



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADÍSTICA DE MODELOS DE ENERGÍA OSCURA:
GAS DE CHAPLYGIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

P R E S E N T A :

LÓPEZ MAGAÑA DAVID ANDRÉS

TUTOR

DR. JOSÉ ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2024



**CONSTANCIA DE
PRESENTACIÓN DE
EXAMEN PROFESIONAL**

En la Universidad Nacional Autónoma de México, en la SALA DE EXÁMENES PROFESIONALES de la FACULTAD DE CIENCIAS siendo las 13:00 horas del día 21 de noviembre de 2024, el alumno:

DAVID ANDRES LOPEZ MAGAÑA

de nacionalidad MEXICANA con número de cuenta 316321163 se presentó con el fin de sustentar el examen oral para obtener el título de:

FÍSICO

en su modalidad de titulación por TESIS con el trabajo titulado: Estadística de modelos de Energía Oscura: Gas de Chaplygin. El alumno cursó sus estudios en el periodo 2019-1 a 2024-2 habiendo obtenido un promedio de 9.27 y cumpliendo con los requisitos académicos señalados en el plan de estudios 1081 aprobado por el H. Consejo Universitario.

El Jurado designado por el Comité Académico integrado por:

PRESIDENTE: DR. MARCOS ALEJANDRO GARCIA GARCIA

VOCAL: DRA. MARIANA CANO DIAZ

SECRETARIO: DR. JOSE ALBERTO VAZQUEZ GONZALEZ

SUPLENTE: DRA. ANA AURELIA AVILEZ LOPEZ

SUPLENTE: DR. ALEJANDRO AVILES CERVANTES

Tras el interrogatorio y deliberación resolvió otorgarle la calificación de:

Aprobado con Mención Honorífica

Procediendo a informarle el resultado, tomarle la Protesta Universitaria y dar por concluido el acto.



PRESIDENTE DEL JURADO



SECRETARIO DEL JURADO



VOCAL DEL JURADO

El Titular de la entidad académica hace constar que las firmas electrónicas que anteceden son válidas y corresponden a los miembros del jurado.



**"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR
DIRECTOR DE LA ENTIDAD ACADÉMICA**

QR de verificación



1. Datos del alumno

López

Magaña

David Andrés

5562141417

Universidad Nacional Autónoma de México

Licenciatura en Física

316321163

2. Datos del tutor

Dr.

Vázquez

González

José Alberto

3. Datos del sinodal 1

Dr.

García

García

Marcos Alejandro

4. Datos del sinodal 2

Dra.

Cano

Díaz

Mariana

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Avilés

Cervantes

Alejandro

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Avilez

López

Ana Aurelia

7. Datos del trabajo escrito

Estadística de Modelos de Energía Oscura: Gas de Chaplygin

60 p

2024

«Recuerda mirar arriba, a las estrellas, y no abajo, a tus pies. Intenta encontrar el sentido a lo que ves y pregúntate qué es lo que hace que el Universo exista. Sé curioso. Por muy difícil que te parezca la vida, siempre hay algo que puedes hacer y en lo que puedes tener éxito. Lo único que cuenta es no rendirse.»

Stephen Hawking

Agradecimientos

A mi familia, por su apoyo incondicional, por alentarme a seguir adelante, por siempre motivarme y cultivar mi deseo de volverme científico.

A mi asesor el Dr. José Alberto Vázquez González, por brindarme la oportunidad de trabajar con él y su grupo, por el conocimiento que me ha compartido y las lecciones que me ha brindado, por el extenso apoyo y por la motivación de seguir investigando y aprendiendo.

Al Dr. Luis Adrián Escamilla Torres por su gran ayuda en la elaboración de este trabajo y el tiempo que ha dedicado para explicarme y enseñarme, y por actuar como co-asesor de forma no oficial.

A los miembros del jurado: el Dr. Marcos Alejandro García García, la Dra. Mariana Cano Díaz, el Dr. Alejandro Avilés Cervantes y la Dra. Ana Aurelia Avilez López por su disposición a asistirme y por sus valiosas contribuciones a este trabajo.

A las profesoras y los profesores que me han motivado y compartido sus conocimientos para que llegue lo más lejos posible.

A mis amigos dentro y fuera de la Facultad, por las risas y momentos compartidos, por hacer que esta etapa de mi vida sea inolvidable.

A mi novia Alejandra Rocha, por su gran amor, apoyo, por compartir tantas experiencias juntos y por alegrarme todos los días.

A todos ustedes, mil gracias.

Índice general

Agradecimientos	iv
Resumen	vii
1. Introducción	1
1.0.1. Modelo cosmológico estándar	1
1.1. Fluidos	7
1.1.1. El modelo estándar Λ CDM y sus problemáticas	9
2. Alternativas a ΛCDM	12
2.1. Gas de Chaplygin	13
2.2. Desarrollo de los modelos	14
2.2.1. Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)	14
2.2.2. Gas modificado de Chaplygin (GCM)	16
2.2.3. Gas viscoso generalizado (GCVG)	16
2.3. Ecuaciones de estado	17
2.4. Priors	19
3. Estimación de parámetros	21
3.0.1. Algoritmo Metropolis-Hastings	22
3.0.2. Muestreo Anidado	23
3.0.3. Comparación de modelos	24
4. Datos	26
5. Resultados	29
5.1. Distribuciones de probabilidad y valores encontrados	29
5.2. Criterios de información	32
5.3. Dinámica de los modelos	34
6. Conclusiones	38
Apéndice A. Apéndice	40
A.1. Resultados con MCMC.	40
A.1.1. Distribuciones de probabilidad y valores encontrados	40
A.1.2. Criterios de información y dinámica	42

A.2. Resultados con cadenas simultáneas de MCMC	47
A.3. Perspectivas	48
Bibliografía	49

Resumen

En este trabajo se hace un resumen del desarrollo y estado del arte de la cosmología y el modelo estándar, se comenta sobre las problemáticas actuales de este modelo y sobre algunos modelos alternativos que se han planteado. Se hace un análisis más a detalle de los modelos de energía oscura de la familia conocida como Gas de Chaplygin donde se ahonda en tres de estos modelos: el Gas de Chaplygin Generalizado (GCG), el Gas de Chaplygin Modificado (GCM) y el Gas de Chaplygin Viscoso Generalizado (GCVG). Se desarrollan las ecuaciones necesarias para poder analizarlos mediante estadística bayesiana a través del programa SimpleMC y poder compararlos con el modelo estándar. Se revisan los conceptos más importantes de la estadística bayesiana y se explican dos algoritmos para el análisis estadístico, siendo el primero un tipo de MCMC, el algoritmo de Metropolis-Hastings y el algoritmo de Muestro Anidado. También se comenta sobre los datos observacionales que se utilizaron para realizar el análisis de los modelos, siendo estos datos obtenidos de candelas estándar, cronómetros cósmicos y de las oscilaciones acústicas de bariones. Se obtuvieron las distribuciones de probabilidad de los parámetros de cada modelo, sus mejores ajustes y el promedio de las cadenas. Se encontraron las χ^2 y χ^2_{red} asociadas así como los criterios de información AIC y BIC para cada uno de los modelos. Finalmente se encontraron los comportamientos correspondientes a los resultados de la densidad de energía, la ecuación de estado y el parámetro de desaceleración de cada uno de los modelos.

