

CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



**Sistemas dinámicos en cosmologías
para campo escalar**

Tesis que presenta

Lic. en C. José Alberto Vázquez González

Para Obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

En la Especialidad de

Física

Director de Tesis: Dr. Tonatiuh Matos Chassin.

México, D.F.

Octubre 2007



A mis padres y hermana:

Yolanda González Soto,

José Alberto Vázquez Zagal,

Alba Yolanda Vázquez González.

MIL GRACIAS.

... A veces se trabaja toda una vida para avanzar apenas un metro, pero así crecieron las grandes montañas, avanzando siglo a siglo, metro a metro ...

Agradecimientos

- Agradezco profundamente a mi director de tesis, Dr. Tonatiuh Matos Chassin, por sus sabios consejos en las difíciles decisiones, por todo el apoyo que me ha brindado como investigador y persona, por su paciencia y esmero en el trabajo realizado y por supuesto por la oportunidad que me dio al formar parte de su grupo de investigación, con el cual fue posible desarrollar la presente de tesis de Maestría.
- Agradezco a mis sinodales Dr. Luis A. Ureña López y Dr. Abdel Perez Lorenzana por sus contribuciones y excelentes sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo de tesis.
- Agradezco a los profesores sus sabios conocimientos que me brindaron durante mi estancia en esta institución.
- Agradezco enormemente a Maria de la Luz (Malu), por el gran apoyo y ayuda que me propocionó en los buenos y malos momentos.
- Agradezco a Patricia Villar (Paty) y Flora Ibáñez (Flor) por aminorar la carga y hacer placentera mi estancia.
- Agradezco a CONACYT por la ayuda financiera que contribuyó a la realización de este trabajo.
- Agradezco a las instituciones donde he sido alumno y donde surgieron aquellas ideas que me permitieron desarrollar esta investigación: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del IPN, principalmente el Departamento de Física y por supuesto, mi *Alma Mater*: Universidad Autónoma en el Estado de Morelos

- De una manera muy peculiar agradezco a mis compañeros de generación por los buenos momentos e interminables noches de estudio que compartimos durante la maestría. Lupita, Camacho, Alonso, Roger, Richard, Yorch, Velis, Juan, Miguel, Wegman, Iván y el otro Iván. De la misma manera a todas las personas con quienes compartí estos dos largos años, en particular Estela, Lili, Aldrín, Iván Arturo, Pablo Arturo y Alejandro.

A todos ellos... muchas gracias!

JOSÉ ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ

RESÚMEN

El principal objetivo de este trabajo es el estudio cosmológico de diferentes teorías que presentan campos escalares, principalmente los modelos inspirados en la teoría de cuerdas. En este trabajo se interpretan a los campos escalares como materia y energía oscura del Universo, usando potenciales efectivos del tipo e^ϕ , ϕ^2 y $\cosh \phi$. De esta manera se realiza un estudio de la evolución de los parámetros de densidad que componen al Universo, comparándolos con los datos proporcionados por las observaciones actuales, las cuales restringen el espectro de parámetros fuertemente. Posteriormente se estudia la estabilidad de estos modelos utilizando la matemática de los sistemas dinámicos, donde se encuentran soluciones del tipo atractoras dominadas principalmente por energía oscura. Este estudio permite descartar una gran cantidad de modelos que contienen dichos campos.

ABSTRACT

The main objective of this work is to do a cosmological study of different theories with scalar fields, mainly from models inspired by string theories. In this work we interpreted the scalar fields like matter and dark energy of the Universe, having used effective potentials of the type e^ϕ , ϕ^2 and $\cosh \phi$. In this way, we made a study of the evolution of the density parameters that compose the Universe, comparing them with the data provided by the present observations, which restrict the spectrum of parameters strongly. Later we study the stability of these models using the mathematics of the dynamic systems, where are mainly dominated by attractor solutions of the type by dark energy. This study allows to discard a great amount of models that contain these fields.

Índice general

1. Introducción	3
2. Un poco de Cosmología	7
3. Parámetros observacionales	11
3.1. Rapidez de expansión H_0	11
3.2. Parámetro de densidad Ω_0	11
3.3. Parámetro de desaceleración q_0	13
3.4. Constante cosmológica Λ	13
4. Teoría básica	15
4.1. El modelo de Friedmann	15
4.2. La dinámica del modelo de Friedmann	17
4.3. Campos escalares cosmológicos	20
4.4. Sistemas dinámicos	22
5. Modelo ΛCDM	25
6. Campos acoplados con materia	31
6.1. Puntos de equilibrio y estabilidad	35

7. Modelos cosmológicos	37
7.1. Campos moduli	37
7.2. Potenciales tipo e^ϕ y ψ^2	43
7.3. Potenciales tipo ϕ^2 y ψ^2	48
8. Conclusiones	53
A. Métodos Numéricos.	55
A.1. Metodo ABM	56

Índice de figuras

5.1. Parámetros de densidad para Λ CDM	28
5.2. Atractor en Λ CDM	29
7.1. Dinámica de los parámetros de densidad	39
7.2. Parámetros de densidad con $\tilde{\alpha}_\gamma = 20, \tilde{\alpha}_\psi = 0$	41
7.3. Parámetros de densidad con $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$	42
7.4. Parámetros de densidad para un potencial e^ϕ	44
7.5. Parámetros de densidad con $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$	45
7.6. Atractores para potenciales e^ϕ	46
7.7. Parámetros de densidad para potenciales ϕ^2	49
7.8. Parámetros de densidad para $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$	50
7.9. Atractores para ϕ^2	51
A.1. Nodos para ABM	57

Introducción

CAPÍTULO 1

Uno de los enigmas más fascinantes en la física, es el problema de la existencia de materia oscura en el Universo. La mayoría de los astrónomos, cosmólogos y gente dedicada al estudio de la física de partículas están convencidos que al menos el 23% del total de la masa del Universo, es algún tipo de materia no luminosa, comunmente conocida como “**materia oscura**”. Sin embargo, a pesar de que la existencia de este tipo de materia fue sugerida hace 72 años, aún no se sabe su composición.

Λ CDM (materia oscura fría con constante cosmológica) es el modelo más aceptado para la descripción del Universo, este ha sido probado a niveles cosmológicos con gran éxito, por ejemplo, simulaciones numéricas sobre la formación de estructura de las galaxias, cúmulos de galaxias y más, están de acuerdo con la mayoría de las observaciones astronómicas. Éste también predice las fluctuaciones en las temperaturas de microkelvin de la radiación cósmica de fondo del Universo observado. Estas dos predicciones son principalmente el gran éxito de este modelo cosmológico. Sin embargo, en este modelo aún existen inconsistencias con las observaciones a nivel galáctico, ó los resultados de las pruebas son inciertos ó indican un desacuerdo con lo esperado por la teoría. Por ejemplo, existe una sobreproducción de sub-estructuras galácticas (galaxias pequeñas, irregulares, enanas esferoidales) que giran alrededor de unidades mayores, lo cual no se observa en el Universo. Además, los perfiles de densidad de los halos de materia oscura deberían exhibir un “pico” en el núcleo, en el cual la densidad aumenta abruptamente conforme la distancia decrece hacia el centro, en contraste con las regiones centrales de varios sistemas observados. Varias ideas han sido planteadas para resolver las discrepancias aparentes, sin embargo tal problema aún sigue abierto a la comunidad científica.

Por otro lado, existe la posibilidad de que todas estas inconsistencias puedan resolverse suponiendo que la materia oscura es un campo escalar más que una partícula. Este paradigma se deriva del hecho de que todas las teorías unificadas de la física contienen campos escalares. De entre los más conocidos están el Higgs, Inflatón, Dilatón, Radión, etc. Todos estos son campos escalares necesarios para que las teorías y los modelos sean matemática y físicamente consistentes. Con el descubrimiento de la energía oscura muchos autores han relacionado estos campos escalares y su energía con grandes logros. En [3] se ha propuesto que el campo escalar con un potencial escalar tipo cosh es la materia oscura del Universo, llamando a esta hipótesis Materia Oscura de Campo Escalar (SFDM). Esta hipótesis tiene muy buenas características, por ejemplo, la SFDM no necesita una hipótesis extra para explicar el perfil de densidad plano en el centro de las galaxias, debido a que los campos escalares tienen una presión intrínseca para evitar el colapso en el centro, de esta manera también se resuelve el problema de formación excesiva de galaxias enanas alrededor de la Vía Láctea [4].

Más aún, uno de los principales problemas que enfrenta la teoría de supercuerdas es que usualmente no existe una fenomenología guiada por los experimentos reales u observaciones, solo está soportada en sus matemáticas y consistencia interna. Para mucha gente, una forma de que la teoría de supercuerdas pueda hacer contacto con la fenomenología es a través de la cosmología [5]. En esta teoría existen 6 dimensiones extras formando una variedad interna compacta tipo Calabi-Yau [6]. El tamaño y la forma de esta variedad se manifiesta en las cuatro dimensiones de la teoría efectiva a bajas energías, mediante una serie de campos escalares (módulos de la teoría) los cuales aún no han sido detectados en la naturaleza. En particular dos campos, el dilatón y el axión, son los componentes más importantes de esta teoría, los cuales no se pueden fijar tan fácilmente. De hecho uno debería encontrar una interpretación para estos campos o dar una explicación de por que no han sido vistos en la naturaleza. Una posible interpretación es que existe un mecanismo para eliminarlos durante la evolución del Universo [7]. Por otra parte, una de las interpretaciones más populares para el dilatón es que puede ser la energía oscura del Universo, p.e. un campo Quintessence [8]. Estas últimas interpretaciones han sido posibles debido a que después de una compactificación no trivial, el campo dilatónico adquiere un potencial efectivo. Este potencial hace posible comparar el

campo dilatónico con algún otro tipo de materia. En este trabajo se da una nueva interpretación al dilatón suponiendo que éste es la materia oscura del Universo, esta nueva interpretación podría ser más cercana a la realidad cosmológica que la interpretación donde el dilatón es la energía oscura. Se mostrará que para cosmologías tardías esta propuesta es muy similar a Λ CDM, sin embargo, también se encontrará que es necesario anexar un ingrediente más para recuperar la cosmología realista de la teoría de supercuerdas.

Para tener una idea sobre si esta nueva propuesta es factible, se realizará un análisis dinámico en el cual se podrá conocer si existe la estabilidad de un Universo formado por estos campos escalares. Para aplicar la teoría de sistemas dinámicos es necesario escribir las ecuaciones de campo de Einstein como ecuaciones de evolución de primer orden (i.e. un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales dependiendo del contexto). Este formalismo matemático ya se ha aplicado a una gran diversidad de problemas y es muy utilizado para describir y comparar diferentes enfoques.

Un poco de Cosmología

CAPÍTULO 2

La **Cosmología** es la ciencia que estudia la estructura a gran escala y la historia del Universo, donde ‘*el Universo*’ es todo lo existente con un significado físico. Por tanto la cosmología considera el extenso dominio de galaxias, cúmulos de galaxias, objetos cuasi-estelares, etc., observables en el cielo por medio de toda clase de telescopios, examinando su naturaleza, distribución, origen, y la relación existente con su entorno.

El papel principal del Universo consiste en crear un ambiente en el cual las galaxias, estrellas y planetas se forman, proporcionando un ajuste de tal manera que, localmente, la física y la química puedan funcionar permitiendo la evolución de la vida en los planetas tales como el nuestro. Si el entorno o ambiente cosmológico hubiera sido sustancialmente diferente, las condiciones locales serían diferentes y por tanto, en la mayoría de los casos, no estaríamos aquí, de hecho ninguna evolución biológica hubiera ocurrido [9]. Por consiguiente la Cosmología es de gran interés para la mayoría de la comunidad científica, ésta fija el marco de referencia para el resto de las ciencias, es única y está considerada una ciencia histórica/geográfica.

La principal diferencia entre la Cosmología y las otras ciencias es la unicidad del objeto a estudiar- el Universo como un todo - junto con el papel de fondo que juega el resto de la física y las demás ciencias. En el estudio del Universo, los problemas que surgen son acentuados debido a su inmensa escala, al igual que las extremas energías que ocurren en su inicio. Aún existen ciertas limitantes que no permiten manipular de manera experimental las condiciones que lo originaron, estas limitantes también existen en la capacidad de observar regiones muy dis-

tantes y a épocas muy tempranas. Por tanto, es inevitable entrar en discusiones filosóficas que van mas allá de la teoría cosmológica. Este tipo de opciones influyen fuertemente la manera de comprender el cosmos y aún más, obligan a perseguir una teoría que satisfaga hasta las exigencias más ambiciosas [10].

El estudio de la cosmología moderna inicia con los modelos cosmológicos propuestos por A. Einstein y W. de Sitter en 1917, basados en la teoría de la relatividad de Einstein. El concepto de un Universo en expansión lo introdujo A. Friedmann y G. Lemaître en los años 20, sin embargo este ganó credibilidad hasta los 30 debido a las observaciones de galaxias hechas por Hubble. En estas, muestra un aumento sistemático del corrimiento al rojo con la distancia, junto con la prueba de Eddington sobre la inestabilidad del modelo estático de Einstein. Desde la década de los 40 las implicaciones de un Universo expandiéndose han sido investigadas con un particular énfasis en cuatro distintas épocas de la historia del Universo:

(1) La *época galáctica*, es el periodo de tiempo que se extiende desde la formación de galaxias hasta el presente, esta es la época más accesible a las observaciones. Durante este periodo, la materia usualmente se idealiza como un fluido perfecto libre de presión, considerando cúmulos de galaxias o galaxias como las partículas del fluido. La radiación cósmica de fondo tiene un efecto despreciable en la dinámica de este periodo.

(2) La *época pre-galáctica*, durante la cual la materia se idealiza como un gas, considerando a las partículas como gas de moléculas, átomos, núcleos o partículas elementales a diferentes tiempos. Esta época se divide en dos periodos, *periodo post-desacoplamiento*, cuando la materia y la radiación evolucionan esencialmente independientes, y *periodo pre-desacoplamiento*, cuando la materia es ionizada e interactúa fuertemente con la radiación a través de dispersión Thomson. La radiación cósmica de fondo observada se interpreta como una fuerte evidencia para la existencia de este periodo. Además la nucleosíntesis, i.e. la formación de ${}^4\text{He}$ y otros isótopos ligeros, ocurre durante éste periodo y tiene implicaciones observacionales. En ésta época, a tiempos tardíos la materia domina dinámicamente, por el contrario en la parte temprana la radiación cósmica de fondo es la componente dominante. Por tanto, es una buena aproximación representarla como un gas ideal relativista, Figura 5.1.

