ , el teorema de Stokes establece que

$$\int_{\Sigma} \nabla_{\mu} V^{\mu} d^n x = \int_{\partial\Sigma} n_{\mu} V^{\mu} d^{n-1} x, \quad (\text{A.9})$$

donde  $n_{\mu}$  es un vector normal a la superficie  $\Sigma$ . Sustituyendo en la ecuación (A.8) se obtiene

$$\int_{\Sigma} d^4 x \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi \right) = \int_{\partial\Sigma} d^3 x n_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi. \quad (\text{A.10})$$

La variación es nula en la frontera, entonces

$$\int_{\partial\Sigma} d^3 x n_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \delta \phi = 0, \quad (\text{A.11})$$

entonces, la ecuación (A.7) se reduce a

$$\int d^4 x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0. \quad (\text{A.12})$$

Para satisfacer la igualdad, el argumento de la integral debe ser cero, es decir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \phi)} \right) = 0, \quad (\text{A.13})$$

las cuales son las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos.

## Apéndice B

# Instalación de GADGET-2

GADGET-2 es un código fuente de dominio libre, de manera que cualquier persona pueda hacer simulaciones con él. Las instrucciones para compilar y correr el código dependen en gran manera de la plataforma que se utilice; si el usuario tiene Linux o UNIX, las herramientas necesarias para compilarlo están completas. En MacOS, se necesita una actualización de Xcode, el cual incluye todos los compiladores necesarios para instalar el código. En Windows, es probable que tenga que obtenerse cygwin, el cual proporciona soporte completo de UNIX en sistemas de este tipo.

Primero, se necesita descargar el siguiente software:

1. [Gadget-2.0.7](#).
2. Versión 1.9 o superior de [GNU scientific library \(GSL\)](#).
3. Versión 2.1.5 de [FFTW fast Fourier Transform in the West](#).
4. Una librería de procesamiento en paralelo, como Message Passing Interface (MPI) o como Open-MPI o MPICH.

Open-MPI viene incluido en MacOS, por lo que usuarios con ese sistema operativo no requieren descargarlo. No descargar una versión 3.x de FFTW, ya que no incluye soporte para procesamiento en paralelo.

Una vez que se tiene todo el software descargado, se requiere extraer el .tar.gz e instalar. Todo el proceso se hace en una terminal para un sistema operativo Linux, la instalación prosigue de la siguiente manera:

1. Extraer el software:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf fftw-2.1.5.tar.gz
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf gsl-1.9.tar.gz
jazhiel@PC~/Documents/code: tar -xvzf gadget-2.0.7.tar.gz
```

2. Instalar GSL:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: cd gsl-1.9/
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: ./configure
snip: muchos outputs de diagnóstico
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: make
jazhiel@PC~/Documents/code/gsl-1.9: sudo make install
```

Esta es una instalación en una carpeta root. Si no se tienen privilegios de administrador es probable que se necesite instalar en una carpeta aparte, esto se hace con el comando

```
--prefix=/path/to/folder/
```

donde path es la dirección del directorio donde se instalará el software.

## 3. Instalar FFTW:

```
jazhiel@PC~/Documents/code: cd fftw-2.1.5/
```

```
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: ./configure - -enable-mpi - -enable-type-prefix - -enable-float
```

```
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: make
```

Este es un buen momento para ir por un café.

```
jazhiel@PC~/Documents/code/fftw-2.1.5: sudo make install
```