1 Introducción

En este trabajo se busca analizar distintos modelos de Energía Oscura pertenecientes a una familia de modelos denominados “Gas de Chaplygin” en los cuales suponen que el Universo tiene una sustancia que actúa como un tipo particular de un gas ideal. Para ello se comparan con el modelo cosmológico estándar Λ CDM y, mediante estadística bayesiana, se busca determinar qué modelo presenta mejores ajustes con respecto a los datos.

Con este fin, primero se da una introducción de cosmología para entender por qué surge la necesidad de considerar a la “Energía Oscura” y presentar las ecuaciones que resultan útiles en el análisis de los modelos. Posteriormente se discuten las problemáticas del modelo estándar y unos de los principales modelos propuestos como alternativas. Después se habla con detenimiento de los modelos de Gas de Chaplygin y se desarrollan las ecuaciones relevantes para ellos. Después se comenta sobre los algoritmos que se utilizan para realizar los análisis estadísticos y de las bases de la estadística bayesiana y la comparación de modelos. Luego se comenta sobre la física detrás de los datos utilizados para analizar los modelos. Finalmente se discuten los resultados obtenidos.

1.0.1. Modelo cosmológico estándar

Luego de desarrollar la teoría de la Relatividad Especial, Einstein se dió cuenta de que no era una teoría completa que era parte de una teoría más grande que englobaba más fenómenos y casos que aún no había descrito. Su esfuerzo culminó en la Teoría de la Relatividad General (RG) en donde planteó una nueva forma de ver a la gravedad, al espacio y al tiempo. Los resultados de la Relatividad General se concentran en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

Del lado izquierdo de las ecuaciones se encuentra el denominado “tensor de Einstein” que se define a partir del tensor de Ricci, del escalar de Ricci y de la métrica como $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$. El tensor de Einstein describe la geometría del espacio-tiempo. En el lado derecho de la ecuación se encuentra el tensor de energía-momento, el cual se encarga de describir a la materia [\[1\]](#).

La teoría de la Relatividad General abrió las puertas a una nueva rama de la física denominada cosmología. Esta rama se encarga de estudiar al Universo como un conjunto; estudia cómo se originó, su evolución, su composición y su dinámica. En esencia,

la cosmología moderna es la ciencia basada en datos observacionales astronómicos que busca explicar cómo y por qué el Universo actual es como es. Estos cuestionamientos no son algo realmente nuevo sino, al contrario, son tan antiguos como la humanidad misma. Sin embargo la cosmología tuvo que esperar a las tecnologías actuales para poder convertirse en una ciencia formal [1-3].

En cuestiones algo más filosóficas, la cosmología puede entenderse como la visión que se tiene acerca de la naturaleza del Universo. Por ejemplo, antiguamente se tenía la visión de que la Tierra era el centro del Universo, lo cual es conocido como el *modelo ptolemaico* y que estuvo vigente hasta que Nicolás Copérnico desarrolló su cosmología heliocentrista donde se consideraba al Sol como el centro del Universo. Pese a que este modelo ya no sea vigente, la base de la teoría heliocentrista es relevante aún hoy en día a través de lo que se conoce como *principio copernicano* el cual indica que la Tierra no ocupa un lugar especial en el Universo, o bien nosotros como humanos, no estamos en un lugar privilegiado en el Universo [4].

Al considerar una versión más profunda y moderna del principio copernicano se llega al principio cosmológico. Este principio indica que la posición en la cual nosotros nos encontramos en el Universo no es una posición especial ni privilegiada. El principio cosmológico propone dos propiedades para el Universo: la homogeneidad y la isotropía. La primera dicta que sin importar el lugar en el cual uno se encuentre, el Universo se verá igual. Y la segunda propiedad indica que no importa la dirección en la cual se observe al Universo, este se verá igual en cualquiera. El principio se aplica a grandes escalas del Universo, esto es a una escala donde se consideran regiones que contengan alrededor de millones de galaxias [1, 2].

Einstein se dió cuenta de que sus ecuaciones de campo abrían la puerta al estudio de la evolución del Universo y se percató de la predicción que hacían: el Universo estaba en expansión. Sin embargo él creía que el Universo debía ser estático por lo que agregó a sus ecuaciones una constante (Λ) que evitaría la predicción de la expansión. Sin embargo, en 1929 Edwin Hubble mostró la existencia de una relación lineal entre las velocidades de las galaxias y su distancia a la Tierra, en la Figura 1.1 se encuentra la gráfica reportada por Hubble en su artículo de 1929. Así fue como se contradijo la suposición de Einstein y se mostró que el Universo se expandía. Aquello llevó a eliminar la constante de las ecuaciones de Einstein hasta un nuevo hallazgo en 1998 [5].

En el año de 1998 y poco después en 1999 dos grupos de científicos obtuvieron evidencia directa de la existencia de energía oscura luego de analizar docenas de datos de supernovas del tipo Ia las cuales se conocen como candelas estándar (más adelante se explica con mayor detalle qué son). Al comparar la diferencia de la distancia luminosa si el Universo fuera dominado por materia oscura o bien por energía oscura, los grupos encontraron que el Universo debía ser dominado por la energía oscura [6, 7].

Estas evidencias prueban que la expansión del Universo no se está desacelerando como en un principio se creía, sino que en realidad la expansión es acelerada. Para explicar todos estos fenómenos se requiere la denominada “energía oscura”, la cual es la responsable de la aceleración de la expansión del Universo y también conforma a la mayor parte de este, abarcando alrededor del 68 % de todo el Universo.