La física de estas dos épocas está muy bien entendida, y juntas constituyen el *modelo estándar cosmológico o hot big bang* del Universo. Éste modelo provee un marco de trabajo muy útil para la explicación de varios acontecimientos en el Universo y el análisis en los datos recopilados por las observaciones [14]. Adicionalmente dos periodos tempranos han estado bajo un intensivo estudio, sin embargo la física de estos tiempos aún no se entiende muy bien.

(3) La *época inflacionaria*, en esta época el universo experimenta una expansión acelerada. En la mayoría de los modelos para esta época, los cuales ocurren antes de la época pre-galáctica mencionada anteriormente y después del tiempo de Planck, la fuente que la produce es considerada un campo escalar (a menudo denominado como inflatón), autointeractuante a través de un potencial para el cual puede o no puede surgir un término de masa. El prototipo para estos campos es el bosón de Higgs, el cual surge en el modelo estándar de física de partículas. Los campos escalares no han sido observados en la naturaleza hasta ahora, así el estatus físico del escenario inflacionario aún queda abierto. No obstante la idea provee importantes enlaces con la física teórica moderna y posibles explicaciones para aspectos del universo que son en cierta manera un misterio. Esto también tiene consecuencias observacionales como el aspecto de las fluctuaciones en la densidad que pueden estar relacionadas con las anisotropías de la radiación cósmica de fondo.

(4) La *época de gravedad cuántica*, la cual ocurre antes del tiempo de Planck. En esta época, la teoría de la relatividad general clásica ya no puede asumirse válida.

Es usual asumir que la evolución del universo esta gobernada por las ecuaciones de campo de Einstein durante las épocas (1) y (2), y usualmente también en la época (3), aunque a veces en la época inflacionaria se atribuyen los efectos de las teorías gravitacionales modificadas.

Los primeros estudios sistemáticos sobre los modelos de un Universo expandiéndose, espacialmente homogéneo e isotrópico, fueron emprendidos por Friedmann y Lemaître, y establecidos en bases geométricas por H.P. Robertson y A.G. Walker. Nos refererimos a estos modelos del universo, los cuales estan gobernados por las ecuaciones de campo de Einstein, como universos de Friedmann-Lemaître donde la geometría esencial esta dada por la métrica de

Robertson-Walker. La necesidad de esta suposición se restringe por las observaciones y aún está abierta al debate. Por ejemplo, en la época galáctica, el universo no es homogéneo en todas las escalas. Además la validez de la métrica homogénea e isotrópica de RW supone que a alguna escala las galaxias se encuentran distribuidas homogéneamente en el espacio. Sin embargo se asume, hasta el punto de llegar a ser un dogma, que la geometría del espacio-tiempo es espacialmente homogénea e isotrópica con las perturbaciones adecuadas para explicar la formación de galaxias y otras estructuras.

Parámetros observacionales

3.1. Rapidez de expansión H_0

El principal descubrimiento de Hubble fue encontrar que la velocidad de recesión es proporcional a la distancia. La velocidad de recesión está dada por $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ y se encuentra en la misma dirección que \vec{r} , permitiendo escribir

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (3.1)$$

donde se ha usado la relación $\vec{r} = a(t)\vec{x}$, con \vec{r} la distancia real y \vec{x} la coordenada cómovil. Consecuentemente, la **ley de Hubble** $\vec{v} = H\vec{r}$ nos dice que la constante de proporcionalidad, el parámetro de Hubble, debería definirse como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.2)$$

El valor para H_0 ¹ usualmente se parametriza como

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (3.3)$$

donde el valor de $h=0.743$ según los datos recientes de WMAP3 [22].

Debido a que la constante de Hubble, medida hoy, es positiva en lugar de negativa, sabemos que el *Universo se esta expandiendo* en lugar de contraerse [11].

3.2. Parámetro de densidad Ω_0

Recordando que $H = \dot{a}/a$, la ecuación de Friedmann (4.10), se lee

¹El valor actual se denota con el subíndice ‘0’

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (3.4)$$

Para un valor dado de H , existe un valor especial de la densidad para hacer la geometría del Universo plana, $k = 0$. Esta densidad se conoce como **densidad crítica** ρ_c , la cual está dada por

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.5)$$

Esta relación implica que en la presente época

$$\rho_c(t_0) \simeq \begin{cases} 1,88 h^2 \times 10^{-26} kg m^{-3} \\ 2,78 h^{-1} \times 10^{11} M_\odot / (h^{-1} Mpc)^3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Usualmente los cosmólogos expresan la densidad promedio del universo ρ en una cantidad adimensional conocida como **parámetro de densidad** Ω definido por

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (3.7)$$

Nuestro universo contiene diversos tipos de materia, y esta notación se usa no sólo para la densidad total sino también para cada componente individual de la densidad, como Ω_{polvo} , Ω_{rad} , *etc.*

Con esta nueva notación, se reescribe la ecuación de Friedmann en una forma muy útil. Sustituyendo ρ en (3.4) y usando las definiciones hechas en las ecuaciones (3.5) y (3.7), nos lleva a

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c\Omega - \frac{k}{a^2} = H^2\Omega - \frac{k}{a^2}, \quad (3.8)$$

reordenando obtenemos

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.9)$$

Esta forma de la ecuación de Friedmann es muy útil para el análisis de la evolución en la densidad, por esto se resumen algunas posibilidades:

- Universo abierto: $0 < \Omega < 1 : k < 0 : \rho < \rho_c$.
- Universo plano: $\Omega = 1 : k = 0 : \rho = \rho_c$.
- Universo cerrado: $\Omega > 1 : k > 0 : \rho > \rho_c$.

El valor de $\Omega_{tot_0} = 0,99 \pm 0,04$ según los resultados de WMAP3 [22], esto indica que en la época actual el Universo es casi plano, $k \approx 0$.

3.3. Parámetro de desaceleración q_0

En el estudio de la supernovas tipo Ia, se ha encontrado que el Universo no solo se esta expandiendo, sino que la rapidez a la cual lo hace, dada por el parámetro de Hubble, está cambiando con el tiempo. El parámetro de desaceleración es una manera de cuantificar esto.

Si se considera una expansión de Taylor del factor de escala alrededor de la época actual. La forma general queda como:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots \quad (3.10)$$

Dividiendo sobre $a(t_0)$, entonces el coeficiente del término $[t - t_0]$ será el parámetro de Hubble actual, de ésta manera se reescribe

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2 + \dots, \quad (3.11)$$

el cual define al **parámetro de desaceleración** q_0 como

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0^2} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}. \quad (3.12)$$

Entre más grande es el valor de q_0 , más rápida la desaceleración y viceversa.

3.4. Constante cosmológica Λ

Cuando Einstein formuló la teoría de la relatividad general, estaba convencido que el Universo era estático. Sin embargo, más tarde se dio cuenta que su teoría no lo permitía, debido a que toda la materia se atrae gravitacionalmente y por tanto en algún momento esto conduciría al colapso total del Universo. Para poder fijar un Universo estático, él propuso un cambio en las ecuaciones, algo que después llamo el error más grande de su vida, y fue la introducción de una **constante cosmológica** Λ , la cual aparece en la ecuación de Friedmann como un término extra, dado por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.13)$$

La constante cosmológica a veces se piensa como la densidad de energía del espacio “vacío”; en particular un posible origen en física cuántica es algún tipo de ‘energía del punto cero’, el cual se mantiene aún si no hay partículas presentes.

De la misma forma que fue útil expresar la densidad como una fracción de la densidad crítica, es conveniente normalizar la constante cosmológica, definiendo

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (3.14)$$

Repetiendo los mismos pasos para escribir la ecuación de Friedmann en la forma de la ecuación (3.4), encontramos

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.15)$$

La mayoría de los cosmólogos, prefieren la constante cosmológica igual a cero, sin embargo el Universo podría tener otras ideas; además, las observaciones de las supernovas tipo Ia argumentan fuertemente en favor de la constante cosmológica como un buen candidato a energía oscura.

La cosmología inicia asumiendo que las leyes de la física son las mismas en todas partes, y además que éstas son la base de la evolución del Universo. Por tanto, se asume que la evolución a gran escala del espacio-tiempo se determina aplicando las ecuaciones de campo de Einstein en todo el espacio, esto es, la evolución global es seguida por la física local.

Los modelos estándares de la cosmología se contruyen esencialmente sobre el *Principio Cosmológico* y por tanto se asume que nuestro Universo, a gran escala, poseé dos importantes propiedades, **homogeneidad e isotropía**. La homogeneidad implica que el Universo se observa igual en cada punto, mientras que la isotropía establece que se observa igual en todas direcciones.

4.1. El modelo de Friedmann

Para construir el modelo más simple del Universo, se comienza asumiendo que las propiedades geométricas del espacio 3-dimensional son las mismas en todas las direcciones espaciales y que éstas propiedades no tienen una dirección preferencial. Tal espacio 3-dimensional se denomina ‘homogéneo’ e ‘isotrópico’.

La suposición de esta homogeneidad e isotropía en el 3-espacio escoge una clase preferida de observadores, aquellos para los cuales el universo parece homogéneo e isotrópico, sin embargo, otro observador que se mueva con velocidad uniforme respecto a esta clase fundamental de observadores, encontraría que el universo es anisotrópico. Si se utiliza un sistema coordinado apropiado para este tipo de observadores, la descripción de la física será mucho más simple.

La forma de la métrica del espacio-tiempo se determina de tal manera que para un sistema coordenado (t, x^i) la homogeneidad e isotropía sea evidente. El intervalo (ds^2) de espacio-tiempo más general posible puede expresarse como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j \\ &\equiv g_{00}dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + \sigma_{ij}dx^i dx^j, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde σ_{ij} es la métrica espacial. La isotropía del espacio implica que el término g_{0i} debe de anularse; de otra manera, se identificaría una dirección particular en el espacio relacionada con el 3-vector v_i con componentes g_{0i} . Además, en el sistema coordenado determinado por los observadores fundamentales, se puede usar el tiempo propio de los relojes llevados por estos para etiquetar las superficies de espacio-tiempo. Esta elección del tiempo coordenado t implica que $g_{00} = -1$, formulando así el intervalo espacio-tiempo de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + \sigma_{ij}dx^i dx^j \equiv -dt^2 + dl^2. \quad (4.2)$$

El problema ahora se reduce a determinar la 3-métrica σ_{ij} de un 3-espacio, el cual a cualquier instante de tiempo, es homogéneo e isotrópico.

Considerando la suposición de isotropía - la cual implica simetría esférica - permite escribir el intervalo de línea como

$$dl^2 = a^2[\lambda^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (4.3)$$

Calculando el escalar de curvatura 3R para este espacio tres dimensional, se encuentra que

$${}^3R = \frac{3}{2a^2r^3} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Además, la homogeneidad implica que todas las propiedades geométricas son independientes de r , por tanto 3R debe ser constante. Igualándolo a una constante e integrando el resultado, la expresión que se obtiene

$$r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = c_1 r^4 + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{ctes.} \quad (4.5)$$

Para evitar cualquier singularidad a $r = 0$, es necesario hacer $c_2 = 0$. Obteniendo así $\lambda^2 = (1 - c_1 r^2)^{-1}$. Cuando $c_1 \neq 0$, se puede reescalar r y hacer $c_1 = 1$ ó -1 . Esto conduce a la métrica completa del espacio-tiempo:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (4.6)$$

Esta métrica, llamada **métrica de Robertson-Walker**, describe el Universo de **Friedmann**, el cual es espacialmente homogéneo e isotrópico en cada instante de tiempo [12].

El prefactor a (denominado “factor de escala”) determina la escala total de la métrica espacial y, en general, puede ser una función del tiempo: $a = a(t)$. Además, la geometría de las hipersuperficies del Universo de Friedmann está dada a través del factor k , esto es, tienen curvatura positiva, cero y negativa para $k = +1, 0$ y -1 respectivamente; la magnitud de la curvatura es $(6/a^2)$ cuando k es distinta de cero. Para $k = 0$, el espacio es el familiar, espacio 3-Euclideo; la homogeneidad e isotropía de este espacio es obvia. Para $k = 1$ representa una 3-esfera de radio a embebida en un espacio abstracto Euclideo 4-dimensional. En el caso de $k = -1$, representa la geometría de un hiperboloide embebido en un espacio abstracto Lorentziano 4-dimensional.

4.2. La dinámica del modelo de Friedmann

En relatividad general, la cantidad fundamental es la métrica $g_{\mu\nu}$, la cual describe la geometría del espacio-tiempo. Anteriormente se mostró que la métrica de Friedmann-Robertson-Walker cumple con la suposición de homogeneidad e isotropía. Esta métrica contiene la curvatura k y el factor de escala $a(t)$, los cuales pueden determinarse mediante las ecuaciones de Einstein una vez que el tensor de esfuerzos queda especificado para la fuente [13].

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}g^\mu_\nu R = 8\pi GT^\mu_\nu. \quad (4.7)$$

Las propiedades geométricas del espacio están determinadas por la distribución de materia a través de las ecuaciones de Einstein (4.7). Por tanto, para un Universo de Friedmann, se sigue que la distribución de materia también debe ser homogénea e isotrópica. Esto no es del todo verdadero en el Universo observado, en el cual existe un grado significativo de inhomogeneidad en forma de

galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Sin embargo, se asume que estas inhomogeneidades se pueden ignorar y que la distribución de materia está descrita por una densidad promedio suave en el estudio de la dinámica a gran escala del Universo.

Tal asunción implica que T_0^i debe ser cero y que los componentes espaciales T_j^i deben tener una forma diagonal con $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$. Es conveniente escribir tal tensor de esfuerzos como

$$T_\nu^\mu = \text{diag}[-\rho(t), p(t), p(t), p(t)]. \quad (4.8)$$

Esta notación sugiere las siguientes consideraciones: si la fuente fuera un fluido ideal con presión p y densidad ρ , entonces el tensor de esfuerzos para un fluido ideal, $T_\beta^\alpha = (p + \rho)u^\alpha u_\beta - p\delta_\beta^\alpha$, tendría la forma (4.8) en el sistema de reposo del fluido. También, la naturaleza de la fuente comunmente queda especificada mediante la relación bariotrópica entre ρ y p que esta dada en la forma de una **ecuación de estado** $p = p(\rho)$.