## 4. Editar el Makefile de Gadget:

GADGET tiene una increíble cantidad de parámetros para compilar, los cuales se describen de manera extensa en la guía de usuario. Hay muchos cambios que se deben hacer al `makefile` de Gadget para que compile correctamente. En el directorio donde se extrajo Gadget, luego al directorio de `Gadget-2` dentro de ese directorio. Abrir el `makefile` en un editor de textos (e.g. `vim`, `emacs`, `textedit`, `notepad`), editar los parámetros de compilación para que la parte inicial del `makefile` luzca así:

```
#----- Basic operation mode of code
#OPT += -DPERIODIC
OPT += -DUNEQUALSOFTENINGS

#-----Things that are always recommended
OPT += -DPEANOHILBERT
OPT += -DWALLCLOCK

#-----TreePM Options
#OPT += -DPMGRID=128
#OPT += -DPLACEHIGHRESREGION=3
#OPT += -DENLARGEREGION=1.2
#OPT += -DASMTH=1.25
#OPT += -DRCUT=4.5

#-----Single/Double Precision
#OPT += -DDOUBLEPRECISION
#OPT += -DDOUBLEPRECISION_FFTW

#-----Time integration options
OPT += -DSYNCHRONIZATION
#OPT += -DFLEXSTEPS
#OPT += -DPSEUDOSYMMETRIC
#OPT += -DNOSTOP_WHEN_BELOW_MINTIMESTEP
#OPT += -DNOPMSTEPADJUSTMENT

#-----Output
#OPT += -DHAVE_HDF5
#OPT += -DOUTPUTPOTENTIAL
#OPT += -DOUTPUTACCELERATION
#OPT += -DOUTPUTCHANGEOFENTROPY
#OPT += -DOUTPUTTIMESTEP

#-----Things for special behaviour
#OPT += -DNOGRAVITY
#OPT += -DNOTREERND
#OPT += -DNOTYPEPREFIX_FFTW
#OPT += -DLONG_X=60
#OPT += -DLONG_Y=5
```

```

#OPT += -DLONG_Z=0.2
#OPT += -DTWODIMS
#OPT += -DSPH_BND_PARTICLES
#OPT += -DNOVISCOSITYLIMITER
#OPT += -DCOMPUTE_POTENTIAL_ENERGY
#OPT += -DLONGIDS
#OPT += -DISOTHERM_EQS
#OPT += -DADAPTIVE_GRAVSOFT_FORGAS
#OPT += -DSELECTIVE_NO_GRAVITY=2+4+8+16

#-----Testing and Debugging options
#OPT += -DFORCETEST=0.1

#----- Glass making
#OPT += -DMAKEGLASS=262144

```

El cambio más importante es comentar la opción de HAVE\_HDF5 para evitar errores de compilación. Luego, se debe editar nuevamente el makefile para indicar dónde se han instalado las librerías GSL y FFTW, mi makefile luce así:

```

#-----
# Here, select compile environment for the target machine.
#This may need adjustment, depending on your local system.
#Follow the examples to add additional target platforms,
#and to get things properly compiled.
#-----

#----- Select some defaults

CC = mpicc # sets the C-compiler
OPTIMIZE = -O2 -Wall -g # sets optimization and warning
                    #flags

MPICHLIB = -lmpich

#-----Select target computer

SYSTYPE="MPA"

#-----Adjust settings for target computer

ifeq ($(SYSTYPE),"MPA")
CC      = mpicc
OPTIMIZE = -O3 -Wall
GSL_INCL = -I/usr/local/include
GSL_LIBS = -L/usr/local/lib -Wl,"-R /usr/common/pdsoft/
\lib"
FFTW_INCL= -I/usr/local/include
FFTW_LIBS= -L/usr/local/lib
MPICHLIB = -L/usr/lib
#HDF5INCL =
#HDF5LIB  = -lhdf5 -lz
endif

```

Puede definirse un SYSTYPE propio para indicar a GADGET las direcciones donde se ha instalado las librerías de GSL y FFTW. Por default, están en /usr/local/. Es importante guardar los cambios que se

han hecho y leer el manual del usuario de GADGET, ya que dependiendo de lo que se quiera simular, el `makefile` tiene que editarse; la configuración anterior es para simular la colisión de dos galaxias.

Para correr esta colisión, se recomienda crear un folder de trabajo con los ejecutables y archivos de parámetros:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: mkdir galaxy
```

Copiar el ejecutable `Gadget2` en el folder `galaxy`:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cp Gadget2/Gadget2 galaxy/
```

Copiar los archivos de parámetros en el folder `galaxy`:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cp Gadget2/parameterfiles/ galaxy.param galaxy/
```

Entrar en el folder `galaxy`:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7: cd galaxy
```

Editar el archivo `galaxy.param` para que las dos primeras líneas luzcan de la siguiente manera:

```
% Relevant files
```

```
InitCondFile /path/to/Gadget-2.0.7/ICs/galaxy_littleendian
```

```
\.dat
```

```
OutputDir /path/to/Gadget-2.0.7/galaxy/
```

Debe cambiarse la dirección al folder de condiciones iniciales del código y el directorio de `output` en donde se ha creado el folder `galaxy`. Ahora se tiene todo para correr la primera simulación con el siguiente comando:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7/galaxy: mpirun -np 2 ./Gadget2 galaxy.param
```

Este comando llama un programa de MPI para procesamiento en paralelo, en este caso `Gadget`. El parámetro `-np 2` indica cuántos procesadores se utilizarán para la ejecución de `Gadget`, es decir, 2. Si se cuenta con más de dos procesadores puede cambiarse `-np 2` al número de procesadores disponibles. Si no se cuenta con procesamiento en paralelo, invocar el comando:

```
jazhiel@PC~/Documents/code/Gadget-2.0.7/galaxy: ./Gadget2
galaxy.param
```

será suficiente, aunque más tardado. Se recomienda incrementar el número de archivos de salida para crear una animación de la colisión de las galaxias.

## Apéndice C

# Diferencia de imágenes

Resulta de gran utilidad realizar una comparación de las imágenes creadas en los archivos de salida, para este fin se elaboró un pequeño script en Python, el cual realiza una diferenciación entre dos imágenes que a simple vista parecen similares. Este script utiliza paquetes y librerías propias de Python necesarias para el procesamiento de imágenes, siendo la paquetería *SSIM* la base del script.

Lo que realiza *SSIM* es un Índice de Similitud de Estructura [116] que tiene la siguiente forma

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)}. \quad (C.1)$$

*SSIM* trata de modelar el cambio percibido en la información estructural de la imagen. La ecuación (C.1) se utiliza para comparar dos *ventanas* o porciones de la imagen en lugar de la imagen completa. Esto conlleva a una aproximación más exacta que puede contar los cambios en la estructura de la imagen.

Los parámetros de la ecuación (C.1) incluyen las posiciones  $(x, y)$  de la ventana de lado  $N \times N$  de cada imagen, el promedio de la intensidad de píxeles en la dirección  $x$  y  $y$  y la varianza de las intensidades igualmente en dirección  $x$  e  $y$ , así como la covarianza. Esto permite valores de  $SSIM \in [-1, 1]$ , siendo el valor de 1 una perfecta similitud.

El script convierte ambas imágenes en un arreglo de 8-bits para después procesar los píxeles de cada imagen y crea regiones, en este caso de color rojo, donde identifica diferencias entre el promedio y la varianza de píxeles. A pesar de tener una buena resolución dada la cantidad de partículas, procesar las imágenes de esta forma es engañoso, dado que los archivos de salida de las simulaciones crean imágenes en un ambiente tridimensional.

Este script está escrito en Python y puede ejecutarse para realizar una comparación entre dos imágenes similares:

```
# importar paquetes necesarios
from skimage.measure import compare_ssim
import argparse
import imutils
import cv2

# construir argument parse and analizar los argumentos
ap = argparse.ArgumentParser()
ap.add_argument("-f", "--first", required=True,
help="first input image")
ap.add_argument("-s", "--second", required=True,
help="second")
args = vars(ap.parse_args())
```

- *first* y - *second* serán los argumentos para las direcciones de las imágenes que se quieren comparar. Luego se carga cada imagen y se convierte a una escala de grises

```
# cargar imagenes de input
```

```

imageA = cv2.imread(args["first"])
imageB = cv2.imread(args["second"])

# convertir a escala de grises
grayA = cv2.cvtColor(imageA, cv2.COLOR_BGR2GRAY)
grayB = cv2.cvtColor(imageB, cv2.COLOR_BGR2GRAY)

    Se calcula el Índice de Similitud de Estructura (SSIM)

# Calcular Structural Similarity Index (SSIM) entre
# imagenes, asegura que la imagen de diferencia sea un
#output
(score, diff) = compare_ssim(grayA, grayB, full=True)
diff = (diff * 255).astype("uint8")
print("SSIM: {}".format(score))

```

Utilizando la función `compare` se calcula un `score` y una imagen de diferencia `diff`. `score` representa el índice de similitud de estructura entre imágenes y puede arrojar el valor entre  $[-1, 1]$ , siendo 1 una “similitud perfecta”.

La imagen `diff` contiene las *diferencias* reales entre las imágenes que se desea visualizar. Esta imagen está representada como un arreglo de datos tipo `float` en el rango  $[0, 1]$ , el arreglo se convierte a 8-bits, todos enteros en el rango  $[0, 255]$ .

Se buscan los contornos para que pueda colocarse rectángulos alrededor de las regiones identificadas como “diferentes”

```

# limitar(threshold) la imagen diferencia,
#luego encontrar contornos para
# obtener regiones de las imagenes que difieran
thresh = cv2.threshold(diff, 0, 255,
cv2.THRESH_BINARY_INV | cv2.THRESH_OTSU)[1]
cnts = cv2.findContours(thresh.copy(), cv2.RETR_EXTERNAL,
cv2.CHAIN_APPROX_SIMPLE)
cnts = cnts[0] if imutils.is_cv2() else cnts[1]

```

Ya que se tienen los contornos almacenados en una lista, se dibujan rectángulos alrededor de las diferentes regiones en cada imagen