Esto provocó que se reavivara la idea de la constante Λ , pese a que Einstein

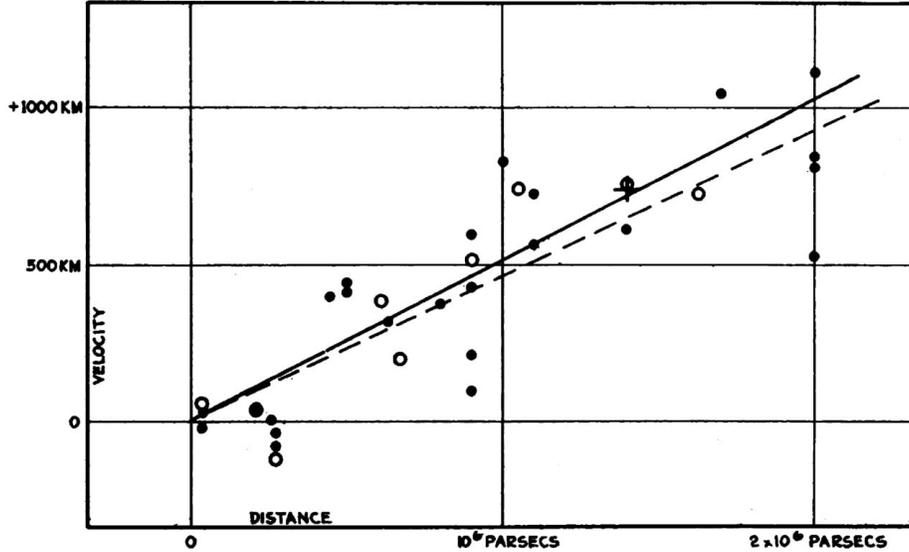


Figura 1.1: Gráfica publicada por Edwin Hubble en 1929 mostrando la relación entre la distancia a la Tierra y la velocidad de nebulosas extragalácticas. Los puntos negros y la línea sólida representan las nebulosas individuales mientras que los puntos sin relleno y la línea rayada toman grupos de nebulosas. Imagen tomada de [5].

la introdujo para evitar un Universo en expansión, en realidad su introducción a las ecuaciones de campo predicen la expansión acelerada. Así, predominó la consideración de la denominada *constante cosmológica* en las ecuaciones de Einstein, quedando entonces de la siguiente manera:

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = 8\pi T^{\alpha\beta}. \quad (1.2)$$

La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) se usa en cosmología debido a que cumple con el principio cosmológico describiendo a un Universo homogéneo e isotrópico. Tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.3)$$

donde t es la coordenada temporal, r , θ y ϕ son las coordenadas esféricas, a es el factor de escala que cuantifica la expansión del Universo y k es el parámetro de curvatura y tiene unidades de $[\text{distancia}]^{-2}$. Esta métrica considera tres posibles Universos homogéneos e isotrópicos: un Universo plano, uno esférico y uno hiperbólico. La imagen de la Figura [1.2] ilustra las formas que puede tener el Universo. La forma espacial del Universo se define a través de su curvatura y se expresa en la métrica FLRW a través del parámetro de curvatura k , el cual tiene 3 posibilidades:

$$\begin{aligned} k > 0 &\Rightarrow \text{Universo esférico} \\ k = 0 &\Rightarrow \text{Universo plano} \\ k < 0 &\Rightarrow \text{Universo hiperbólico.} \end{aligned} \quad (1.4)$$

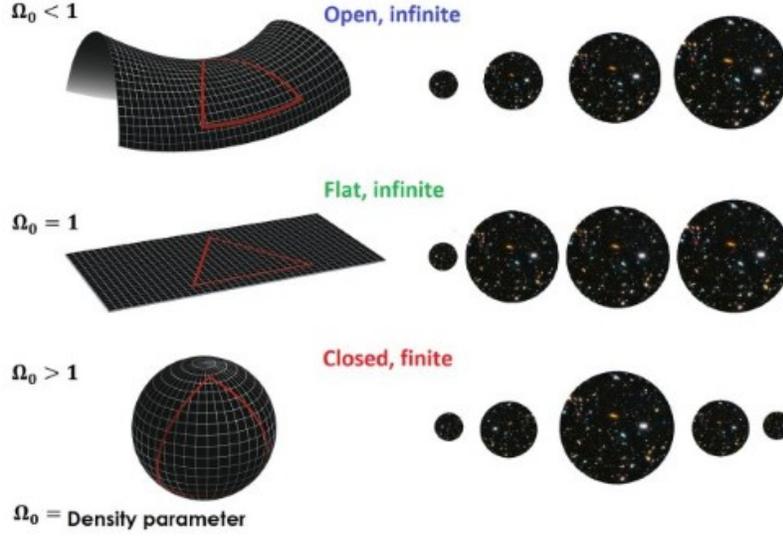


Figura 1.2: Para que el Universo cumpla el Principio Cosmológico, debe de tener una de estas tres curvaturas. Del lado derecho se observa cómo se expandiría el Universo de tener alguna de estas tres geometrías. Imagen tomada de [8].

Hoy en día, las observaciones apuntan a que el Universo actualmente es espacialmente plano. Por ello, generalmente se considera $k = 0$ a menos que se quiera generalizar y/o explorar las posibles alternativas; así también se plantean ideas en las cuales la curvatura del Universo no siempre ha sido la misma o bien, en las que se da la coincidencia en la cual es difícil distinguir una forma distinta a la planitud a menos que se observen tiempos muy tempranos en el Universo, esto se ve reflejado en la Figura 1.3. El modelo estándar de igual forma considera un Universo plano.

A partir de las ecuaciones de campo y de la métrica FLRW es posible deducir la conocida *ecuación de Friedmann*. Dicha ecuación describe la expansión del Universo por lo cual resulta muy importante en la cosmología [2].

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (1.5)$$

El lado izquierdo de la ecuación de Friedmann se define como el parámetro de Hubble, $H \equiv \dot{a}/a$, donde $\dot{a} = \frac{da}{dt}$. Del lado derecho: G es la constante de gravitación universal y ρ es la densidad de energía en el Universo como función del tiempo [9].

La ecuación de Friedmann junto con la ecuación de continuidad (de la cual se habla en la siguiente subsección), permiten la deducción de otra que se conoce como la *ecuación de aceleración*, ó *segunda ecuación de Friedmann*, ó *ecuación de aceleración de Friedmann*. Es usual referirse a ambas como las ecuaciones de Friedmann, pero en ocasiones (como en este trabajo) se suele reservar el nombre de ecuación de Friedmann sólo a la primera.

La ecuación de aceleración es la siguiente:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.6)$$

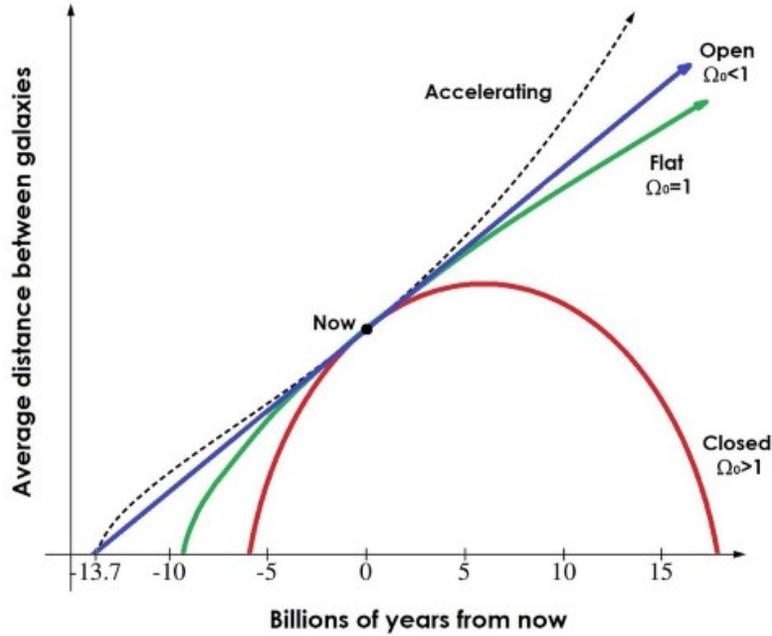


Figura 1.3: Posibles curvaturas del Universo a día de hoy y en el futuro. Se plantea que la distinción entre una geometría y otra es difícilmente distinguible, a menos que se observen tiempos tempranos del Universo. Imagen tomada de [8].