Los constituyentes del Universo son esencialmente radiación (en la forma de partículas con masa cero como fotones, neutrinos etc.) y materia no-relativista. La radiación tiene una ecuación de estado del tipo $p = (1/3)\rho$, mientras que para la materia no-relativista es una buena aproximación considerarla como “polvo”, esto es, sin presión $p \simeq 0$. Para partículas no-relativistas de masa m y densidad de número n , $p \simeq nmv^2$ mientras que para partículas relativistas $p \simeq nmc^2$ con $v \ll c$. La naturaleza, y por tanto la ecuación de estado, de los constituyentes cambiará con el tiempo conforme el Universo evolucione. La ecuación de estado a cualquier época debe determinarse por el estudio de los procesos físicos a una época particular. En general para la mayor parte de la evolución del Universo, es razonablemente correcto tratar a las fuentes como una mezcla de radiación (con $p = (1/3)\rho$) y materia (con $p \cong 0$).

El tensor G_ν^μ puede calcularse a partir de la métrica de Robertson-Walker de una manera directa. Como uno esperaría, encontramos que G_0^i se anula mientras que G_j^i es proporcional a la matriz unitaria. Los dos componentes distintos de cero son:

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \quad G_j^i = \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\delta_j^i. \quad (4.9)$$

Por tanto la ecuación (4.9) proporciona dos ecuaciones independientes, donde la primera expresión es precisamente la **ecuación de Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (4.10)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{k}{a^2} = -8\pi Gp, \quad (4.11)$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) pueden combinarse para dar una importante ecuación conocida como la **ecuación de aceleración**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.12)$$

con las cantidades p y ρ *definidas* en (4.8) como los componentes T_0^0 y T_1^1 del tensor de esfuerzos. Para un tipo usual de materia $(\rho + 3p) > 0$, implicando que $\ddot{a} < 0$, esto es, a será mas pequeña en el pasado y tenderá a cero en algún tiempo $t = t_{sing}$, cuando $a = 0$ los componentes del tensor de curvatura $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ divergerán, tal divergencia (llamada singularidad) es un artificio de esta teoría. Una vez que el radio de curvatura del espacio-tiempo sea comparable con la longitud fundamental $(G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 10^{-33}cm$, los efectos cuánticos de la gravedad serán importantes invalidando las ecuaciones clásicas de Einstein.

La interpretación de p como “presión” depende del tratamiento de la fuente como un fluido ideal. En el caso del modelo de Friedmann la fuente *siempre* deberá tener la forma (4.8), sin embargo, si la fuente no es un fluido ideal entonces no es posible interpretar las componentes espaciales de T_β^α como presiones. Por tanto, es muy probable que la ecuación de estado para la materia a altas energías no obedezca la condición $(\rho + 3p) > 0$ guiando esto a nueva física.

De la ecuación (4.10), se observa que $\rho a^3 = (3/8\pi G)a(\dot{a}^2 + k)$; diferenciando esta expresión y utilizando la ecuación (4.11) obtenemos la **ecuación de fluido**

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -3a^2\dot{a}p = -p\frac{da^3}{dt} \quad (4.13)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (4.14)$$

donde, como siempre, el punto significa derivada temporal. Como se observa, existen dos términos que contribuyen al cambio en la densidad, el primer término del paréntesis corresponde a la dilución de la densidad debido a que el volumen ha aumentado, mientras que el segundo corresponde a la pérdida de energía debido a que la presión del material hace trabajo conforme el volumen del

Universo aumenta. Ésta por supuesto no desaparece enteramente, la energía se conserva, la energía perdida por el fluido vía el trabajo hecho se ha ido a la energía potencial gravitacional.

Por tanto: **dada la ecuación de estado $p = p(\rho)$, y las ecuaciones (4.10), (4.14) quedan determinadas completamente las tres funciones $a(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$, y por tanto la evolución del Universo.**

4.3. Campos escalares cosmológicos

Los campos escalares, son campos asociados a partículas de spín nulo, estos son muy importantes especialmente en física debido a que en todas las teorías de unificación existentes proponen campos escalares (bosones) como partículas fundamentales, los cuales son la parte medular de estas teorías. En particular en cosmología, debido a que se cree que son los principales candidatos a inflación, tal campo ϕ se conoce como inflatón. Por otro lado, si los campos escalares formarían condensados de Bose-Einstein, estos se colapsarían debido a su fuerza gravitacional y así formarían objetos llamados oscilatonos (si son campos reales) o estrellas de bosones (si son campos complejos). Estos son interesantes desde el punto de vista matemático, porque son soluciones estables de las ecuaciones de Einstein que no son singulares ni tienen horizontes. Desde el punto de vista físico los oscilatonos son del tamaño de un halo de galaxia y pueden ser los responsables de la estructura del universo observado, por tanto este es un buen candidato a ser materia oscura en el Universo.

El estudio de los campos escalares se basa en el análisis del Lagrangiano de Klein-Gordon libre, con un potencial $V(\phi)$ de auto interacción [19], dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (4.15)$$

La densidad de momento covariante se calcula usando que

$$\Pi^\alpha \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \phi)} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\delta_\mu^\alpha \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta_\nu^\alpha) = \frac{1}{2} (\partial^\alpha \phi + \partial^\alpha \phi) = \partial^\alpha \phi,$$

por tanto se tiene $\Pi^\alpha = \partial^\alpha$, con el tensor de energía momento dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right], \quad (4.16)$$

donde las componentes puramente temporales guían a la densidad Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}[\Pi^2 + (\nabla\phi)^2] + V(\phi),\end{aligned}\quad (4.17)$$

y las componentes puramente espaciales son

$$T_{ii} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \quad (4.18)$$

Si se asume que los efectos del campo escalar se promedian en el tiempo para comportarse de manera similar a un fluido perfecto, comparando con las ecuaciones anteriores con (4.8), se hace la identificación

$$\mathcal{E} \equiv \rho \equiv \langle T_{00} \rangle \quad y \quad p \equiv \langle T_{ii} \rangle \quad (4.19)$$

con

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (4.20)$$

y

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \quad (4.21)$$

Si se considera la evolución cosmológica guiada por el campo escalar, simplemente se pueden sustituir las expresiones para ρ y p en la ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración (4.10) y (4.12) para obtener la evolución temporal del factor de escala como

$$H^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (4.22)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + \frac{\Lambda}{3}. \quad (4.23)$$

Mientras que la ecuación para la evolución temporal del campo escalar se obtiene simplemente sustituyendo las expresiones para ρ y p en la ecuación de conservación (4.14) y así obtener

$$\ddot{\phi} + 3H \left[\dot{\phi} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\dot{\phi}} \right] + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.24)$$

Resumiendo: La dinámica y evolución del Universo se describe mediante un conjunto de ecuaciones, esto es, un Universo constituido por un fluido perfecto más un campo escalar está descrito por las expresiones (4.25), en las cuales concentraremos nuestro estudio.

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0, \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left[\rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \ddot{\phi} + 3H \left[\dot{\phi} + \frac{(\nabla\phi)^2}{\dot{\phi}} \right] + \frac{dV}{d\phi} &= 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.4. Sistemas dinámicos

La teoría de sistemas dinámicos tiene su origen en el trabajo de Poincaré a finales de los 90, [15]. Él propuso que en lugar de encontrar soluciones exactas particulares de una ecuación diferencial (4.26), uno debería de usar métodos topológicos y geométricos para determinar las propiedades del conjunto completo de soluciones, vistas como órbitas (trayectorias) en un espacio fase. Fue algunos años más tarde, a finales de los 20, que Birkhoff y otros empezaron con el desarrollo formal de la teoría de sistemas dinámicos, introduciendo conceptos tales como el flujo asociado con una ecuación diferencial, el concepto fundamental de un conjunto límite- w , atractores y variedades estables e inestables.

La teoría de sistemas dinámicos se utiliza para estudiar sistemas físicos que evolucionan en el tiempo. Se asume que el estado del sistema físico a un instante de tiempo t está descrito por un elemento \mathbf{x} de un espacio fase \mathbf{X} , el cual puede ser de dimensión finita (\mathbb{R}^n o una variedad diferenciable no trivial) o de dimensión infinita (espacio de funciones). La evolución del sistema se representa por una ecuación diferencial autónoma en \mathbf{X} , escrita simbólicamente como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in X, \tag{4.26}$$

donde $\mathbf{f} : X \rightarrow X$. Si X es de dimensión finita, entonces (4.26) representa un sistema autónomo de *ecuaciones diferenciales ordinarias*, mientras que si X es un espacio de funciones, el mapeo \mathbf{f} involucrará derivadas espaciales y (4.26) representará un sistema autónomo de *ecuaciones diferenciales parciales*.

El primer paso para obtener información cualitativa sobre las soluciones de (4.26) es estudiando el flujo de la ecuación en la vecindad de sus puntos críticos, esto es, el estudio de su estabilidad [20]. La idea esencial es linearizar la ecuación diferencial en cada punto fijo y utilizar el teorema de Hartman-Grobman.

TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN

Considere una ecuación diferencial (4.26), donde el campo vectorial \mathbf{f} es de clase C^1 . Si \mathbf{x}_c es un punto crítico hiperbólico, si $\mathbf{f}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$, de la ecuación diferencial, por tanto existe una vecindad de \mathbf{x}_c en la cual el flujo es topológicamente equivalente al flujo de la linearización de la ecuación diferencial en \mathbf{x}_c [21]. Esto es, las órbitas de ambos sistemas (localmente) son cualitativamente las mismas.

El análisis para sistemas lineales es el siguiente. Para una ecuación diferencial lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$ definida en \mathbb{R}^n (ó definida en un subconjunto del espacio real; ó en general, definido en una variedad suave) se pueden determinar los eigenvalores de la matriz \mathbf{A} (en general compleja y no necesariamente distintos) y los eigenvalores asociados, los cuales generan tres subespacios de \mathbb{R}^n : E^s , E^u y E^c . Estos espacios contienen orbitas disjuntas las cuales forman una partición del espacio fase, esto es, $E^s \otimes E^u \otimes E^c = \mathbb{R}^n$. Estos son, respectivamente, el espacio estable (generado por sus eingeectores asociados los cuales tienen partes reales negativas), el espacio inestable (generado por sus eingeectores asociados los cuales tienen partes reales positivas), y los subespacios centrales (generado por sus eingeectores asociados los cuales tienen partes reales nulas).

Los espacios estable e inestable se caracterizan, por las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in E^s &\Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \in E^u &\Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Estos describen el comportamiento asimpótico: todas los estados iniciales en un subespacio estable son atraídos por el punto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y todos los estados iniciales en el subespacio inestable son repelidos por el mismo punto.

Si el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ no es lineal, se usa el teorema de Hartman-Grobman para poder hacer la linearización y por tanto usar el análisis para sistemas lineales. Utilizando esto, se pueden definir las variedades $\mathcal{E}^{(s,u,c)}$ (variedades estable,

inestable y centro respectivamente) en un punto fijo, estas variedades son tangentes a los correspondientes subespacios $E^{(s,u,c)}$ de la linealización en el mismo punto fijo (subespacios estable, inestable y centro respectivamente). Todas las orbitas en \mathcal{E}^s convergen asintóticamente a un punto fijo cuando la variable temporal evoluciona ($\tau \rightarrow \infty$), de manera análoga, todas las órbitas en \mathcal{E}^u convergerán asintóticamente a un punto fijo cuando ($\tau \rightarrow -\infty$). La variedad \mathcal{E}^c contiene todas las orbitas cuyos comportamientos asintóticos no pueden analizarse haciendo uso del análisis lineal (el teorema Hartman-Grobman falla), [16].

Los diferentes tipos de observaciones en el cosmos sugieren que el modelo adecuado es el de un Universo plano, homogéneo e isotrópico. Esto último implica que el Universo posee la densidad crítica de energía, de la cual podemos distinguir principalmente tres tipos de componentes: relativistas, no relativistas y energía oscura. El modelo resultante de considerar las características mencionadas se conoce como el **Modelo Estándar Cosmológico** (Λ CDM).

Λ CDM (Lambda-Cold Dark Matter), representa el modelo de concordancia del big-bang que explica las observaciones cósmicas realizadas sobre la radiación cósmica de fondo, así como la estructura a gran escala del Universo y las observaciones realizadas sobre las supernovas, todo ello da indicios sobre una posible explicación para la expansión acelerada del Universo [17, 18]. Este modelo, es el más simple conocido que está de acuerdo con todas las observaciones a gran escala.

- Λ representa la constante cosmológica como parte de un término de la energía oscura que permite conocer el valor actual de la expansión acelerada del Universo. La constante cosmológica se describe en términos de Ω_Λ . En la actualidad $\Omega_\Lambda \simeq 0,73$, lo que implica que equivale al 73 % de la densidad de energía del Universo actual.
- Materia oscura fría, representa al modelo donde la materia oscura se explica como no relativista, no-barónica y sin colisiones. Esta componente se encarga del 23 % de la densidad de energía del Universo actual. El 4 % restante es toda la materia y energía que componen los átomos y fotones, estos son la base para construir los planetas, estrellas, y nubes de gas en el Universo.

- El modelo asume un espectro invariante de escala en las perturbaciones primordiales y un Universo sin curvatura espacial.

Estas son las suposiciones más simples para un modelo físico consistente de la cosmología. Sin embargo, Λ CDM es tan sólo un modelo. Los cosmólogos anticipan que todas estas presunciones no se conocerán exáctamente, hasta que no se tenga un endentimiento total sobre la física fundamental. Por otra parte, Λ CDM no dice nada sobre el origen físico de la materia oscura, la energía oscura y del espectro cuasi escalar-invariante de las perturbaciones primordiales de la curvatura: en ese sentido, este modelo es simplemente una parameterization útil de lo aún desconocido.