```

# loop alrededor de contornos
for c in cnts:
# calcular la bounding box del contorno y dibujar
# bounding box en ambas imagenes para representar donde
# difieren las dos imagenes
(x, y, w, h) = cv2.boundingRect(c)
cv2.rectangle(imageA, (x, y), (x + w, y + h), (0, 0, 255), 2)
cv2.rectangle(imageB, (x, y), (x + w, y + h), (0, 0, 255), 2)

# mostrar output de imagenes
cv2.imshow("Original", imageA)
cv2.imshow("Modified", imageB)
cv2.imshow("Diff", diff)
cv2.imshow("Thresh", thresh)
cv2.waitKey(0)

```

Pueden guardarse las imágenes en la carpeta que se desee

```

cv2.imwrite('path/to/folder/Original.png', imageA)
cv2.imwrite('path/to/folder/Modified.png', imageB)
cv2.imwrite('path/to/folder/Diff.png', diff)
cv2.imwrite('path/to/folder/Thresh.png', thresh)

```

finalmente, para ejecutar el script

```
python image_diff.py --first /path/to/first/image1.png  
--second /path/to/second/image2.png
```

# Bibliografía

- [1] RYDEN, B. S. (2003), *Introduction To Cosmology*, San Francisco: Addison-Wesley
- [2] BATTANER, E. (2015), *Grandes estructuras del universo: El cosmos a gran escala*, RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales, S.A.U.
- [3] HUBBLE, E. (1929) *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 15, Issue 3, pp. 168-173
- [4] EDDINGTON, A. (1933), *The Expanding Universe: Astronomy's 'Great Debate'. 1900-1931*, Press Syndicate of the University of Cambridge
- [5] LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H.; (2000), *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press
- [6] SCHUTZ, B. (2009), The Einstein field equations. In *A first Course in General Relativity*, pp. 184-202, Cambridge: Cambridge University Press
- [7] GRØN, O. HERVIK, S. (2004), Dynamics of Homogeneous and Isotropic cosmologies. In *Einstein's General Theory of Relativity*, University of Oslo, pp. 265-267
- [8] SCHUTZ, B. (2009), Perfect fluids in special relativity. In *A first Course in General Relativity*, pp. 84-110, Cambridge: Cambridge University Press
- [9] ZWICKY, F. (1937), *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, Astrophysical Journal, vol. 86, p.217
- [10] RUBIN, V. C.; FORD, W. K. (1970), *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*, Astrophysical Journal, vol. 159, p.379
- [11] PENZIAS, A. A.; WILSON, R., W. (1965) *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s* Astrophysical Journal, vol. 142, p.419-421
- [12] SPERGEL, D.N. ET AL. (2007), *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Observations: Implications for Cosmology*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0603449v2
- [13] MANDOLESI, N.; BURIGANA, C.; GRUPPUSO, A.; NATOLI, P. (2013), *The Planck Mission: Recent Results, Cosmological and Fundamental Physics Perspectives*, International Journal of Modern Physics D, vol. 22, Issue 14, id. 1330029
- [14] SPERGEL, D. N.; BOLTE, M.; FREEDMAN, W. (1997), *The age of the universe*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 94 pp. 6579-6584
- [15] SARKAR, S. (1996), *Big Bang nucleosynthesis and physics beyond the Standard Model*, ArXiv preprint, arXiv:hep-ph/9602260v2
- [16] BURLLES, S.; NOLLET, K. M.; TURNER, M. S. (2000), *What Is The BBN Prediction for the Baryon Density and How Reliable Is It?*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0008495v4

- [17] OLIVE, K. A.; STELGMAN G.; WALKER, T. P.; (1999), *Primordial Nucleosynthesis: Theory and Observations*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/9905320v1
- [18] BLANTON, M. R. ET AL. (2017), *Sloan Digital Sky Survey IV: Mapping the Milky Way, Nearby Galaxies, and the Distant Universe*, The Astronomical Journal, vol. 154, Issue 1, pp. 35 (2017)
- [19] SASAKI, M. (1986), *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, Progress of Theoretical Physics, vol. 76, Issue 5, pp. 1036–1046
- [20] GUTH, A. H. (1981), *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Physical Review D (Particles and Fields), vol. 23, Issue 2, 15 January 1981, pp.347-356