Existe una relación muy importante entre el factor de escala y el *corrimiento al rojo* (z). El corrimiento al rojo, es la consecuencia de un efecto Doppler aplicado a ondas electromagnéticas que viajan a través del espacio. Cuando cuerpos celestes se alejan de la Tierra, la luz que llegan a emitir sufren una reducción en su frecuencia lo que provoca que la longitud de onda se muevan hacia el lado rojo del espectro, de ahí el nombre. De esta forma, el corrimiento al rojo se define como:

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}}, \quad (1.7)$$

donde λ_{obs} es la longitud de onda medida y λ_{emit} es la que se emitió. La relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo es la siguiente [2, 10]:

$$1 + z = \frac{1}{a}. \quad (1.8)$$

También es importante definir que el factor a a un tiempo t_0 cumple con $a(t_0) = 1$. Este tiempo t_0 se escoge por convención al tiempo presente, o bien, al día de hoy. Esto conduce a un resultado esperado: $z(t_0) = 0$. Cabe recalcar que si se evalúa el parámetro de Hubble considerando el tiempo a día de hoy entonces H pasa a ser [2, 10]:

$$H(t)|_{t_0} \equiv H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (1.9)$$

Ahora, si se hace la expansión en serie de Taylor del factor de escala como función del tiempo, alrededor del tiempo a día de hoy t_0 , se encuentra lo siguiente :

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.10)$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2 + \dots, \quad (1.11)$$

y de aquí se define el *parámetro de desaceleración* como [2, 11]:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2}. \quad (1.12)$$

Es importante notar lo que indica el parámetro de desaceleración: si este tiene un valor positivo, entonces la expansión del Universo se está desacelerando; mientras que si q_0 tiene un valor negativo, entonces la expansión del universo se acelera. Además, pese a que q_0 no sea independiente de Ω_0 y de H_0 , este parámetro resulta útil cuando alguno de los otros dos no pueda obtener o resulte más complicado su cálculo [2, 11].

Ahora, también es posible ver al parámetro de desaceleración como una función dependiente del tiempo, o bien, del corrimiento al rojo. Por lo cual, se puede encontrar lo siguiente:

$$q(x) = \frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{H'(x)}{H(x)}x - 1, \quad (1.13)$$

donde $x = 1 + z$ y el apóstrofe indica derivación con respecto a x [12].

Dado un valor de H , existe un valor especial de ρ para el cual se cumple la condición de que el Universo sea plano ($k = 0$), este valor de la densidad de energía se conoce como *densidad crítica* (ρ_c) y está dada por [2]:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.14)$$

A partir de la densidad crítica, es entonces posible definir una cantidad adimensional que cuantifique las densidades de energía del Universo. Así, se define el *parámetro de densidad* de la siguiente forma:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (1.15)$$

Es importante notar que Ω es función del tiempo pero en general, cuando se hace mención en la literatura a los parámetros de densidad, se suelen referir a los valores que toman hoy en día. Es decir, estrictamente se debería escribir como Ω_0 sin embargo se suele obviar el subíndice 0 y se denota simplemente como Ω [2].

Debido a que es posible asociarle a cada componente del Universo (materia, radiación, curvatura, energía oscura, como se verá en la siguiente sección) una densidad de energía propia existe una forma útil de escribir la ecuación de Friedmann en términos de los componentes del Universo. Es decir, se puede conocer cuál ha sido la evolución del Universo si se sabe cuál es la proporción de constituyentes del Universo

en algún tiempo dado. Lo cual resulta útil para teorizar cómo se comportaría el Universo si comenzara con alguna distribución inicial de componentes y también cómo es que se ha comportado dada la distribución que se ve hoy en día. Esta ecuación se escribe de la siguiente forma:

$$E^2(a) \equiv \frac{H^2(a)}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda, \quad (1.16)$$

donde Ω_r se asocia a la radiación, Ω_m a la materia, Ω_k a la curvatura del Universo y Ω_Λ a la Constante Cosmológica, la cual en otros modelos puede ser denotada como Ω_{DE} haciendo referencia a la densidad de energía de la Energía Oscura (con las siglas en inglés) [2, 3].

De la ecuación anterior, los parámetros de densidad deben cumplir con la siguiente condición:

$$\sum \Omega_i = 1, \quad (1.17)$$

esto ya que se representa el total del Universo. Al despejar el parámetro de densidad de curvatura se obtiene la condición $\Omega_k = 1 - \sum \Omega_i$ con $i \neq k$ lo cual ayuda a calcular si se tiene un Universo plano [2, 3].

1.1. Fluidos

Para poder entender la dinámica y la evolución del Universo resulta conveniente suponer que sus componentes se comportan como un fluido. En general, un fluido es una especie de *continuo*. Un continuo es el conjunto de un número tan grande de partículas que no pueden ser descritas individualmente por lo que se recurre a cantidades promedio para describir su comportamiento. A grandes rasgos, se puede definir a un fluido como un continuo cuyos elementos no son capaces de prevenir que otros elementos se deslicen a lo largo de su frontera. Una de las propiedades características de los fluidos es la *presión* [1].

De esta forma se puede definir a un fluido perfecto como uno que no tiene interacciones entre elementos del fluido y la única fuerza que actúa entre ellos es la presión. En RG un fluido perfecto se define como aquel que no tiene viscosidad y no conduce el calor en el Marco de Referencia Momentáneamente Comóvil (MRMC o MCRF por sus siglas en inglés). Este marco de referencia se refiere a un sistema de referencia inercial propio para un elemento de fluido, por lo que se define en el instante que se desee estudiar y con la velocidad del fluido en ese momento. Al considerar un fluido perfecto en RG con su respectivo MCRF el tensor de energía-momento asociado resulta ser sencillamente [1]:

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{a^2} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Es posible preguntarse cómo se vería la evolución en el tiempo del tensor energía-momento de un fluido perfecto. Y la respuesta a esta pregunta sería la *ecuación de*

continuidad o la *ecuación de fluido*. Al aplicar que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ al tensor energía-momento de un fluido perfecto se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (\text{Ecuación de continuidad})$$

La termodinámica nos da herramientas para estudiar el comportamiento de los fluidos, quizá la más importante para la cosmología sería la *ecuación de estado*. Una ecuación de estado es una ecuación conformada por variables de estado las cuales describen el estado en el cual se encuentra el elemento que se analiza. Dicha ecuación puede escribirse de tal manera que únicamente sea relevante la naturaleza del fluido sin importar la cantidad de este por lo cual se usan valores intensivos.