Se considera un Universo como el descrito anteriormente, esto es, un espacio-tiempo plano del tipo Friedmann-Robertson-Walker con componentes de materia como radiación (r), bariones (b), materia oscura (DM), y una constante cosmológica (Λ) como energía oscura. Todos estos componentes se representan como fluidos perfectos cuya densidad de energía ρ y presión p están relacionadas mediante una ecuación de estado tipo bariotrópica γ de la forma $p = (\gamma - 1)\rho$. Donde para la radiación, $\gamma_r = 4/3$, para los bariones y la materia oscura $\gamma_b = 1$, mientras que para la constante cosmológica $\gamma_\Lambda = 0$

La ecuación de Friedmann (3.4) con estos componentes del Universo es

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{DE} + \rho_{DM} + \rho_b + \rho_r), \quad (5.1)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$, mientras que las ecuaciones de continuidad (4.14) para cada fluido perfecto estan decritas por

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} &= 0, \\ \dot{\rho}_b + 3H\rho_b &= 0, \\ \dot{\rho}_r + 4H\rho_r &= 0, \\ \dot{\rho}_{DE} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver son suma facilidad de manera analítica, sin embargo por ejemplificar, se resolverá usando la teoría de sistemas dinámicos. Definiendo como nuevas variables

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_{DM}}}{H}, & y &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_b}}{H}, \\
z &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_r}}{H}, & w &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_{DE}}}{H},
\end{aligned} \tag{5.3}$$

con estas nuevas variables (5.3), el sistema de ecuaciones diferenciales (5.2) se reescribe como un sistema dinámico en el espacio fase $\{x,y,z,w\}$ de la forma

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{3}{2}(\Pi - 1)x, \\
y' &= \frac{3}{2}(\Pi - 1)y, \\
z' &= \frac{3}{2}\left(\Pi - \frac{4}{3}\right)z, \\
w' &= \frac{3}{2}\Pi w,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde la prima significa derivada respecto al parámetro $N=\ln(a)$, además se ha usado que $\Pi = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}z^2$, la ecuación de Friedmann (5.1) ahora se puede reescribir como una constricción del espacio fase

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1. \tag{5.5}$$

Los parámetros de densidad quedan definidos como:

$$\begin{aligned}
\Omega_{DM} &= x^2, & \Omega_b &= y^2, \\
\Omega_r &= z^2, & \Omega_{DE} &= w^2.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

La evolución de los parámetros de densidad en el modelo Λ CDM se muestra en la Figura 5.1. En ésta, claramente se puede observar la época en donde la componente principal del Universo temprano es la radiación, seguida por el proceso de desacoplamiento que conlleva a la época donde la materia es dominante. Por otra parte, la constante cosmológica es quien determina la dinámica en el Universo tardío.

Para analizar la estabilidad de este modelo, se considerarán perturbaciones alrededor de los puntos de equilibrio del sistema (5.4) en la forma $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_c + \delta\mathbf{x}$,

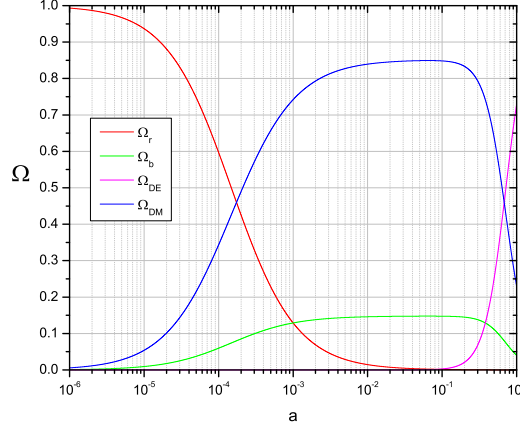


Figura 5.1: Evolución en los parámetros de densidad, para un Universo formado por energía oscura Ω_{DE} , materia oscura Ω_{DM} , bariones Ω_b y radiación Ω_r .

tomando en cuenta siempre la validez de la constricción de Friedmann

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1.$$

Los puntos de equilibrio encontrados para este sistema son:

- Dominación de Materia Oscura $\{\pm 1, 0, 0, 0\}$.
- Dominación de Bariones $\{0, \pm 1, 0, 0\}$.
- Dominación de Radiación $\{0, 0, \pm 1, 0\}$.
- Dominación de Energía Oscura $\{0, 0, 0, \pm 1\}$
- Dominación de Materia Oscura y Bariones $\{\pm \sqrt{1 - y^2}, y, 0, 0\}$.

El sistema dinámico (5.4) ya linearizado se reescribe en la forma

$$\delta \mathbf{x}' = \mathcal{M} \delta \mathbf{x},$$

donde se encuentra que

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(\Pi - 1) + 3x^2 & 4xz & 0 \\ 3xz & \frac{3}{2}(\Pi - \frac{4}{3}) + 3z^2 & 0 \\ 3xw & 4wz & 3\Pi. \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores de \mathcal{M} evaluados en los puntos de equilibrio de (5.4) proporcionan la información sobre la estabilidad del sistema.

El único punto de equilibrio que muestra estabilidad en un subespacio invariante, como era de esperarse, es el $\{0, 0, 0, \pm 1\}$ dominante por la constante cosmológica, cuyos eigenvalores están dados por $\{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\}$. Por tanto, la energía oscura, como constante cosmológica, determinará la dinámica en el futuro del Universo imponiéndose sobre las demás componentes, Figura 5.2.

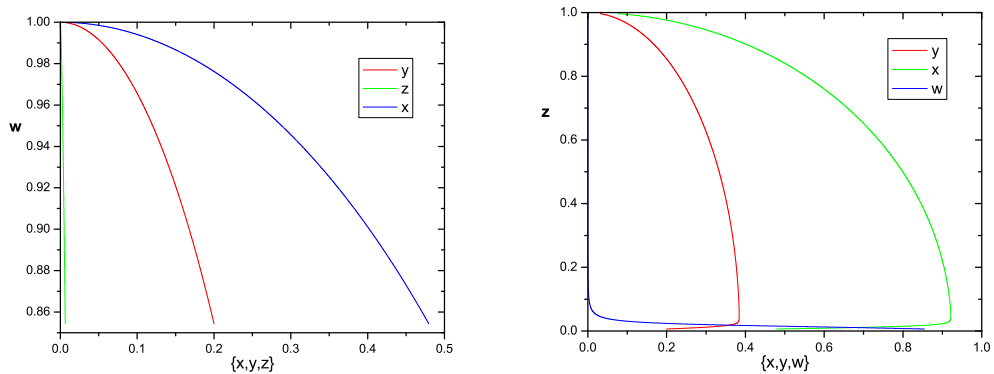


Figura 5.2: Para tres condiciones iniciales distintas. Todas tienden hacia el punto de equilibrio $\{0, 0, 0, 1\}$ (izquierda). Todas tienden a alejarse del punto de equilibrio $\{0, 0, 1, 0\}$ (derecha).

Por otra parte se encuentra que existe un punto de equilibrio inestable en el futuro dado por $\{0, 0, \pm 1, 0\}$, este punto se puede interpretar como una estabilidad proveniente del pasado, esto es, la radiación era dominante sobre las demás componentes en un Universo temprano, la inestabilidad de este punto se puede observar claramente en el conjunto de eigenvalores dados por $\{4, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, Figura 5.2.

Ambas épocas del Universo se pueden distinguir claramente en la evolución de los parámetros de densidad, mostrados en la Figura 5.1.

Campos acoplados con materia

Como se mencionó en un principio, una de las principales características de la teoría de supercuerdas a bajas energías son los campos escalares dilatón y axión. Comenzaremos con un lagrangiano efectivo de teoría de supercuerdas a bajas energías [24].

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R - \mathcal{L}_\phi - e^{\alpha_\psi \phi} \mathcal{L}_\psi - e^{\alpha_\gamma \phi} \mathcal{L}_\gamma) , \quad (6.1)$$

donde las α 's son las constantes de acoplamiento del dilatón ϕ con el axión ψ y otros campos de materia.

Asumiendo que la parte de la materia $\mathcal{L}_\gamma = \rho_\gamma$ son fluidos perfectos, donde γ representa a la radiación (r), bariones (b) y constante cosmológica (Λ), de esta manera se describe a la radiación y materia bariónica con una ecuación de estado dada por $\dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0$ y $\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0$, además para modelar la energía oscura se puede tomar la forma más general supuesta que es un fluido perfecto con la ecuación de estado dada por $\dot{\rho} + 3\gamma_\Lambda H\rho_\Lambda$, donde ρ_Λ es menor que $1/3$ y puede ser negativa en el caso que represente la energía fantasma. Por simplicidad para estos modelos se enfocará en $\gamma_\Lambda = 0$ que representa la constante cosmológica, $\rho_\Lambda = \text{constante}$.

Los lagrangianos expresados de manera individual para los campos dilatón, axión y fluidos perfectos son respectivamente,

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V_\phi , \quad \mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2} \partial^\sigma \psi \partial_\sigma \psi + V_\psi , \quad \mathcal{L}_\gamma = \rho_\gamma . \quad (6.2)$$

Por otra parte, las ecuaciones de campo para estos campos escalares, homogéneos en el espacio, ϕ y ψ , se obtienen haciendo la variación de la densidad Lagrangiana (6.2)

$$\square\phi - \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} = \alpha_\psi e^{\alpha_\psi\phi} \mathcal{L}_\psi + \alpha_\gamma e^{\alpha_\gamma\phi} \mathcal{L}_\gamma, \quad \square\psi - \frac{\partial V_\psi}{\partial\psi} = -\alpha_\psi \partial^\mu \phi \partial_\mu \psi, \quad (6.3)$$

donde $\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$ es el operador d'Alambertiano. Notese que las correspondientes ecuaciones de Klein-Gordon no son homogéneas como en el caso estándar (4.24), sin embargo, la parte derecha de las ecuaciones son proporcionales a los coeficientes de acoplamiento, esto es, en el límite cuando no esté presente el acoplamiento campo-materia se recuperará el caso estándar.

Notando que la conservación del tensor de energía-momento, como en el caso estándar, no es válida para los campos de manera individual, esto se puede observar a partir de (4.16) que

$$\begin{aligned} T_{(\phi);\nu}^{\mu\nu} &= \dot{\phi}^{\mu\nu} \left[\square\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right] \neq 0 \\ &= \dot{\phi} \left[\square\phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sustituyendo la relación de (6.3) en (6.4), se obtiene que

$$\begin{aligned} T_{(\phi);\nu}^{\mu\nu} &= \dot{\phi} \sum \alpha_i e^{\alpha_i\phi} \mathcal{L}_i \\ &= \dot{\phi} \alpha_\psi e^{\alpha_\psi\phi} \mathcal{L}_\psi + \dot{\phi} \alpha_\gamma e^{\alpha_\gamma\phi} \mathcal{L}_\gamma \\ &= \partial^\mu (e^{\alpha_\psi\phi}) \mathcal{L}_\psi + \partial (e^{\alpha_\gamma\phi}) \mathcal{L}_\gamma, \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde $i = \psi$ y γ , considerando las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales en este caso estan dadas por

$$G^{\mu\nu} = \kappa^2 \left[T_{(\phi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\psi\phi} T_{(\psi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\gamma\phi} T_{(\gamma)}^{\mu\nu} \right]. \quad (6.6)$$

Tomando en cuenta que cada tensor de energía-momento del lado derecho de las ecuaciones tiene la forma estándar que los correspondientes campos de materia, las identidades de Bianchi $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que aún son validas, escritas en términos de $T^{\mu\nu}$ son

$$T_{(\phi);\nu}^{\mu\nu} + \left[e^{\alpha_\psi\phi} T_{(\psi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\gamma\phi} T_{(\gamma)}^{\mu\nu} \right]_{;\nu} = 0, \quad (6.7)$$

sustituyendo el valor de $T_{(\phi)}^{\mu\nu}$ en (6.5), tenemos

$$\partial^\mu(e^{\alpha_\psi\phi})\mathcal{L}_\psi + \partial^\mu(e^{\alpha_\gamma\phi})\mathcal{L}_\gamma = \left[e^{\alpha_\psi\phi}T_{(\psi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\gamma\phi}T_{(\gamma)}^{\mu\nu} \right]_{;\nu} \quad (6.8)$$

donde se hará la siguiente suposición

$$(e^{\alpha_\psi\phi}T_{(\psi)}^{\mu\nu})_{;\nu} = -\partial^\mu(e^{\alpha_\psi\phi})\mathcal{L}_\psi \quad (e^{\alpha_\gamma\phi}T_{(\gamma)}^{\mu\nu})_{;\nu} = -\partial^\mu(e^{\alpha_\gamma\phi})\mathcal{L}_\gamma. \quad (6.9)$$

Las relaciones (6.5) y (6.9) implican la conservación del tensor de energía momento total $T_{(T)}^{\mu\nu}$ dado por

$$T_{(T)}^{\mu\nu} = T_{(\phi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\psi\phi}T_{(\psi)}^{\mu\nu} + e^{\alpha_\gamma\phi}T_{(\gamma)}^{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Para un Universo homogéneo e isotrópico, el cual también se asume plano, esto es, un Universo tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, las ecuaciones de Einstein están dadas por

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 e^{\alpha_\psi\phi} + \rho_\gamma e^{\alpha_\gamma\phi} + V_\phi + V_\psi e^{\alpha_\psi\phi} \right), \\ \dot{H} &= -\frac{\kappa^2}{2} \left(\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 e^{\alpha_\psi\phi} + \gamma\rho_\gamma e^{\alpha_\gamma\phi} \right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

además las ecuaciones de evolución para los campos y la materia son

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} &= \alpha_\psi e^{\alpha_\psi\phi} \left(\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - V_\psi \right) - \alpha_\gamma e^{\alpha_\gamma\phi} \rho_\gamma, \\ \ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + \frac{\partial V_\psi}{\partial\psi} &= -\alpha_\psi \dot{\phi}\dot{\psi}, \\ \dot{\rho}_\gamma + 3H\gamma\rho_\gamma &= 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

Las expresiones (6.11) y (6.12) describen la evolución de este Universo junto con la dinámica de sus componentes. Para analizar el comportamiento de esta cosmología se utilizarán nuevas variables definidas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{\dot{\phi}}{H}, \quad A = \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{\dot{\psi}}{H} e^{\frac{1}{2}\alpha_\psi\phi}, \\ y &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_b}}{H} e^{\frac{1}{2}\alpha_\gamma\phi}, \quad z = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_r}}{H} e^{\frac{1}{2}\alpha_\gamma\phi}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{V_\phi}}{H}, & w &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{V_\psi}}{H} e^{\frac{1}{2}\alpha_\psi\phi}, \\
U &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{1}{H^2} \frac{dV_\phi}{d\phi}, & W &= \frac{\kappa}{\sqrt{6}} \frac{1}{H^2} \frac{dV_\psi}{d\psi} e^{\frac{1}{2}\alpha_\psi\phi}, \\
l &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\rho_\Lambda}}{H}.
\end{aligned}$$

En lo que resta del trabajo, cualquier cantidad multiplicada por $\sqrt{\frac{3}{2}}$ se denotará por una tilde, por ejemplo $\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$. Mediante estas nuevas variables, el conjunto de ecuaciones (6.12) con las nuevas definiciones (6.13) se transforma en

$$\begin{aligned}
x' &= -3x - U - \tilde{\alpha}_\psi(w^2 - A^2) - \tilde{\alpha}_\gamma(y^2 + z^2) + \Pi x & (6.14) \\
A' &= -3A - W - \tilde{\alpha}_\psi x A + \Pi A \\
y' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)y \\
z' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)z \\
u' &= \frac{x}{u}U + \Pi u \\
w' &= \frac{WA}{w} + \tilde{\alpha}_\psi wx + \Pi w \\
l' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_\Lambda\right)l
\end{aligned}$$

donde la prima significa derivada respecto a $N = \ln(a)$, y la cantidad Π se definió como

$$\Pi \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(2x^2 + 2A^2 + \gamma_b y^2 + \gamma_r z^2), \quad (6.15)$$

mientras que la ecuación de Friedmann (6.11) se convierte en una restricción de las variables tales que

$$x^2 + A^2 + y^2 + z^2 + u^2 + w^2 + l^2 = 1. \quad (6.16)$$

Los parámetros de densidad (3.7) se pueden reescribir usando las variables definidas en (6.13) para obtener

$$\begin{aligned}
\Omega_{DM} &= x^2 + u^2, & \Omega_{DE} &= l^2, \\
\Omega_b &= y^2, & \Omega_r &= z^2 \\
\Omega_A &= 1 - x^2 - u^2 - y^2 - z^2 - l^2, & & (6.17)
\end{aligned}$$

donde $\Omega_{DM}, \Omega_{DE}, \Omega_b, \Omega_r$ y Ω_A son los parámetros de densidad respectivamente para la materia oscura (campo dilatón), energía oscura (constante cosmológica), bariones, radiación y campo axi3n, donde para este 3ltimo se ha usado la constricci3n (6.17). El sistema de ecuaciones (6.14) es ahora un sistema dinámico aut3nomo. El an3lisis completo sobre la estabilidad de este sistema ser3 dado a continuaci3n.