- [21] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. (2002), *The Cosmological Constant and Dark Energy*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0207347v2
- [22] CLOWE, D.; ET AL. (2006), *A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter*, The Astrophysical Journal, vol. 648, Issue 2, pp L109-L113
- [23] SPERGEL, D. N.; STEINHARDT P. J. (2000), *Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter*, Physical Review Letters, vol. 84, Issue 3760
- [24] COLÍN, P.; AVILA-REESE, V.; VALENZUELA, O. (2000), *Substructure and halo density profiles in a Warm Dark Matter Cosmology*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0004115
- [25] GOODMAN, J. (2000), *Repulsive Dark Matter*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0003018
- [26] HU, W.; BARKANA, R.; GRUZINOV, A. (2000), *Cold and Fuzzy Dark Matter* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0003365
- [27] KAPLINGHAT, M.; KNOX, L. TURNER, M. S. (2000), *Annihilating Cold Dark Matter* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0005210
- [28] CEN, R. (2000), *Decaying Cold Dark Matter Model and Small-Scale Power*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0005206
- [29] ELLIS, J. (2007), *BEYOND THE STANDARD MODEL WITH THE LHC*, Nature, vol. 448, Issue 7151, pp. 297-301
- [30] MILGROM, M. (2002), *MOND—theoretical aspects* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0207231
- [31] PEEBLES, P. J. E. (1993), *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-01933-8, pp. 457-535
- [32] PEACOCK, J. A.; DODDS, S. J. (1994), *Reconstructing the Linear Power Spectrum of Cosmological Mass Fluctuations*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 267, NO. 4/APR15, P.1020
- [33] DODELSON, S.; GATES, E. I.; TURNER, M. S. (1996), *Cold Dark Matter*, Science, vol. 274, Issue 5284, pp. 69-75
- [34] LÓPEZ-CORREIDORA, M. (2017), *Tests and problems of the standard model in Cosmology*, ArXiv preprint arXiv:1701.0872
- [35] NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. (1996), *The Structure of Cold Dark Matter Halos*, Astrophysical Journal vol. 462, p.563
- [36] NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M., *A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering*, The Astrophysical Journal, vol. 2, no. 2
- [37] WALKER, M. G.; PEÑARRUBIA J. (2011), *A Method for Measuring (Slopes of) the Mass Profiles of Dwarf Spheroidal Galaxies*, The Astrophysical Journal, vol. 742, Issue 1, pp. 19

- [38] OH, S-H.; BROOK, C.; GOVERNATO, F.; BRINKS, E.; MAYER, L.; DE BLOK, W. J. G.; BROOKS, A.; WALTER, F. (2011), *The central slope of dark matter cores in dwarf galaxies: Simulations vs. THINGS*, The Astronomical Journal, vol. 142, no. 1
- [39] MOORE, B., QUINN, T., GOVERNATO, F., STADEL, J., LAKE, G. (1999), *Cold collapse and the core catastrophe* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 310, Issue 4, pp. 1147-1152
- [40] MOORE, B. (1994), *Evidence against dissipation-less dark matter from observations of galaxy haloes*, Nature, vol. 370, pp. 629-631
- [41] SPRINGEL, V. ET AL. (2005), *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars*, Nature, vol 435, Issue 7042, pp. 629-636
- [42] TAYLOR, J. E.; NAVARRO, J. F. (2001), *The Phase-Space Density Profiles of Cold Dark Matter Halos*, The Astrophysical Journal, vol. 563, pp. 483-488
- [43] COLÍN, P.; KLYPIN, A.; VALENZUELA, O.; GOTTLÖBER, S. (2004), *Dwarf Dark Matter Halos*, The Astrophysical Journal, vol. 612, No. 1
- [44] DIEMAND, J.; MOORE, B.; STADEL, J. (2005), *Earth-mass dark-matter haloes as the first structures in the early Universe*, Nature vol. 433, pp. 389-391
- [45] NAVARRO, J. F.; HAYASHI, E.; POWER, C.; JENKINS, A. R.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.; SPRINGEL, V.; STADEL, J.; QUINN, T. R. (2004), *The inner structure of  $\Lambda$ CDM haloes - III. Universality and asymptotic slopes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 349, Issue 3, pp. 1039-1051