En cosmología, se suele considerar al Universo como un fluido perfecto por lo cual los conceptos anteriores resultan de suma importancia. En este ámbito las variables de estado que se utilizan para definir la ecuación de estado son la presión p y la densidad de energía ρ . Se suele definir a la ecuación de estado ω (que es un número adimensional) de la siguiente manera:

$$\omega \equiv \frac{p}{\rho}. \quad (\text{Parámetro de ecuación de estado})$$

Al darle algún valor a ω o bien alguna restricción se define una ecuación de estado la cual puede describir distintos componentes del Universo (como materia o radiación). Es necesario definir una ecuación de estado para que las ecuaciones de Friedmann puedan tener solución [1, 2, 10]

Unos ejemplos de las posibles ecuaciones de estado serían las propuestas por el modelo Λ CDM. En el modelo estándar se puede estudiar la evolución del Universo en distintas épocas en las cuales predominaban distintos componentes. Por ejemplo, para estudiar la época dominada por la radiación se usa la ecuación $\omega = \frac{1}{3}$; para estudiar la época dominada por materia se usa $\omega = 0$ y para la época dominada por la constante cosmológica se usa $\omega = -1$. Estas ecuaciones entran dentro de una categoría denominada barotrópicas dado que se puede expresar la presión p como una función de la densidad ρ , es decir se pueden escribir de la forma $p = \omega\rho$ [10].

- **Radiación** ($\omega = \frac{1}{3}$): En este contexto, radiación se refiere a partículas que tienen velocidades relativistas. En el Universo actual sólo la luz y los neutrinos son considerados como partículas relativistas y por ende como radiación. Al usar la Ecuación de continuidad se determina, como se ve en [2], que $\rho \propto \frac{1}{a^4}$.
- **Materia** ($\omega = 0$): La materia en este contexto se entiende como cualquier material que no ejerza presión. Así, al resolver la Ecuación de continuidad se encuentra que $\rho \propto \frac{1}{a^3}$.
- **Energía Oscura** ($\omega = -1$): Al resolver la Ecuación de continuidad con este valor de la ecuación de estado, se encuentra que la densidad de energía es una constante.

1.1.1. El modelo estándar Λ CDM y sus problemáticas

Todas las consideraciones y consecuentes ecuaciones que se han explicado hasta el momento forman parte del modelo cosmológico estándar que actualmente es el más aceptado por la comunidad científica. Sin embargo falta una consideración surgida de observaciones astronómicas que discrepaba con la teoría.

Al hacer mediciones de la velocidad de rotación de las galaxias se puede apreciar que las zonas más externas giran con una velocidad similar a la rotación de su centro; sin embargo, según las predicciones de derivadas de los modelos de rotación de la galaxias, la velocidad de tales zonas debería ser mucho menor. Dicho comportamiento sugiere que las galaxias tienen más materia de la cual se aprecia por lo que se plantea la existencia de la denominada *materia oscura*. Más evidencia observacional sobre la existencia de la materia oscura consta de la observación a través de lentes gravitacionales en las cuales la materia visible no basta para obtener describir la distorsión observada. De igual forma la existencia de materia oscura permite explicar la formación de estructuras como galaxias y cúmulos [10, 13-18].

Al día de hoy, se considera un modelo particular de materia oscura denominado *Cold Dark Matter* (Materia Oscura Fría) como el más probable de explicar las observaciones. La parte de *Cold* en el nombre se refiere a que la materia oscura no es relativista. Además, la mayoría de los modelos proponen que la no emita radiación y es uno de los motivos por lo cual, según las propuestas, ha resultado tan difícil de detectar. Sin embargo los grandes esfuerzos y la falta de resultados en la detección de materia oscura presentan dudas respecto a su naturaleza [13].

Al juntar todas estas ecuaciones y consideraciones se tiene el modelo conocido como Λ CDM (Λ - Cold Dark Matter) el cual consta de dos propuestas basadas en las observaciones. La primera es considerar el efecto de la constante cosmológica introducida por Einstein y tomarla como la causante de la expansión acelerada del Universo, es decir, la constante cosmológica funge como *energía oscura* en este modelo. La segunda consta en suponer que en el Universo, la mayoría de la materia es algún tipo de materia que no emite radiación conocida como *materia oscura* y ésta efectúa la mayor parte de las interacciones gravitacionales a grandes escalas [13-18].

De esta forma, el modelo Λ CDM está compuesto de 6 parámetros libres, los cuales son: la densidad de bariones $\Omega_b h^2$, la densidad de materia oscura fría $\Omega_{DM} h^2$, el horizonte de sonido a tiempo de la última dispersión θ_{MC} , el índice espectral n_s , la amplitud de fluctuación de la curvatura Δ_R^2 y la profundidad óptica de la reionización τ [19].

El modelo de Λ CDM tiene un gran éxito y funciona para explicar diversos fenómenos astronómicos y diversos conjuntos de datos obtenidos observacionalmente. De esta forma el modelo se estandarizó como el más aceptado por la comunidad desde los inicios del siglo. Sin embargo, en las últimas décadas se han acrecentado la cantidad y la magnitud de los problemas tanto teóricos como observacionales que existen dentro del modelo.

Por ejemplo, uno de los problemas es el conocido como *problema de la coincidencia*, cual consiste en que los valores de la densidad de la materia oscura y de la energía oscura tienen el mismo orden de magnitud en la época actual. Este hecho no tiene

una explicación clara de por qué sucede, especialmente si se considera que la energía oscura y la materia oscura surgen como explicación de observaciones de fenómenos totalmente distintos. Es decir, mientras una fomenta la expansión del Universo, la otra funge como principal fuente de energía gravitacional. [3, 20, 21].

Tampoco se conoce cuál es la naturaleza de la materia oscura, actualmente existen diversos modelos de materia oscura que podría existir dentro de las características generales de la materia oscura fría. A pesar de haberse realizado experimentos con fin de detectar y probar de forma definitiva la existencia de la materia oscura, ninguno ha tenido éxito hasta la fecha [13].