6.1. Puntos de equilibrio y estabilidad

El sistema dinámico (6.14) es de la forma $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ donde $\mathbf{x} \equiv \{x, A, y, z, u, w, l\}$ y $\mathbf{f} \equiv \{f_x, f_A, f_y, f_z, f_u, f_w, f_l\}$ representa, respectivamente, las diferentes funciones del lado derecho de las ecuaciones (6.14). Los puntos de equilibrio \mathbf{x}_c son soluciones de las ecuaciones $\mathbf{f}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{0}$ y la estabilidad alrededor de estos puntos se determina tomando peque3nas perturbaciones $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \delta\mathbf{x}$, as3 las ecuaciones de movimiento se transforman en, a primer orden,

$$\begin{aligned}
\delta x' &= U - U(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) + \delta x(\Pi - 3 + 6x^2) + \delta A(2\tilde{\alpha}_\psi A + 6Ax) + \delta y(3x\gamma_b y - 2\tilde{\alpha}_\gamma), \\
&+ \delta z(3x\gamma_r z - 2\tilde{\alpha}_\gamma z) + \delta w(-2\tilde{\alpha}_\psi w), \\
\delta A' &= W - W(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) + \delta x(-\tilde{\alpha}_\psi A + 6Ax) + \delta A(-3 - \tilde{\alpha}_\psi x + \Pi + 6A^2) \\
&+ \delta y(3\gamma_b y A) + \delta z(3\gamma_r z A), \\
\delta y' &= \delta x(6xy + \tilde{\alpha}_\gamma y) + \delta A(6Ay) + \delta y(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_b y^2) + \delta z(3\gamma_b zy), \\
\delta z' &= \delta x(6xz + \tilde{\alpha}_\gamma z) + \delta A(6Az) + \delta z(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_b z^2) + \delta y(3\gamma_r yz), \\
\delta u' &= \left[\frac{U}{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \frac{U}{u} \right] x + \frac{U}{u}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\delta x + \delta x(6xu) + \delta A(6uA), \\
&+ \delta y(3\gamma_b uy) + \delta z(3\gamma_r zu) + \delta u(\Pi), \\
\delta w' &= \left[\frac{W}{w}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \frac{W}{w} \right] A + \frac{W}{w}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})\delta A + \delta x(\tilde{\alpha}_\psi w + 6wx) + \delta A(6wA), \\
&+ \delta y(3\gamma_b wy) + \delta w(\tilde{\alpha}_\gamma x + \Pi) + \delta z(3\gamma_r zw), \\
\delta l' &= \delta x(6xl) + \delta A(6Al) + \delta y(3\gamma_b ly) + \delta l(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_L) + \delta z(3\gamma_r lz).
\end{aligned}$$

Una vez que se hayan especificado los potenciales V_ϕ y V_ψ se pueden agrupar los t3rminos semejantes y de esta manera transformar el conjunto de ecuaciones para $\delta\mathbf{x}'$ en una sola relaci3n que tenga la siguiente forma

$$\delta\mathbf{x}' = \mathcal{M}\delta\mathbf{x}, \quad (6.18)$$

donde la matriz de estabilidad tiene componentes dados por

$$\mathcal{M}_{ij} \equiv \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_c}. \quad (6.19)$$

La estabilidad cerca de cada punto de equilibrio se determina por los eigenvalores w de la matriz de estabilidad \mathcal{M}_{ij} , si $\mathcal{R}e(w) < 0$ el punto de equilibrio se llama *estable*, mientras que el punto de equilibrio se llama inestable si $\mathcal{R}e(w) > 0$. Claramente, estamos interesados en conocer los puntos estables, debido a que estos son soluciones atractoras del sistema dinámico y representan el estado asintótico de las variables cosmológicas originales.

7.1. Campos moduli

Comenzaremos con un potencial efectivo recientemente derivado de la teoría de supergravedad tipo IIB [25]. Después de hacer una serie de definiciones en las variables [26], el potencial efectivo del dilaton V_{dil} se transforma en

$$\begin{aligned} V_{dil} &= V_0 (\cosh(\lambda\sqrt{\kappa}\phi) - 1) + \frac{1}{2}V_0 e^{\lambda\sqrt{\kappa}\phi}\psi_0^2\kappa\psi^2 \\ &= V_\phi + e^{\lambda\sqrt{\kappa}\phi}V_\psi. \end{aligned} \quad (7.1)$$

En algunos trabajos el potencial de los campos escalares (7.1) se sugiere como energía oscura del universo, esto significa, un campo tipo Quintessence [8], aquí no se sigue esta misma interpretación para V_{dil} . En lugar de esto, se considera el termino $V_0(\cosh(\lambda\kappa\phi) - 1)$ como la materia oscura del universo. El término restante en V_{dil} contiene la contribución del campo axión ψ , esto es lo que hace la diferencia entre este trabajo y otros. Esta interpretación permite comparar la cosmología derivada del potencial V_{dil} con el modelo Λ CDM. El resto de los campos provenientes de la teoría de supercuerdas se pueden modelar como usualmente se hace.

Como se mencionó en el Capitulo 6, el lagrangiano efectivo proveniente de la teoría de supercuerdas a bajas energías está dado por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R - \mathcal{L}_\phi - e^{\alpha_\psi\phi}\mathcal{L}_\psi - e^{\alpha_\gamma\phi}\mathcal{L}_\gamma) , \quad (7.2)$$

mientras que los lagrangianos individuales para los campos dilatón y axión son, respectivamente

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi + V_\phi, \quad \mathcal{L}_\psi = \frac{1}{2}\partial^\sigma\psi\partial_\sigma\psi + V_\psi, \quad \mathcal{L}_\gamma = \rho_\gamma, \quad (7.3)$$

en este caso particular, se definen las siguientes variables correspondientes a los potenciales $V_\phi = 2V_0 \sinh^2(1/2\kappa\lambda\phi)$, $V_\xi = 2V_0 \cosh^2(1/2\kappa\lambda\phi)$ y $V_\psi = \frac{1}{2}V_0\kappa^2\psi_0^2\psi^2$ de tal manera que $V = V_\phi + V_\psi e^{\alpha_\psi\phi}$ es el potencial del campo escalar total.

Debido a la presencia del sinh en el potencial V_ϕ , es conveniente introducir una nueva variable dinámica para construir un sistema autónomo

$$v = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{V_\xi}}{H}. \quad (7.4)$$

Con estas definiciones, las ecuaciones de campo (6.11) y (6.12) para la densidad Lagrangiana con el potencial total V se transforman en

$$\begin{aligned} x' &= -3x - \tilde{\lambda}uv - \tilde{\alpha}_\psi(w^2 - A^2) - \tilde{\alpha}_\gamma(y^2 + z^2) + \Pi x \\ A' &= -3A - Bwl - \tilde{\alpha}_\psi xA + \Pi A \\ y' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)y \\ z' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)z \\ u' &= \tilde{\lambda}vx + \Pi u \\ v' &= \tilde{\lambda}ux + \Pi v \\ w' &= BA l + \tilde{\alpha}_\psi wx + \Pi w \\ l' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_\Lambda\right)l. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Sin embargo de la definición de los potenciales se observa que las variables u y v no son del todo independientes, si no que se encuentran restringidas por

$$v^2 - u^2 = \frac{2\kappa^2 V_0}{3H^2} = \frac{1}{\lambda^2} \frac{m^2}{H^2}, \quad (7.6)$$

donde m es la masa del campo escalar. Una consecuencia de (7.6) implica que para un valor diferente de cero para la masa del campo escalar u y v no pueden tomar, simultáneamente, los mismos valores. Esta restricción es lo que hace al sistema autónomo (7.5) diferente de los potenciales tipo exponencial [23].

En (7.5) se definió $B = \sqrt{\frac{2V_0}{\rho_L}}\tilde{\psi}_0$, mientras que la constricción de Friedmann (6.11) queda como

$$x^2 + A^2 + y^2 + z^2 + u^2 + w^2 + l^2 = 1, \quad (7.7)$$

y el valor de Π está dado por

$$\Pi \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(2x^2 + 2A^2 + \gamma_b y^2 + \gamma_r z^2). \quad (7.8)$$

Las ecuaciones (7.5) ahora son un sistema dinámico, el análisis sobre la estabilidad de este sistema se dará a continuación, por ahora se tratará la evolución de los parámetros de densidad (6.17) que se muestran en la Figura 7.1, donde se observa que el comportamiento de estos es muy similar a los correspondientes del modelo Λ CDM, Figura 5.1, para corrimientos al rojo menores de 10^2 los cuales parecen tener un comportamiento genérico. Los parámetros libres $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\alpha}_\gamma$, $\tilde{\alpha}_\psi$ se fijan usando las observaciones actuales y están dados en cada figura.

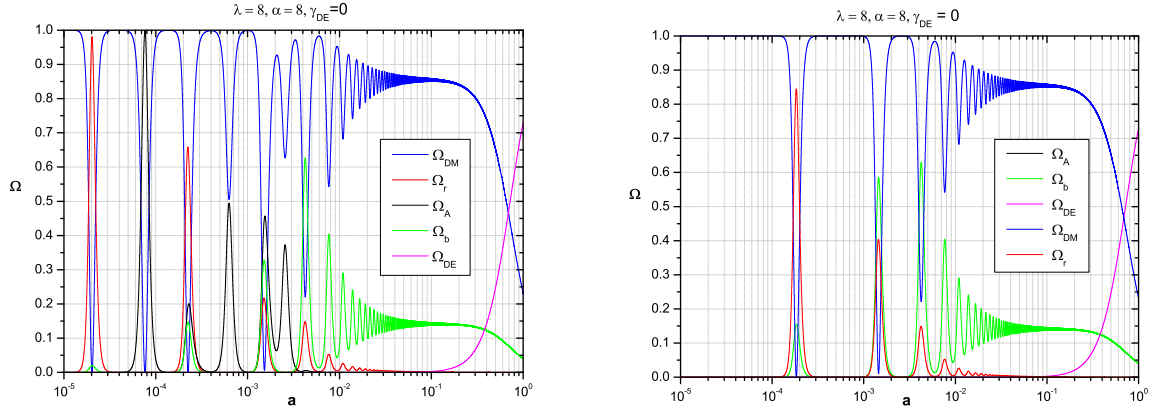


Figura 7.1: Se observa como esta teoría predice un comportamiento similar al modelo de Λ CDM. Las condiciones iniciales de las variables dinámicas en $a=1$ son: $x = 0$, $A = 0$, $u = \sqrt{0,23}$, $v = 1000$, $\Omega_{DE} = 0,7299$, $\Omega_b = 0,04$, $\Omega_r = 4 \times 10^{-5}$ y w se determina por la consticción de Friedmann. Los valores para las constantes son $B = 5000$, $\tilde{\lambda} = 7$ (izquierda) y $\tilde{\lambda} = 0$ (derecha). En todas la figuras, la integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badsforth-Moulton, cada curva contiene alrededor de 8×10^5 puntos (Apéndice A).

Existe un hecho que se puede distinguir facilmente en la Figura 7.1, en esta se observa que en el comportamiento de las densidades del Universo temprano después de corrimientos al rojo $\sim 10^3$, la radiación no domina sobre el resto de las densidades como se requiere para big bang nucleosíntesis, como lo muestra Λ CDM, Figura 5.1. Este hecho puede ser interpretado como sigue. En un Universo dominado por radiación se puede hacer $x = l = y = u = v = w = A = 0$, en este caso se verifica por inspección de (7.5) que se llega a una contradicción

en las ecuaciones y por tanto no hay forma de que la radiación sea una componente dominante del sistema.

Sin embargo la situación cambia radicalmente si se hace $\tilde{\alpha}_\psi = 0$ en el sistema (7.5), en este caso la radiación, en algún lugar no tiene problemas de ser dominante. Para mostrar de que manera afecta la interacción del dilatón con la materia y el axión, se estudiará el caso particular $\tilde{\alpha}_\psi = 0$ y se eliminará de manera artificial la interacción de la materia con el dilatón en la ecuación (6.12). Esto es, se estudiará un modelo de juguete.