- [46] KLYPIN, A. A.; KRAVSTOV, A. V.; BULLOCK, J. S.; PRIMACK, J. R. (2001), *Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos*, The Astrophysical Journal, vol. 554, Issue 2, pp. 903-915
- [47] HOMMA, D.; CHIBA, M.; OKAMOTO, S. ET AL. (2016), *A New Milky Way satellite discovered in the SUBARU/HYPER SUPRIME-CAM survey*, The Astrophysical Journal, vol. 832, 1
- [48] DOKKUM, P. DANIELLI, S.; COHEN, Y.; MERRIT, A.; ROMANOWSKY, A. J.; ABRAHAM, R.; BRODIE, J.; CONROY, C.; LOKHORST, D.; MOWLA, L.; O'SULLIVAN, E.; ZHANG, J. (2018), *A galaxy lacking dark matter*, Nature, vol. 555 pp. 629-632
- [49] KAUFFMAN, G.; WHITE, S. D. M.; GUIDERDONI, B. (1993), *The formation and evolution of galaxies within merging dark matter haloes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol 264, pp. 201-218
- [50] KLYPIN, A. A.; KRAVSTOV A. V.; VALENZUELA, O.; PRADA, F. (1999), *Where are the missing galactic satellites?*, The Astrophysical Journal, vol. 522, Issue 1, pp. 82-92
- [51] JI, S. U.; SIN, S. J. (1994), *Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid*, Physical Review D, vol. 50, Issue 6, pp. 3650-3654
- [52] OSTRIKER, J. P.; STEINDHART, P. J. (2003), *New Light on Dark Matter*, ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0306402
- [53] GUZMÁN, F. S.; MATOS T. (2000), *Scalar fields as dark matter in spiral galaxies*, Classical and Quantum Gravity, vol. 17, Issue 1, pp. L9-L16
- [54] LEE, J.; KOH, I. (1996), *Galactic halos as boson stars*, Physical Review D, vol. 53, Issue 4, pp. 2236-2239
- [55] GUZMÁN, F. S. MATOS, T. (2000), *Scalar Fields as Dark Matter in Spiral Galaxies* ArXiv preprint arXiv:gr-qc/9810028
- [56] SUÁREZ, A.; CHAVANIS, P.-H. (2015) *Hydrodynamic representation of the Klein-Gordon-Einstein equations in the weak field limit: I. General formalism and perturbations analysis* ArXiv preprint arXiv:1503.0743

- [57] MAGAÑA, J., MATOS, T., ROBLES, V., SUÁREZ, A. (2012), *A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model*, ArXiv preprint arXiv:1201.6107 [astro-ph.CO]
- [58] SUÁREZ, A., MATOS, T. (2011), *Structure formation with scalar-field dark matter: the fluid approach* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 416, Issue 1, pp. 87–93
- [59] KRAVSTOV, A. V. (1999), *High-resolution simulations of structure formation in the universe* Thesis (PhD). NEW MEXICO STATE UNIVERSITY, Source DAI-B 60/11, p. 5564, May 2000, 256 pages
- [60] O'SHEA, B. W.; BRYAN, G.; BORDNER, J.; NORMAN, M. L.; ABEL, T.; HARKNESS, R.; KRITSUK, A. (2004), *Introducing Enzo, an AMR Cosmology Application* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/0403044
- [61] TEYSSIER, R. (2002), *Cosmological hydrodynamics with adaptative mesh refinement. A new high resolution code called RAMSES*, Astronomy and Astrophysics, vol.385, pp.337-364
- [62] SPRINGEL, V.; YOSHIDA, N.; WHITE, S. D. M., (2001) *GADGET: a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations*, New Astronomy Volume 6, pp. 79-117
- [63] SPRINGEL, V. (2005), *The cosmological simulation code GADGET-2*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 364, pp. 1105-1134
- [64] REIF, F.; SCOTT, H. L.,(1998), *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* American Journal of Physics, vol. 66, Issue 2, pp. 164-167
- [65] BODENHEIMER, P.; LAUGHLIN, G. P.; RÓZYCZKA, M.; YORKE, H. W., (2007) *Numerical Methods in Astrophysics: An Introduction*, CRC Press, December 2006
- [66] BARNES, J.; HUT, P. (1986), *A hierarchical  $ON \log N$  force-calculation algorithm* Nature, vol. 324, Issue 4, pp. 446-449
- [67] KLYPIN, A. A.; SHADARIN, S. F. (1983), *Three-dimensional numerical model of the formation of large-scale structure in the Universe* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (ISSN 0035-8711), vol. 204, pp. 891-907
- [68] WHITE, S. D. M.; FRENK, C. S.; DAVIS, M. (1983), *Clustering in a neutrino-dominated universe*, Astrophysical Journal, Part 2 - Letters to the Editor (ISSN 0004-637X), vol. 274, pp. L1-L5
- [69] PARZEN, E. (1962), *On Estimation of a Probability Density Function and Mode*, Annals of Mathematical Statistics, vol. 33 no. 3 pp. 1065-1076