Otro es el *ajuste fino* (o *fine-tuning* en inglés), el cual se refiere a que los valores numéricos de las constantes fundamentales deben ser específicos y de variar poco este valor, el fenómeno físico sería completamente distinto. En el modelo de Λ CDM se ve presente el problema de ajuste fino y estaría relacionado a la naturaleza de la energía oscura [3, 10].

En los modelos a la constante cosmológica se le suele asociar con la energía del vacío. Es por ello que se ha buscado entonces cuál sería su densidad de energía. Para ello existen dos métodos, el primero es mediante las observaciones directas, donde se obtiene un valor extremadamente pequeño (aproximadamente por cada metro cúbico tendría la misma energía que un protón). El segundo método es utilizando la teoría cuántica de campos y calcular la energía del vacío para después asociarla con la constante cosmológica, sin embargo, a partir de estos cálculos se encuentra una diferencia exorbitante en la magnitud del resultado; se encuentra que la diferencia de la magnitud entre el resultado de las observaciones y los cálculos teóricos correspondientes a la escala de Planck discrepan por 10^{122} órdenes de magnitud según los cálculos más reconocidos o bien 10^{50} en los cálculos más optimistas [22, 23].

La incompatibilidad de los resultados entonces dan origen a uno de dos problemas, o bien existe una o varias contribuciones de partículas cuya suma dé exactamente la discrepancia entre resultados, o bien la constante cosmológica no es la energía del vacío (o al menos no únicamente) y generaría preguntas como ¿de dónde proviene?, ¿es consecuencia de efectos cuánticos?, ¿es una propiedad intrínseca del espacio-tiempo mismo?, etc.

Otro problema surge de inconsistencias en las mediciones observacionales que podrían ser resueltas si se considera a un Universo cerrado. Lo cual sería una contradicción directa a la consideración de la planitud del Universo [25].

También cabe mencionar uno de los mayores problemas que surgen del modelo Λ CDM, y quizá el más importante actualmente, es conocido como la **tensión de Hubble**. Este problema ha surgido en la última década debido al desarrollo de la tecnología que ha generado datos más precisos. La tensión de Hubble se refiere a la discrepancia en la medición de la constante de Hubble H_0 a través de dos métodos distintos. Los dos datos más importantes y reconocidos hasta el momento son los obtenidos por las observaciones del satélite Planck sobre el CMB y el valor obtenido por la colaboración SH0ES a través de datos de supernovas. En la Figura [1.4] se encuentra un diagrama donde se ilustra la diferencia de resultados y el progreso de la tensión a lo largo de las últimas dos décadas [24, 26].

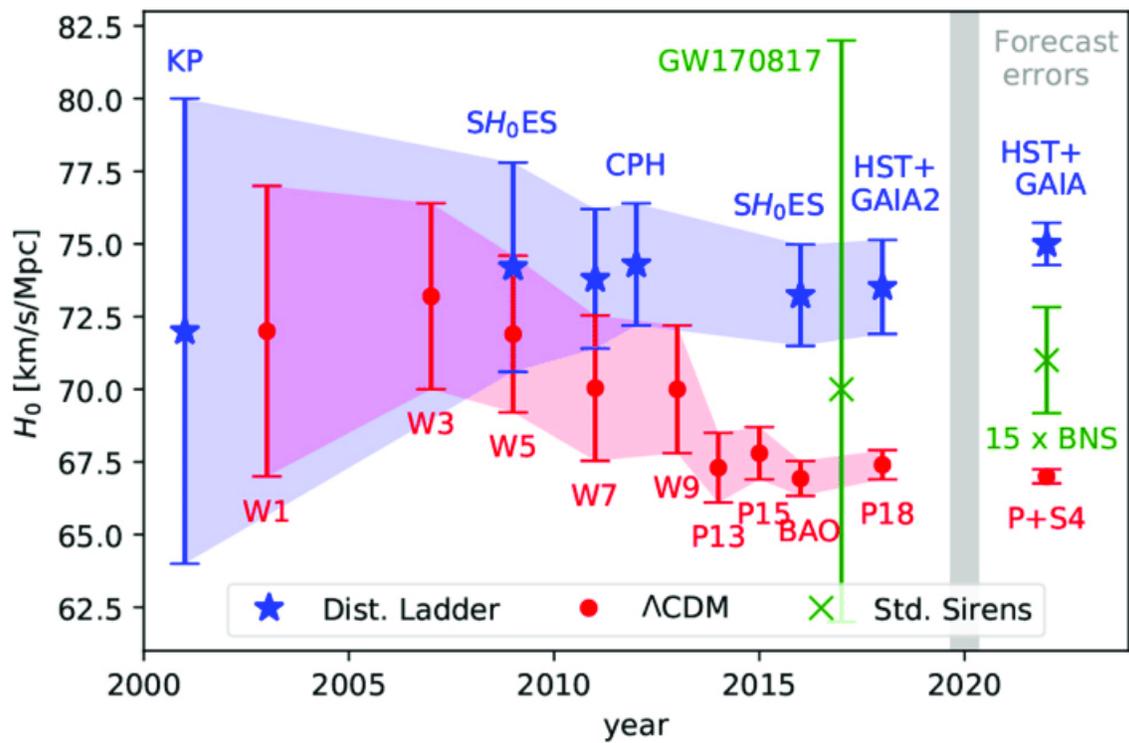


Figura 1.4: Diagrama de la tensión de Hubble tomado de [24]. Se aprecia la diferencia de resultados mediante los distintos métodos de calcular la constante de Hubble.

2 Alternativas a Λ CDM

Las distintas problemáticas del modelo estándar han propiciado el desarrollo de modelos alternativos. La mayoría surgen de modificaciones relativamente sencillas a Λ CDM o a las ecuaciones de campo Einstein en lugar de plantear una teoría totalmente nueva. Al suponer que la RG estuviera equivocada, se tendría que desarrollar otra teoría la cual describa el comportamiento de la gravedad igual que la RG e inclusive aún mejor, llenando los huecos de la teoría de Einstein. Pero dado que la supuesta teoría tendría que coincidir en muchos aspectos con la RG y a la vez dar una predicción distinta para el Universo no se ve plausible construir una teoría completamente nueva y distinta a la de Einstein. Es por ello que se suele preferir hacer modificaciones a las componentes cosmológicas de RG. Dichos modelos se denominan “modelos de gravedad modificada” (*modified gravity* en inglés).

Varios otros modelos alternativos surgen con el fin de resolver problemas propios del modelo estándar, como por ejemplo, para explicar la naturaleza de la materia oscura o la energía oscura, entre otros. Este trabajo se enfoca principalmente a las ideas surgidas para explicar el comportamiento de la energía oscura.