Para esto es conveniente cambiar la variable w por $w = V_3$, con la definición de los potenciales $V_1 = \sqrt{V_\phi}$, $V_2 = \sqrt{V_\xi}$ y $V_3 = \kappa\psi_0\psi$ tal que $V = V_1^2 + 1/4(V_1 + V_2)^2V_3^2$. Entonces las ecuaciones (6.11) y (6.12) se transforman en un nuevo sistema dado por

$$\begin{aligned} x' &= -3x - \tilde{\lambda}uv - \frac{\tilde{\alpha}_\psi}{4}(u+v)^2w^2 + \Pi x, \\ A' &= -3A - \tilde{\psi}_0\frac{1}{2}(u+v)^2w + \Pi A, \\ y' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)y, \\ z' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)z, \\ u' &= \tilde{\lambda}vx + \Pi u, \\ v' &= \tilde{\lambda}ux + \Pi v, \\ l' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_L\right)l. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Los parámetros de densidad se mantienen iguales que en (6.17) mientras que la cantidad Π ahora queda definida como

$$\Pi = \frac{3}{2}(2x^2 + 2A^2 + \gamma_b y^2 + \gamma_r z^2 + \gamma_L l^2 - \frac{2}{3}\tilde{\lambda}(y^2 + z^2)x), \tag{7.10}$$

y la nueva restricción de Friedmann (6.11) se lee

$$x^2 + A^2 + y^2 + z^2 + u^2 + l^2 + \frac{1}{4}(u+v)^2w^2 = 1. \tag{7.11}$$

Las ecuaciones (7.9) ahora son un nuevo sistema dinámico. La evolución de este se muestra en la Figura 7.2.

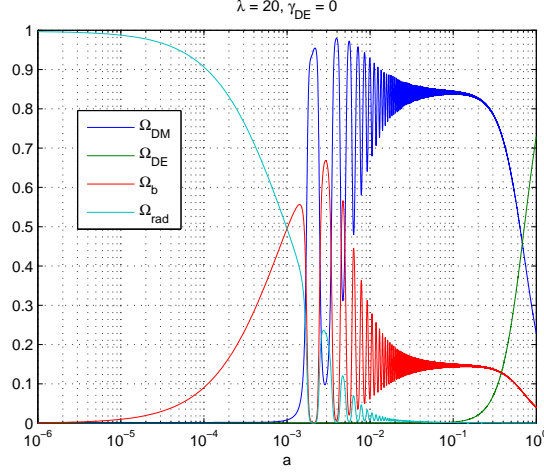


Figura 7.2: Se observa como esta teoría predice un comportamiento similar al Universo con el modelo Λ CDM, aún para corrimientos al rojo superiores a 10^3 , dominando la radiación como lo requiere big bang nucleosíntesis. Los parámetros libres están dados por $\tilde{\alpha}_\gamma = 20, \tilde{\alpha}_\psi = 0$. La integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badsforth-Moulton con alrededor de 8×10^5 puntos por cada curva.

Aquí se notar observar como ahora la radiación domina en el Universo temprano sin ningún problema y que el comportamiento de las densidades es de nuevo muy similar al modelo Λ CDM, Figura 5.1, pero ahora para todos los corrimientos al rojo. La única diferencia es a z 's tales que $10^2 < z < 10^3$, donde las densidades oscilan fuertemente, desafortunadamente este tiempo corresponde a la edad oscura, cuando el Universo no tenía estrellas y no había nada que observar, lo cual nos podría dar alguna pista observacional para este comportamiento.

Finalmente, si se hacen ambas constantes de acoplamiento cero, $\tilde{\alpha}_\psi, \tilde{\alpha}_\gamma$ recobramos un comportamiento muy similar a las densidades del modelo Λ CDM, este comportamiento se muestra en la Figura 7.2. De aquí se observa que las densidades no tienen más oscilaciones, como en Λ CDM, soportando la idea de que solo el acoplamiento entre el dilatón, axión y la materia son los causantes de la dificultad que surge en la teoría de cuerdas para reproducir el Universo observado.

Para analizar la estabilidad del sistema dinámico (7.5) se hacen perturbaciones alrededor de los puntos de equilibrio \mathbf{x}_c como se ya se ha hecho anteriormente. Utilizando los potenciales V_ϕ, V_ξ y V_ψ se calculan las cantidades implicadas en (6.18) para poder reescribir la linealización del sistema en la forma

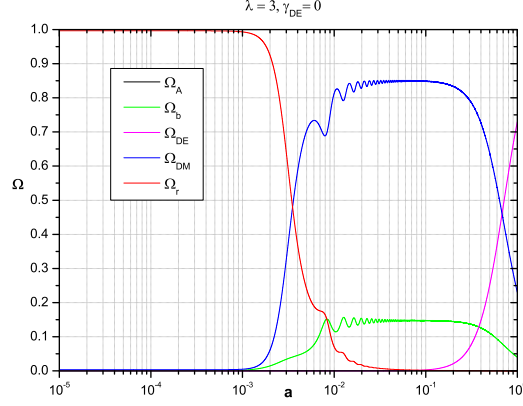


Figura 7.3: Se observa como este caso particular tiene un comportamiento extremadamente similar al de Λ CDM para todos los corrimientos al rojo. Aquí todas las constantes de acoplamiento del modelo son nulas, $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$. La integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badforth-Moulton con alrededor de 5×10^5 puntos por cada curva.

$$\delta \mathbf{x}' = \mathcal{M} \delta \mathbf{x}, \quad (7.12)$$

donde $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} -3 + \Pi + 6x^2 & 2\tilde{\alpha}_\psi A + 6Ax & -2\tilde{\alpha}_\gamma y + 3\gamma_b yx & -2\tilde{\alpha}_\gamma z + 3\gamma_r zx & -2\tilde{\lambda}v & -2\tilde{\lambda}u & -2\tilde{\alpha}_\psi w & 0 \\ -\tilde{\alpha}_\psi A + 6xA & -3 - \tilde{\alpha}_\psi x + \Pi + 6A^2 & 3\gamma_b yA & 3\gamma_r zA & 0 & 0 & -Bl & -Bw \\ 6xy + \tilde{\alpha}_\gamma y & 6Ay & \Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_b y^2 & 3\gamma_r zy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6xz + \tilde{\alpha}_\gamma z & 6Az & 3\gamma_b yz & \Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_r z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6xu + \tilde{\lambda}v & 6Au & 3\gamma_b yu & 3\gamma_r zu & \Pi & \tilde{\lambda}x & 0 & 0 \\ 6xv + \tilde{\lambda}u & 6Av & 3\gamma_b yv & 3\gamma_r zv & \tilde{\lambda}x & \Pi & 0 & 0 \\ \tilde{\alpha}_\psi w + 6xw & 6Aw + Bl & 3\gamma_b yw & 3\gamma_r zw & 0 & 0 & \tilde{\alpha}_\psi x + \Pi & BA \\ 6xl & 6Al & 3\gamma_b yl & 3\gamma_r zl & 0 & 0 & 0 & \Pi \end{bmatrix}$$

Calculando los conjuntos de eigenvalores correspondientes a la matriz de estabilidad \mathcal{M} , y evaluando cada uno de ellos en los puntos equilibrio encontrados al resolver $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ para el sistema dinámico (6.18). De aquí encontramos que existen dos puntos de equilibrio estables bajo pequeñas perturbaciones, estos son

- Dominación de la constante cosmológica y el potencial del dilatón
 $\{0, 0, 0, 0, u, 0, 0, \pm\sqrt{1-u^2}\}$,
- Dominación de la constante cosmológica
 $\{0, 0, 0, 0, 0, v, 0, 1\}$

sin olvidar que ambos satisfacen la ecuación de Friedmann (6.11), y además la constricción (7.6), con sus respectivos eigenvalores dados por

$$\begin{aligned} & -2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b^2}{9}} \right), -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}v^2\tilde{\lambda}^2} \right) \\ & -2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2u^2}{3}} \right), -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}B^2(u^2 - 1)} \right) \end{aligned}$$

Debido a que el conjunto de puntos críticos, no son puntos aislados, sino variedades pertenecientes al espacio fase $\{x, A, y, z, u, v, w, l\}$ no es trivial explicar el comportamiento asintótico del sistema, este análisis detallado se realizará en un trabajo posterior. Sin embargo podemos esbozar de manera cualitativa el resultado obtenido. Para el primer conjunto de eigenvalores, como ya se esperaba, existe una solución tipo atractor cuando $B^2 < \frac{9}{4}$ y $v < \frac{3}{2\tilde{\lambda}^2}$ dominada por la constante cosmológica. Mientras que para el segundo conjunto de eigenvalores podemos notar que el sistema presenta un atractor cuando $u^2 < \frac{3}{2}$ y $B^2 < \frac{9}{4(u^2-1)}$, este comportamiento es debido a la presencia del potencial del dilatón en conjunto con la constante cosmológica, una constante cosmológica corresponde también a un caso extremo de un fluido perfecto con una ecuación de estado $\gamma = 0$.

En ambos conjuntos de eigenvalores las componentes dominantes se pueden ver como una constante cosmológica, dinámica como en el segundo caso, que dominará sobre la evolución del Universo futuro.

7.2. Potenciales tipo e^ϕ y ψ^2

Se considera el caso donde la expresión para el potencial del campo dilatónico está dado por una exponencial, el potencial característico para las teorías Quintessence, mientras que para el axión lo guía un potencial tipo cuadrático.

Esto es

$$V_\phi = V_0 e^{a\kappa\phi}, \quad V_\psi = b^2 \kappa^2 \psi^2 \quad (7.13)$$

Calculando las expresiones correspondientes para U y W y sustituyendo ambos en el sistema (6.14) se encuentra que

$$\begin{aligned}
x' &= -3x - \tilde{a}u^2 - \tilde{\alpha}_\psi(w^2 - A^2) - \tilde{\alpha}_\gamma(y^2 + z^2) + \Pi x, \\
A' &= -3A - Blw - \tilde{\alpha}_\psi xA + \Pi A, \\
y' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)y, \\
z' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)z, \\
u' &= \tilde{a}xu + \Pi u, \\
w' &= BA l + \tilde{\alpha}_\psi wx + \Pi w, \\
l' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_\Lambda\right)l,
\end{aligned} \tag{7.14}$$

donde la constricción de Friedmann (7.7) aún se satisface y el valor de Π es el mismo que en (7.8), además se ha hecho la definición, $B \equiv \sqrt{\frac{6}{\rho_L}} b$.

Cuando se resuelve el sistema dinámico (7.14) de manera numérica, se encuentra que la evolución en los parámetros de densidad es como se muestra a continuación.

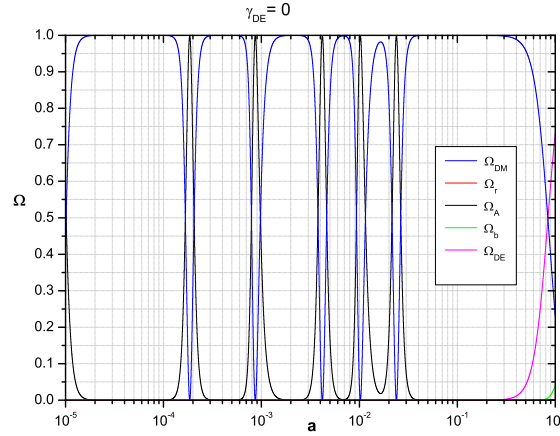


Figura 7.4: Se observa como esta teoría no predice, para ninguna época, un comportamiento esperado por el modelo de Λ CDM. Las condiciones iniciales de las variables dinámicas para $a=1$ son: $x = 0$, $A = 0$, $u = \sqrt{0,23}$, $\Omega_{DE} = 0,7299$, $\Omega_b = 0,04$, $\Omega_r = 4 \times 10^{-5}$ y w se determina por la consticción de Friedmann. Los valores para las constantes son $B = 50$, $\tilde{\alpha}_\psi = 2$, $\tilde{\alpha}_\gamma = 8$ y $\tilde{a} = 4$. En todas la figuras, la integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badsforth-Moulton. Cada curva contiene alrededor de 5×10^5 puntos.

Si se considera el caso particular cuando el límite de las constantes de acoplamiento se anulan, se observa que en este caso no se reproduce la evolu-

ción en los parámetros de densidad como se esperaría para el universo observado, como en el modelo Λ CDM, Figura 7.5.

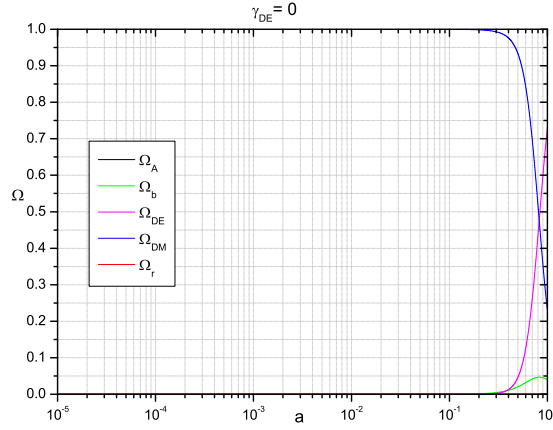


Figura 7.5: Se observa como este modelo no predice las observaciones incluso en el caso particular donde todas las constantes de acoplamiento del modelo son nulas, $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$. La integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badforth-Moulton con alrededor de 5×10^5 puntos por cada curva.