- [70] BONEVA, L. I.; KENDALL, D.; STEPANOV, I. (1971) *Spline Transformations: Three New Diagnostic Aids for the Statiscical Data-Analyst*, Journal of the Royal Statistical Society, vol. 33 no. 1 pp. 1-71
- [71] GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J.J. (1977) *Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 181, pp. 375-389
- [72] MONAGHAN, J. J., (1997) *SPH and Riemman Solvers*, Journal of Computational Physics, vol. 136, Issue 2 pp. 298-307
- [73] MONAGHAN, J. J. (1992) *Smoothed Particle Hydrodynamics*,
- [74] MONAGHAN, J.J.; LATTANZIO, J. C. (1985), *A refined particle method for astrophysical problems*, Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361), vol. 149, no. 1, pp. 135-143 Annual review of astronomy and astrophysics, vol. 30 (A93-25826 09-90), pp. 543-574
- [75] PRICE, D. J. (2004) *Smoothed Particle Magnetohydrodynamics-II. Variational principles and variable smoothing-length terms*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 348, Issue 1, pp. 139-152
- [76] GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J.J. (1977), *Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 181, pp. 375-389
- [77] MONAGHAN, J. J.; GINGOLD, R. A. (1983), *Shock Simulation by the Particle Method SPH*, Journal of Computational Physics, vol. 52, Issue 2, pp. 374-389

- [78] SPRINGEL, V. (2005), *The cosmological simulation code: GADGET-2*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 364, pp. 1105-1134
- [79] BODE, P.; OSTRICKER, J. P.; XU, G. (2000) *The Tree-Particle-Mesh N-body Gravity Solver* ArXiv preprint arXiv:astro-ph/9912541
- [80] BAGLA, J. S. (2002), *TreePM: A code for cosmological N-body simulations* Journal of Astrophysics and Astronomy, vol. 23, Issue 3-4, pp.185-196
- [81] SPRINGEL, V.; WHITE, S. D. M.; JENKINS, A.; FRENK, C. S.; YOSHIDA, N.; GAO, L.; NAVARRO, J.; THACKER, R.; CROTON, DA.; HELLY, J.; PEACOCK, J. A.; COLE, S.; THOMAS, P.; COUCHMAN, H.; EVRARD, A.; COLBERG, J.; PEARCE, F. (2005) *Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars* Nature, vol. 435, pp. 629
- [82] ZHANG, J., TSAI, Y.-L. S., KUO, J.-L, CHEUNG, K., CHU, M.-C (2017), *Ultra-Light Axion Dark Matter and its Impacts on Dark Halo Structure in N-body Simulation*, ArXiv preprint arXiv:1611.00892v6
- [83] TURNER, M. S. (1983), *Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe*, Physical Review D vol. 28, pp. 1243
- [84] SIN, S.-J. (1994), *Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid*, Physical Review D, vol 50, pp. 3650
- [85] MATOS, T.; GUZMÁN, F.; UREÑA-LÓPEZ, L. A.; NÚÑEZ, D.;(2002), *Scalar Field Dark Matter, Exact Solutions and Scalar Fields in Gravity* (Springer), pp. 165-184
- [86] GUZMÁN, F.; UREÑA-LÓPEZ, L. A. (2003), *Newtonian collapse of scalar field dark matter*, Physical Review D, **68**, 024023
- [87] KIM, J. E.; MARSH, D. J.; (2016), *An ultralight pseudoscalar boson* Physical Review D, **93**, 025027
- [88] SPIEGEL, E. A. (1980), *Fluid form of the linear and nonlinear Schrödinger equations*, Physica D: Nonlinear Phenomena vol. 1 Issue 2, pp. 236-240
- [89] UHLEMAN, C., KOPP, M., HAUGG, T. (2014), *Schrödinger method as N-body double and UV completion of dust*, Physical Review D. vol. 90, Issue 2
- [90] MARSH, D. J. E. (2015), *Nonlinear hydrodynamics of axion dark matter: Relative velocity effects and quantum forces*, Physical Review, vol. 91, Issue 12
- [91] SCHIVE, H.-Y.M CHIUEH, T., BROADHURST, T. (2014), *Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave*, Nature Physics, vol. 10, Issue 7, pp. 496
- [92] WHITE, S. D. M.; EFSTATHIOU, G.; FRENK, C. S. (1993), *The amplitude of mass fluctuations in the Universe* Monthly Notices of the Royal Astronomy Society, vol. 262, pp. 1023-1028
- [93] ZELDOVICH, Y. B. (1970), *Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations*, Astronomy and Astrophysics, vol. 5, pp. 84 - 89
- [94] SHANDARIN, S. F.; ZELDOVICH, Y. B. (1989), *The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium*, Reviews of Modern Physics, vol. 61, pp. 185