Así, otra manera de entender a la energía oscura puede ser la manifestación de algún campo desconocido, o bien de algún tipo de fluido de energía. Dado que la acción de este campo o fluido sería alguna sustancia totalmente distinta a lo que ya se conoce, se ha hecho llamar “quintaescencia” a esta explicación y a los modelos que se originan a partir de esta idea. La evolución que sigue este campo está dada por la siguiente ecuación [27] [28]:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.1)$$

donde ϕ es el campo y $V(\phi)$ su potencial.

En los modelos de quintaescencia la densidad de energía asociada al campo es de $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ y su presión es de $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$. Por ello, la ecuación de estado corresponde a un fluido perfecto barotrópico dado por la ecuación $\omega = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)}$. Cabe mencionar que cuando la energía cinética y la potencial son iguales, se recupera el caso de materia ($\omega = 0$); mientras que cuando la energía cinética es cercana a cero, entonces el parámetro toma un valor de $\omega = -1$ correspondiente a energía oscura [27].

Una propuesta diferente son los modelos denominados “*Phantom Energy*” en los cuales se piensa que la energía oscura cumple con una ecuación de estado en la cual se cumpla que $\omega < -1$. Dicha condición indicaría que la *phantom energy* posee energía cinética negativa causando de esta forma la expansión del Universo. El término

negativo en la energía cinética es uno de los principales puntos en la refutación de estos modelos ya que implica una inestabilidad en el vacío. [29, 30]

2.1. Gas de Chaplygin

Una propuesta para sustituir el modelo cosmológico estándar actual es el modelo de gas de Chaplygin (GC). En su forma más básica, este modelo se originó enfocado en dar una explicación al comportamiento de la energía oscura ya que describe la transición de una etapa de expansión desacelerada a una acelerada. Para ello se toma en consideración una forma peculiar de fluidos perfectos denominados *de Chaplygin* y que satisfacen la siguiente ecuación de estado:

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (2.2)$$

donde A es una constante positiva [31].

Originalmente esta ecuación de estado fue propuesta por S. Chaplygin como una aproximación aerodinámica para calcular la fuerza de sustentación debajo del ala de un avión. Posteriormente, Kamenschik y su grupo reencontraron esta ecuación de estado al trabajar en teorías de supersimetría lo cual los motivó a proponerla como un modelo de energía oscura [31, 32].

En un inicio el gas de Chaplygin se comporta como un fluido sin presión y sufre una transición suave a un comportamiento similar al de una constante cosmológica. Aunado a esto el modelo también se caracteriza por dar una explicación fenomenológica macroscópica para la energía y materia oscura, es decir, unifica el comportamiento observado de la energía oscura y la materia oscura [31-33].

Sin embargo, el modelo presenta desacuerdos con observaciones obtenidas de candelas estándar (supernovas tipo Ia), mediciones del corrimiento al rojo del parámetro de Hubble, estallidos de rayos gamma, entre otros [34]. Por ello surgió una extensión del modelo, y que sigue considerando fluidos perfectos. Dicho modelo es el llamado gas de Chaplygin generalizado (GCG) cuya ecuación de estado es:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (2.3)$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$. Pero al estudiar el modelo se pueden encontrar ligeros problemas con el espectro de potencias causado por perturbaciones adiabáticas de presión cuando α es distinta de cero [34]. Así surgió otra propuesta que se extiende más allá de los fluidos perfectos tomando como base al GCG. Esta se denomina gas de Chaplygin modificado (GCM) y la ecuación de estado que describe este modelo es la siguiente:

$$p = B\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (2.4)$$

El primer término corresponde a la ecuación de estado estándar de un gas ideal y el segundo corresponde a la ecuación de estado de GCG, es posible ver que si $\alpha=0$ entonces se recupera el modelo estándar [33, 35].

Otro modelo que surge de modificar GCG considerando viscosidad el el denominado gas generalizado de Chaplygin viscoso (GCVG). la ecuación de estado perteneciente al modelo es la siguiente [36]:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} - \sqrt{3}\zeta\rho, \quad (2.5)$$

donde ζ es la viscosidad del fluido. Es posible notar que, pese a surgir de ideas físicamente distintas, el modelo GCVG es una reparametrización del modelo GCM. A pesar de esto la literatura no hace mención a esta particularidad, sin embargo se verá que los modelos coinciden en resultados.

En la literatura hay distintas propuestas derivadas del gas de Chaplygin, además de las ya mencionadas, también se encuentran el Nuevo Gas de Chaplygin Generalizado (NGCG), el Gas de Chaplygin Extendido, el Gas de Chaplygin Cósmico Generalizado entre otros. El principal atractivo para considerar los modelos de GC es la descripción del comportamiento dominado por materia no relativista en un inicio y una fase dominada por una constante cosmológica posteriormente con una transición suave en la cual la ecuación de estado efectiva es $p = \alpha\rho$. También es posible plantear los modelos de GC mediante campos escalares. La simpleza en la traducción de las ecuaciones de estado propuestas a este formalismo permite el estudio más a fondo de los modelos. En el Apéndice se menciona más al respecto. Igualmente, la descripción combinada de la materia oscura y la energía oscura es un punto a favor de estas teorías ya que resolvería el problema de la coincidencia y simplificaría el problema de la naturaleza del sector oscuro del Universo. Así también el GC admite generalizaciones supersimétricas lo cual es prometedor desde el punto de vista de la cuántica [31, 32, 35, 37].

Los modelos extendidos de GC han sido puesto a prueba con datos observacionales recientemente en [38] y [39]. En el primer artículo tanto el modelo original como el GCG y el GCM coincidían correctamente al realizar análisis estadísticos, sin embargo los resultados del análisis de fondo y de perturbaciones no favorecieron al GCM pero no pudo ser descartado; en cambio el modelo original y el GCG siguieron siendo consistentes. En el artículo [39], por otro lado, los resultados indican que el GCG y el NGCG tienen bajo apoyo observacional mientras que GCVG y GCM poseen fuerte apoyo de las observaciones y, además, ambos modelos disminuyen la tensión de Hubble.

Es importante indicar que los modelos de gas de Chaplygin parecen presentar inestabilidades a nivel de perturbación. Y para el caso de los modelos generalizados, estos presentan un *blow-up* en el espectro de potencias que no coincide con los datos observacionales pero que aún no permite descartar los modelos.