Para analizar la estabilidad de este sistema, como ya se ha hecho anteriormente se consideran pequeñas perturbaciones alrededor de los puntos de equilibrio \mathbf{x}_c , de tal manera que se obtenga un sistema de la forma

$$\delta \mathbf{x}' = \mathcal{M} \delta \mathbf{x},$$

donde $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} -3 + \Pi + 6x^2 & 2\tilde{\alpha}_\psi A + 6Ax & -2\tilde{\alpha}_\gamma y + 3\gamma_b y x & -2\tilde{\alpha}_\gamma z + 3\gamma_r z x & -2\tilde{a}u & -2\tilde{\alpha}_\psi w & 0 \\ -\tilde{\alpha}_\psi A + 6xA & -3 - \tilde{\alpha}_\psi x + \Pi + 6A^2 & 3\gamma_b y A & 3\gamma_r z A & 0 & -Bl & -Bw \\ 6xy + \tilde{\alpha}_\gamma y & 6Ay & \Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_b y^2 & 3\gamma_r z y & 0 & 0 & 0 \\ 6xz + \tilde{\alpha}_\gamma z & 6Az & 3\gamma_b y z & \Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x + 3\gamma_r z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6xu + \tilde{a}u & 6Au & 3\gamma_b y u & 3\gamma_r z u & \Pi + \tilde{a}x & 0 & 0 \\ \tilde{\alpha}_\psi w + 6xw & 6Aw + Bl & 3\gamma_b y w & 3\gamma_r z w & 0 & \tilde{\alpha}_\psi x + \Pi & BA \\ 6xl & 6Al & 3\gamma_b y l & 3\gamma_r z l & 0 & 0 & \Pi \end{bmatrix}$$

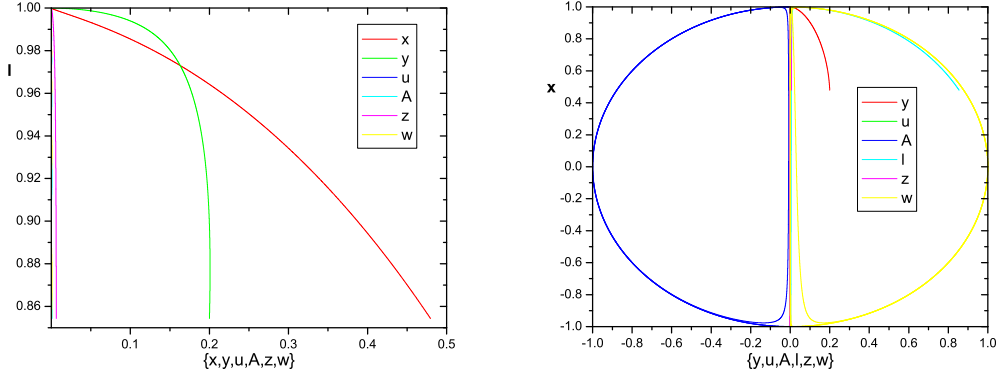


Figura 7.6: Se observan los puntos atractores correspondientes a $\{0,0,0,0,0,0,1\}$ dominación de la constante cosmológica en el Universo tardío (izquierda), también el punto $\{1,0,0,0,0,0,0\}$ proveniente de la parte cinética del potencial dominado en el Universo temprano (derecha).

Los puntos de equilibrio correspondientes al sistema dinámico (7.14) que satisfacen la condición (7.7) se muestran en la siguiente lista

- $\left\{ -\frac{\tilde{\alpha}_\psi}{3}, 0, 0, 0, 0, \pm\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}_\psi^2}{9}}, 0 \right\}$
- $\left\{ -\frac{3}{2\tilde{\alpha}_\psi}, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{9}{4\tilde{\alpha}_\psi^2}}, 0, 0, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$
- $\left\{ \tilde{\alpha}_\gamma, 0, 0, \pm\sqrt{1 - \tilde{\alpha}_\gamma}, 0, 0, 0 \right\}$
- $\left\{ -\frac{2}{\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma}, 0, 0, \pm\frac{\sqrt{\tilde{\alpha}_\psi^2 - \tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi - 6}}{\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma}, 0, \pm\frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}_\psi^2 - 2\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi + 4}}{\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0 \right\}$
- $\left\{ -\frac{1}{\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma}, \pm\frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}_\psi^2 + 2\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi - 2}}{\sqrt{2}(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, \pm\sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_\psi}{\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{\alpha}_\gamma}}, 0, 0, 0 \right\}$
- $\left\{ \frac{2\tilde{\alpha}_\psi}{3}, 0, \pm\sqrt{1 - \frac{4\tilde{\alpha}_\psi^2}{9}}, 0, 0, 0, 0 \right\}$
- $\left\{ \frac{3}{2(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, \frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}_\psi^2 - 2\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi - 9}}{2(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, 0, \pm\frac{\sqrt{4\tilde{\alpha}_\psi^2 - 4\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi + 9}}{2(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0 \right\}$
- $\left\{ \frac{3}{2(\tilde{\alpha}_\psi - \tilde{\alpha}_\gamma)}, \pm\frac{\sqrt{4\tilde{\alpha}_\psi^2 + 4\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\alpha}_\psi - 9}}{2(\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{\alpha}_\gamma)}, \pm\sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_\psi}{\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{\alpha}_\gamma}}, 0, 0, 0, 0 \right\}$
- $\left\{ -\frac{\tilde{a}}{3}, 0, 0, 0, \pm\sqrt{1 - \frac{\tilde{a}^2}{9}}, 0, 0 \right\}$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \left\{ \frac{3}{\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{a}}, \pm \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{\alpha}_\psi \tilde{a} - 9}}{\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{a}}, 0, 0 \pm \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_\psi}{\tilde{\alpha}_\psi + \tilde{a}}}, 0, 0 \right\} \\
& \blacksquare \left\{ \frac{2}{\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma}, 0, 0, \pm \frac{\sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{\alpha}_\gamma \tilde{a} - 6}}{\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma}, \pm \frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}_\gamma^2 - 2\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{a} + 4}}{\sqrt{2}(\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, 0 \right\} \\
& \blacksquare \left\{ \frac{3}{2(\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, \pm \frac{\sqrt{2\tilde{a}^2 - 2\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{a} - 9}}{\sqrt{2}(\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma)}, 0, \pm \frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}_\gamma^2 - 4\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{a} + 9}}{2(\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma)} \right\}
\end{aligned}$$

Todos los puntos de equilibrio arriba mostrados son inestables bajo pequeñas perturbaciones, sin embargo el sistema físico puede alcanzarlos dadas las condiciones iniciales apropiadas. En otras palabras, el Universo puede evolucionar a través de cualquiera de las soluciones anteriores, y estas pueden ser detectadas en observaciones cosmológicas.

Uno de los puntos estables del sistema es $\{0, 0, 0, 0, 0, \pm 1\}$ con eigenvalores $\{-3, -2, -\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{3}{2}(\sqrt{1 - \frac{4b^2}{9}})\}$, corresponde a la *dominación de la constante cosmológica*. Esto ya no es sorprendente y se estudió con anterioridad.

Lo que es sorprendente es la existencia del punto de equilibrio

$$\left\{ 0, 0, 0, 0, \pm \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}_\gamma}{\tilde{\alpha}_\gamma - \tilde{a}}}, \pm \sqrt{\frac{\tilde{a}}{\tilde{a} - \tilde{\alpha}_\gamma}}, 0 \right\}$$

el cual puede ser considerado como la dominación del potencial del dilatón y del axión, una constante cosmológica dinámica. Cuyos eigenvalores correspondientes son

$$\left\{ -3, -3 - \frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{9} \tilde{a} \tilde{\alpha}_\psi} \right) \right\}$$

Este es estable bajo las condiciones ($\tilde{a} < 0$) y ($\frac{9}{8\tilde{a}} \leq \tilde{\alpha}_\psi \leq 0$) ó ($\tilde{a} > 0$) y ($0 < \tilde{\alpha}_\psi \leq \frac{9}{8\tilde{a}}$). Notese que los potenciales de campo escalar dominan el Universo, bajo la condición $\tilde{\alpha}_\gamma \sim 1/\tilde{a}$ la cual representa un caso muy especial de un tipo de Universo, donde la constante de acoplamiento del axión es del orden del inverso de la constante de acoplamiento del potencial.

Existen dos puntos inestables que surgen para este Universo, $\{1, 0, 0, 0, 0, 0\}$ $\{-1, 0, 0, 0, 0, 0\}$ con eigenvalores dados por

$$\left\{ 3, 0, 3 + \tilde{a}, -\tilde{\alpha}_\psi, 3 + \tilde{\alpha}_\psi, 1 + \tilde{\lambda}, \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\tilde{\lambda}}{3}\right) \right\}$$

$$\left\{ 3, 0, 3 - \tilde{a}, \tilde{\alpha}_\psi, 3 - \tilde{\alpha}_\psi, 1 - \tilde{\lambda}, \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\tilde{\lambda}}{3}\right) \right\}$$

estos puntos que corresponden a la dominación cinética del campo siempre y cuando $a > -3$, $-3 < \alpha < 0$ y $\tilde{\lambda} > -1$ para el primer conjunto, mientras que para el segundo $a < 3$, $0 < \alpha < 3$ y $\tilde{\lambda} < 1$, haciendo incapie sobre el valor de las constantes de acoplamiento, estas pueden ser negativas como se requiere para la estabilidad en el primer caso.

A pesar de que estos puntos muestran un comportamiento inestable, estos puntos se pueden ver como puntos estables provenientes del pasado, esto es, la componente cinética del campo dominaba sobre componentes restantes en un Universo temprano. Esto se puede observar claramente en las Figuras 7.6.

7.3. Potenciales tipo ϕ^2 y ψ^2

Se estudiará el caso donde la expresión para el potencial del dilatón está dada por un término cuadrático, al igual que para el potencial del axión, como se muestra a continuación

$$V_\phi = a^2 \kappa^2 \phi^2, \quad V_\psi = b^2 \kappa^2 \psi^2 \quad (7.15)$$

Haciendo el procedimiento analogo a los potenciales anteriores, calculando los valores para U y W y sustituyendo ambos en el sistema (6.14) se encuentra que

$$\begin{aligned} x' &= -3x - \tilde{a}lu - \tilde{\alpha}_\psi(w^2 - A^2) - \tilde{\alpha}_\gamma(y^2 + z^2) + \Pi x, \\ A' &= -3A - blw - \tilde{\alpha}_\psi xA + \Pi A, \\ y' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)y, \\ z' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x\right)z, \\ u' &= axl + \Pi u, \\ w' &= bAl + \tilde{\alpha}_\psi wx + \Pi w, \\ l' &= \left(\Pi - \frac{3}{2}\gamma_L\right)l, \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde la constricción de Friedmann (7.7) aún se satisface y el valor de Π es el mismo que en (7.8). Además se ha hecho la definición, $B \equiv \sqrt{\frac{6}{\rho_L}} b$ y $a' \equiv \sqrt{\frac{6}{\rho_L}} b$. Cuando se resuelve el sistema dinámico (7.16) de manera numérica, se encuentra que la evolución en los parámetros de densidad es como se muestra a continuación, Figura 7.7.

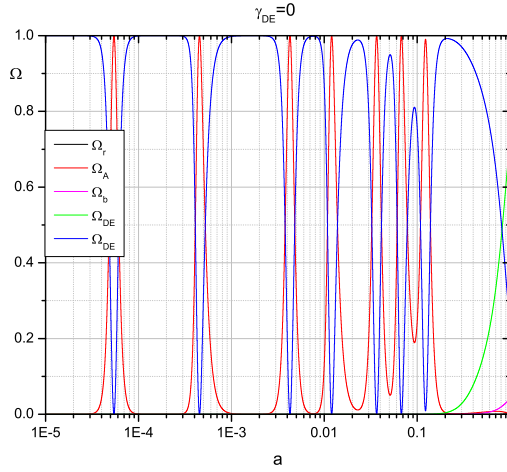


Figura 7.7: En esta figura no se pueden observar las tres distintas épocas predichas por Λ CDM y esperadas por un buen modelo, además existen fuertes oscilaciones a épocas muy tempranas, las cuales no se observan en el Universo temprano. Las constantes de acoplamiento están dadas por $B = 50$, $\tilde{\alpha}_\gamma = 2$, $a' = 4$ y $\tilde{\alpha}_\psi = 6$. La integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badforth-Moulton con alrededor de 5×10^5 puntos por cada curva.

Si se considera el caso particular cuando el límite de las constantes de acoplamiento se anulan, se observa que en este caso no se reproduce la evolución en los parámetros de densidad como se esperaría para el Universo observado, como en el modelo Λ CDM, Figura 7.8.

Para analizar la estabilidad de este sistema, como ya se ha hecho anteriormente se consideran pequeñas perturbaciones alrededor de los puntos de equilibrio \mathbf{x}_c , de tal manera que se obtenga un sistema de la forma

$$\delta \mathbf{x}' = \mathcal{M} \delta \mathbf{x},$$

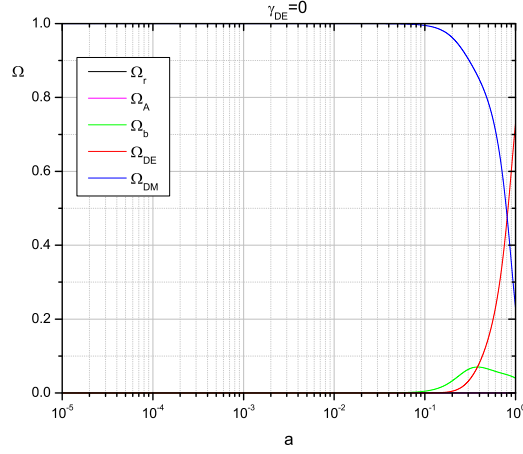


Figura 7.8: A pesar de que se ha anulado el acoplamiento del dilaton con los campos de materia $\tilde{\alpha}_\psi = \tilde{\alpha}_\gamma = 0$ este modelo no reproduce el comportamiento esperado por Λ CDM. La integración se hizo usando el algoritmo Adams-Badsforth-Moulton con alrededor de 5×10^5 puntos por cada curva.

donde $\mathcal{M} =$

$$\begin{bmatrix} -3 + \Pi + 6x^2 & 2\tilde{\alpha}_\psi A + 6Ax & -2\tilde{\alpha}_\gamma y + 3\gamma_b yx & -2\tilde{\alpha}_\gamma z + 3\gamma_r zx & -a'l & -2\tilde{\alpha}_\psi w & -a'u \\ -\tilde{\alpha}_\psi A + 6xA & -3 - \frac{\tilde{\alpha}_\psi x}{\Pi + 6A^2} & 3\gamma_b yA & 3\gamma_r zA & 0 & -Bl & -Bw \\ 6xy + \tilde{\alpha}_\gamma y & 6Ay & \frac{\Pi - \frac{3}{2}\gamma_b + \tilde{\alpha}_\gamma x}{3\gamma_b y^2} & 3\gamma_r zy & 0 & 0 & 0 \\ 6xz + \tilde{\alpha}_\gamma z & 6Az & 3\gamma_b yz & \frac{\Pi - \frac{3}{2}\gamma_r + \tilde{\alpha}_\gamma x}{3\gamma_r z^2} & 0 & 0 & 0 \\ 6xu + a'l & 6Au & 3\gamma_b yu & 3\gamma_r zu & \Pi & 0 & a'x \\ \tilde{\alpha}_\psi w + 6xw & 6Aw + Bl & 3\gamma_b yw & 3\gamma_r zw & 0 & \frac{\tilde{\alpha}_\psi x}{\Pi} + BA & BA \\ 6xl & 6Al & 3\gamma_b yl & 3\gamma_r zl & 0 & 0 & \Pi \end{bmatrix}$$

Como uno espera, la cantidad de puntos de equilibrio correspondientes al sistema dinámico (7.16) que satisfacen la condición (7.7) es el del orden del sistema anterior, por esto solo es conveniente mostrar los puntos que interes físico, como se muestran a continuación.