- [95] HAHN, O.; ABEL, T. (2011), *Multi-scale initial conditions for cosmological simulations*, ArXiv preprint, arXiv:1103.6031
- [96] LEWIS, A.; CHALLINOR, A.; LASENBY, A. (2000), *Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/9911177
- [97] LESGOURGES, J: (2011), *The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) I: Overview*, ArXiv preprint, arXiv:1104.2932
- [98] LEWIS, A.; BRIDLE, S. (2002), *Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo Approach*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0205436

- [99] L'HUILLIER, B.; PARK, C.; KIM, J. (2014), *Effects of the initial conditions on cosmological N-body simulations*, ArXiv preprint, arXiv:1401.6180
- [100] BAGLA, J. S.; RASAD, J. (2006), *Effects of the size of cosmological N-body simulations on physical quantities-I: Mass Function*, ArXiv preprint, arXiv:astro-ph/0601320
- [101] ZHANG, J., TSAI, Y.-L. S.; KUO, J.-L.; LIU, H.; CHEUNG, K.; CHU, M.-C (2017), *Is Fuzzy Dark Matter in tension with Lyman- $\alpha$  forest?*, ArXiv preprint, arXiv:1708.04389
- [102] LI, B.; RINDLER-DALLER, T.; SHAPIRO, P. R. (2014), *Cosmological constraints on Bose-Einstein-condensed scalar field dark matter*, Physical Review D, vol. 89, Issue 8, 083536
- [103] SUÁREZ, A.; CHAVANIS, P.H. (2015), *Hydrodynamic representation of the Klein-Gordon-Einstein equations in the weak field limit: I. General formalism and perturbations analysis*, ArXiv preprint, arXiv:1503.07437
- [104] SUÁREZ, A.; CHAVANIS, P.H. (2017), *Jeans type instability of a complex self-interacting scalar field in general relativity*, ArXiv preprint, arXiv 1710.10486
- [105] VOIT, G. M. (2005), *Tracing cosmic evolution with clusters of galaxies*, Reviews of Modern Physics, vol. 77, pp. 207
- [106] DAVIS, M.; EFSTATHIOU, G.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. (1985), *The evolution of large-scale structure in a universe dominated by cold dark matter*, Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 292, pp. 371-394
- [107] PRESS, W. H.; SCHECHTER, P. (1973), *Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation*, Astrophysical Journal, vol. 187, pp. 425-438
- [108] MO, H. J.; WHITE, S. D. M. (1996), *An analytic model for the spatial clustering of dark matter haloes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 282, Issue 2, pp. 347-361
- [109] SHETH, R. K.; TORMEN, G. (1999), *Large-scale bias and the peak background split*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 308, Issue 1, pp. 119-126
- [110] JENKINS, A.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.; COLBERG, J. M.; COLE, S.; EVRARD, A. E.; COUCHMAN, H. M. P.; YOSHIDA, N. (2001), *The mass function of dark matter haloes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 321, Issue 2, pp. 372-384
- [111] MOORE, B.; GHIGNA, S.; GOVERNATO, F. (1999), *Dark Matter Substructure within Galactic Halos*, The Astrophysical Journal, vol.524, pp. L19-L22
- [112] GHIGNA, S.; MOORE, B.; GOVERNATO, F.; LAKE, G.; QUINN, T.; STADEL, J. (2000), *Density Profiles and Substructure of Dark Matter Halos: Converging Results at Ultra-High Numerical Resolution*, The Astrophysical Journal, vol. 544, Issue 2, pp. 616-628
- [113] DE LUCIA G.; KAUFFMANN G.; SPRINGEL V.; WHITE S. D. M; LANZONI B.; STOEHR F.; TORMEN G.; YOSHIDA N. (2004), *Substructures in cold dark matter haloes*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 348, pp. 333-344
- [114] COLOMBI, S.; JAFFE, A.; NOVIKOV, D.; PICHON, C. (2009), *Accurate estimators of power spectra in N-body simulations*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 393, Issue 2, pp. 511-526
- [115] PLANCK COLLABORATION (2018), *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters* ArXiv preprint, arXiv:1807.06209
- [116] WANG, Z.; BOVIK, A. C.; SHEIKH, H. R.; SIMONCELLI E. P. (2004) *Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity* IEEE Transactions On Image Processing, vol. 13, no. 4