Los puntos estables del sistema, al igual que los anteriores, son

$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$$

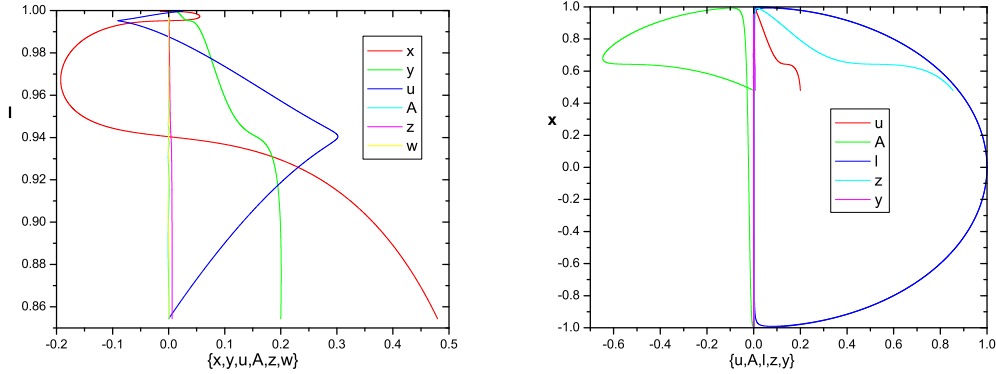


Figura 7.9: Se observan los puntos atractores correspondientes a $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1\}$ dominación de la constante cosmológica en el Universo tardío (izquierda), también el punto $\{\pm 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ proveniente de la parte cinética del potencial dominado en el Universo temprano (derecha).

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$$

el primer punto presenta eigenvalores dados por $\{-2, -\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}a^2}\right), -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}b^2}\right)\}$, los cuales son estables siempre y cuando se satisfaga la condición $(-\frac{3}{2} < a < \frac{3}{2})$ y $(-\frac{3}{2} < b < \frac{3}{2})$. Mientras que para el segundo punto de equilibrio sus eigenvalores son $\{-3, -3, -2, -\frac{3}{2}, 0, 0, 0\}$, el cual siempre muestra estabilidad en una subvariedad invariante. Ambos puntos representan la dominación de la constante cosmológica sobre las demás componentes, dinámica como en el segundo punto, por tanto, la constante cosmológica será quién determine la dinámica de este Universo.

El punto $\{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ con eigenvalores $\{3, 3, 0, -\tilde{\alpha}_\psi, 3 + \tilde{\alpha}_\psi, 1 + \tilde{\alpha}_\psi, \frac{1}{3} + \tilde{\alpha}_\gamma\}$ es inestable siempre que $(-2 < \tilde{\alpha}_\psi < 0)$ y $(\tilde{\alpha}_\gamma > -1)$, también el punto $\{-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$ con eigenvalores $\{3, 3, 0, \tilde{\alpha}_\psi, 3 + \tilde{\alpha}_\psi, 1 + \tilde{\alpha}_\gamma, \frac{1}{3} - \tilde{\alpha}_\gamma\}$ muestra inestabilidad para $(0 < \tilde{\alpha}_\psi < 2)$ y $(\tilde{\alpha}_\gamma < 1)$. Sin embargo, estos puntos se pueden interpretar como puntos estables provenientes del pasado, esto es, en el Universo temprano la componente que gobernaba sobre la dinámica era la parte cinética del campo dilatónico como se muestra en la Figura 7.9.

En este trabajo se propuso una interpretación alternativa para el campo dilatónico en supergravedad tipo IIB . Esta interpretación alternativa nos permitió comparar este modelo con el de Λ CDM, el cual ha sido muy exitoso en sus predicciones. El resultado fue que, al menos en este modelo, la radiación parece ser subdominante en todas partes, provocando dificultades para explicar big bang nucleosíntesis. Aún cuando se ve que en este particular modelo de juguete, el comportamiento parece ser genérico para todas las teorías de cuerdas. Si este fuese el caso, es posible que los campos dilatón y axión no puedan ser interpretados como materia oscura o energía oscura, aun así se deberían encontrar otros candidatos y explicar por que no se ven estos campos escalares en las observaciones, o tener que explicar la nucleosíntesis usando las condiciones dadas por la teoría de cuerdas aquí mostradas, tener que buscar un mecanismo para eliminar el acoplamiento entre en dilatón y axión con la materia a tiempos muy tempranos. Esta última opción es posiblemente la más realista. Aún si se resuelve el problema de dominación de la radiación, hay existen grandes diferencias entre Λ CDM y teoría de supercuerdas entre $10^2 < z < 10^3$, debido a que dicha teoría predice alrededor de 16 millones de años de oscilaciones en las densidades durante la edad oscura. Sin embargo, ambos modelos son muy similares a tiempos tardíos, entre $0 < z < 10^2$, probablemente la única diferencia durante este periodo es en sus predicciones de la formación de subestructura y los centros galácticos. Mientras que Λ CDM predice un exceso de subestructura en el universo y un perfil de densidad muy pronunciado, los campos escalares predicen una cantidad menor de subestructura y casi perfiles de densidad constante en los centros de las galaxias. La confirmación de estas observaciones podría decidir entre estos dos modelos. Estamos conscientes de que este modelo es aún de juguete, sería interesante estudiar compactificaciones

más realistas (incluyendo branas y configuraciones orientifold) y ver si estos resultados, incluyendo que los perfiles de densidad de la materia oscura, sobreviven y llegan a ser una característica general de la teoría de cuerdas. Si este es el caso, esta interpretación alternativa de los campos en la teoría puede permitir establecer un contacto de la teoría de cuerdas con la fenomenología de la astrofísica de la materia oscura, i.e. su contacto con observaciones futuras cosmológicas y astrofísicas. Concluimos que esta interpretación puede darnos un entendimiento más cercano a la teoría de supercuerdas con cosmología.

También se ha mostrado que los casos más simples para la selección de los potenciales del dilatón y del axión en los cuales las ecuaciones de movimiento para un universo homogéneo e isotrópico pueden ser escritas como un sistema autónomo. Esta forma de las ecuaciones facilita el análisis de las soluciones interesantes tales que un universo puede transcurrir.

El campo dilatónico actúa como un tipo de quintessence con un potencial exponencial o tipo cuadrático sin embargo sus acoplamientos con los diferentes campos de materia hacen la evolución significativamente diferente para el caso estándar. En estos casos, se observan que la dominación típica del campo escalar y las soluciones de escalamiento son parte de los puntos de equilibrio del sistema dinámico. Sin embargo, estos puntos son inestables, pensamos que tal inestabilidad es intrínseca o es impuesta por la presencia de la constante cosmológica.

Se ha visto el caso genérico, donde el campo dilatónico es subdominante en la presencia de una constante cosmológica, a menos que la constante de acoplamiento sea del orden o menor que el inverso de la constante de acoplamiento del potencial dilatónico, en este caso el universo alcanzará una condición donde los potenciales del axión y el dilatón dominarán en él. Este comportamiento parece ser genérico en la teoría axión-dilatón de relatividad.

Existe un punto en el que se requiere un estudio más cuidadoso para tratar en el futuro. El sistema dinámico que estudiamos no puede tener puntos fijos correspondientes a la dominación de fluidos perfectos. La razón para este es la constante de acoplamiento diferente de cero del dilatón con el fluido perfecto $\tilde{\alpha}_\gamma$.

La ausencia de puntos fijos para la dominación de fluidos perfectos, en general, pueden ser una falla seria del modelo, como el modelo de big bang estándar requiere la existencia bien definida de las eras dominantes por la radiación y materia. Como se dijo antes, se investigará si es una fuerte falla o no de cualquier modelo de materia oscura inspirado en cuerdas.

APÉNDICE A

Métodos Numéricos.

Las Ecuaciones Diferenciales son descripciones matemáticas de como las variables y sus derivadas, influyen en las demás de una forma dinámica. Sus soluciones nos muestran como las variables dependientes cambiarán respecto a las independientes. Muchos problemas en ciencias naturales y en campos de ingeniería son formulados en forma de sistemas de ecuaciones diferenciales, cuando existe la necesidad de obtener un valor numérico como solución a este tipo de problemas, y los procedimientos “exactos” o “analíticos” son incapaces de dar respuesta se recurre a los Métodos Numéricos; esto es, el análisis numérico nos permite describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos.

El objetivo de los métodos numéricos es obtener a partir de un sistema continuo expresado por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

una secuencia de valores del vector de estado $\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_i)$ que aproximan la solución del sistema.

Es común a todos estos métodos la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales por integración entre los puntos t_{i-r} y t_{i+1} según

$$\int_{\mathbf{y}(t_{i-r})}^{\mathbf{y}(t_{i+1})} dy$$
$$\mathbf{y}(t_{i+1}) = \mathbf{y}(t_{i-r}) + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(t) dt$$

Dependiendo de la aproximación de f en el intervalo de integración sugieren los diferentes métodos de integración. Estos se clasifican en métodos de paso simple, o multipaso en función de la dependencia de $y(t_{i+1}) = y_{i+1}$

Métodos de paso simple

Los métodos de paso simple calculan la solución y_{i+1} a partir del valor de la función y_i en el instante t_i . Por ejemplo, el **método de Euler**

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h.$$

Por su parte los **métodos de paso múltiple** (de n pasos) calculan la solución y_{i+1} en t_{i+1} a partir del valor de la función y en los instantes $t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-n+1}$. Por ejemplo, el **método de Heun**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i-1} + f(t_i, y_i)2h))$$

A.1. Metodo ABM

El metodo de Adams-Bashforth Moulton es un método predictor-corrector de multipaso derivado del teorema fundamental del calculo:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, y(t))dt.$$

El predictor usa la aproximación de los polinomios de Lagrange para hacer una aproximación de $f(t, y(t))$ basada en los puntos $(t_{k-3}, f_{k-3}), (t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1})$ y (t_k, f_k) . Esto se hace integrando sobre el intervalo $[(t_k, t_{k+1})]$ en (1). Este proceso nos guía al predictor Adams-Bashforth

$$p_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k). \quad (\text{A.1})$$

Como se puede notar, este método no comienza por si solo, cuatro puntos iniciales deben ser dados para poder generar los puntos $[(t_k, y_k) : k \geq 4]$ (esto puede hacerse con uno de los métodos de paso simple, por ejemplo RK4)

El corrector se desarrolla de manera similar. El valor p_{k+1} ya calculado puede ser usado. Un segundo polinomio de Lagrange para $f(t, y(t))$ se construye, el cual se basa en los puntos $(t_{k-2}, f_{k-2}), (t_{k-1}, f_{k-1}), (t_k, f_k)$ y el nuevo punto $(t_{k+1}, f_{k+1}) = (t_{k+1}, f(t_{k+1}, p_{k+1}))$. Este polinomio es por tanto integrado sobre $[t_k, t_{k+1}]$, produciendo el corrector Adams-Moulton.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}). \quad (\text{A.2})$$



Figura A.1: Los cuatro nodos para el para el predictor Adams-Bashforth (izquierda) y cuatro para el corrector Adams-Moulton (derecha).

Figura muestra los nodos para los polinomios de Lagrange que son usados en el desarrollo de las formulas (A.1) y (A.2) respectivamente.

Comparación de los metodos Rk4 y ABM resolviendo una ecuación Simple

	Rk4	ABM
Error relativo	$0,0925x10^{-4}$	$0,0203x10^{-4}$
Tiempo de Cálculo	0.05 sec	0.03 sec

Φ

Bibliografía

- [1] A. G. et al., *Astron. J.* 116 (1998) 1009.
- [2] Neta A. Bahcall, Jeremiah P. Ostriker, Saul Perlmutter and Paul J. Steinhardt, *Science* 284, (1999) 1481-1488. e-Print Archive astro-ph/9906463.
- [3] Tonatiuh Matos and L Arturo Ureña-Lopez 2000 *Class. Quantum Grav* 17 L75-L81
- [4] Tonatiuh Matos, L. Arturo Ureña-Lopez and J. Alberto Vázquez, in progress
- [5] Gerald Cleaver. *Advances in Space Research*, Volume 35, Issue 1, 2005, Pages 106-110
- [6] M.B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory. Vol 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*, Cambridge University Press 1987.
- [7] Thibault Damour, Alexander Vilenkin. *Phys. Rev. Lett* 78 (1997) 2288-2291.
- [8] Kiwoon Choi. *Phys. Rev.* D62 (2000) 043509
- [9] B. J. Carr and M. J. Rees, “The Anthropic Principle and the Structure of the Physical World” *Nature* 278: 605-612 (1979)
- [10] George F. R. Ellis astro-ph/0602280 v1 13 Feb 2006
- [11] Andrew Liddle. *An Introduction to modern cosmology*. Edit Wiley
- [12] T. Padmanabhan *Structure Formation in the Universe*, 1993.
- [13] T. Padmanabhan *Cosmology and Astrophysics through Problems*, 1996
- [14] Peebles, P.J.E (1993). *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press.
- [15] Hirsch, M, W (1984). The dynamical systems approach to differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 11, 1-63
- [16] Ruth Lazkoz, Genly León and Israel Quiros, astro-ph/0701353 v2 26 Apr 2007

- [17] B. P. Schmidt, et al., *Astrophys. J.* 507, 46 (1998)
- [18] A.G. Riess, et al., *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [19] Andrew R. Liddle and David H. Lyth *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*
- [20] R. Tavakol, *Introduction to dynamical systems*, 1997.
- [21] Alan A. Coley gr-qc/9910074 v1.
- [22] Jie Wang, Gabriella De Lucia, Manfred G. Kitzbichler, Simon D. M. White *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 000, 1-13 (2007)
- [23] Edmund J. Copeland, Andrew R. Liddle, David Wands gr-qc/9711068 v2
- [24] E.J. Copeland, Amitabha Lahiri & David Wands hep-th/9406216 v2
- [25] A. R. Frey, A. Mazumdar. *Phys. Rev. D* 67:046006, 2003
- [26] Tonatiuh Matos, José-Rubén Luevano, Hugo García-Compeán and J. Alberto Vázquez, in revision

*... Una vida ejemplar es el
mejor obsequio a nuestros
semejantes...gracias mamá*