2.2. Desarrollo de los modelos

2.2.1. Gas de Chaplygin Generalizado (GCG)

El modelo GCG presenta la ecuación de estado [2.3] y al sustituir en la Ecuación de continuidad se puede encontrar una solución para la densidad de energía ρ de la

siguiente forma:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}\right) = \dot{\rho} + 3H\left(\frac{\rho^{\alpha+1} - A}{\rho^\alpha}\right) = 0, \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{a} \frac{da}{dt} = \left(\frac{\rho^\alpha}{\rho^{\alpha+1} - A}\right) \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.7)$$

$$\Rightarrow -3 \ln a = \int \frac{\rho^\alpha}{\rho^{\alpha+1} - A} d\rho = \frac{1}{\alpha + 1} \ln(\rho^{\alpha+1} - A) + C'. \quad (2.8)$$

De esta manera se encuentra que la expresión de la densidad de energía corresponde a:

$$\rho = \left(A + \frac{C}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (2.9)$$

donde C es una constante de integración [37, 39]. Sin embargo se puede reescribir de una forma más conveniente definiendo $A_s = \frac{A}{\rho_0^{\frac{1}{1+\alpha}}}$ y $\rho_0 = (A + C)^{\frac{1}{1+\alpha}}$ la densidad de energía actual. Así:

$$\rho = \rho_0 \left(A_s + \frac{1 - A_s}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (2.10)$$

De esta forma es posible escribir la Ecuación 1.16 propia del modelo GCG de la siguiente manera en función del corrimiento al rojo:

$$E^2(z) = \Omega_b(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + (1 - \Omega_b - \Omega_r) \left(A_s + (1 - A_s)(1+z)^{3\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.11)$$

con $\beta = \alpha + 1$ y donde Ω_b es el parámetro de densidad de la materia bariónica y Ω_r el de la radiación. Además a partir de esta ecuación, como se ve en [40] y en [39], se puede encontrar una ecuación que describe a A_s como función de los parámetros de densidad. Para ello primero se nota que el modelo debe ser igual a Λ CDM si $\alpha = 0$. Entonces, al tomar $z(t_0) = 0$, las componentes deben ser iguales a la ecuación 1.16 (igual a t_0). Así:

$$A_s = 1 - \left(\frac{\Omega_m - \Omega_b}{1 - \Omega_b}\right)^{1+\alpha}. \quad (2.12)$$

Es importante recalcar que $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM}$ para obtener este resultado.

2.2.2. Gas modificado de Chaplygin (GCM)

De manera análoga al modelo anterior, es posible encontrar una solución para ρ al sustituir la Ecuación 2.4 en la Ecuación de continuidad:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho - \frac{A}{\rho^\alpha} + B\rho\right) = \dot{\rho} + 3H\left(\frac{(B+1)\rho^{\alpha+1} - A}{\rho^\alpha}\right) = 0, \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{a} \frac{da}{dt} = \left(\frac{\rho^\alpha}{(B+1)\rho^{\alpha+1} - A}\right) \frac{d\rho}{dt}, \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow -3 \ln a = \int \frac{\rho^\alpha}{\rho^{\alpha+1}(B+1) - A} d\rho = \frac{1}{(B+1)(\alpha+1)} \ln((B+1)\rho^{\alpha+1} - A) + C'. \quad (2.15)$$

$$\rho = \left(\frac{A}{B+1} + \frac{C}{a^{3(B+1)(\alpha+1)}}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (2.16)$$

donde C es una constante de integración. Similarmente, puede reescribirse de casi la misma forma que para el GCG:

$$\rho = \rho_0 \left(A_s + \frac{1 - A_s}{a^{3(1+B)(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (2.17)$$

En este caso la reparametrización usada es:

$$A_s = \frac{A}{(1+B)\rho_0^{1+\alpha}}, \quad (2.18)$$

y se debe cumplir que $B \neq -1$. Y la densidad de energía al día de hoy es $\rho_0 = \left(\frac{A}{B+1} + C\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Para este modelo, la Ecuación 1.16 se vuelve la siguiente:

$$E^2(z) = \Omega_b(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + (1 - \Omega_b - \Omega_r) \left(A_s + (1 - A_s)(1+z)^{3(1+B)\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.19)$$

donde $\beta = \alpha + 1$.

2.2.3. Gas viscoso generalizado (GCVG)

La ecuación de estado característica de este modelo es la ecuación 2.5:

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} - \sqrt{3}\zeta\rho,$$

donde ζ representa la viscosidad del fluido. Como en los modelos anteriores, al resolver para ρ es posible usar una reparametrización y llegar a la siguiente ecuación:

$$\rho = \rho_0 \left[\frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta} + \left(1 - \frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta}\right) a^{-3(1+\alpha)(1-\sqrt{3}\zeta)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (2.20)$$

con $B_s = \frac{A}{\rho_0^{1+\alpha}}$, $0 \leq B_s \leq 1$ y $\zeta < \frac{1}{\sqrt{3}}$. De manera similar que en los modelos anteriores $0 \leq \alpha \leq 1$.

Finalmente, se puede entonces escribir la siguiente ecuación de Friedmann correspondiente a este modelo:

$$E^2(z) = \Omega_b(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + (1 - \Omega_b - \Omega_r) \left[\frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta} + \left(1 - \frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta}\right) (1+z)^{3(1-\sqrt{3}\zeta)\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (2.21)$$

donde $\beta = \alpha + 1$.

2.3. Ecuaciones de estado

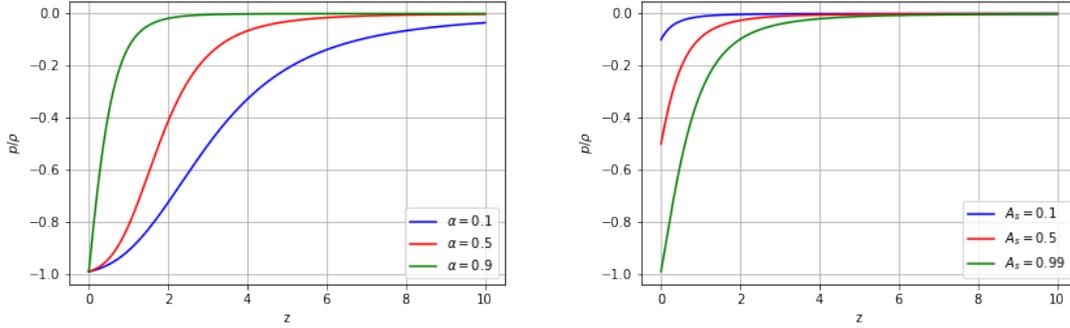


Figura 2.1: Gráficas de posibles parámetros de ecuación de estado ($\omega = \frac{p}{\rho}$) vs el corrimiento al rojo (z) para el modelo de GCG. *A la izquierda:* Se varió el parámetro α y el parámetro A_s se dejó constante con un valor de: 0.99. *A la derecha:* Se varió A_s y el parámetro α se dejó constante con un valor de: 0.1.

A partir de las ecuaciones presentadas en las secciones anteriores, resulta conveniente entonces estudiar cómo se comportan las ecuaciones de estado de cada uno de los modelos antes de realizar los análisis estadísticos.

Para el modelo GCG, al usar las Ecuaciones [2.3](#) y [2.10](#), es posible llegar a la siguiente ecuación:

$$\omega = \frac{p}{\rho} = -\frac{A_s}{A_s + (1 - A_s)(1+z)^{3\beta}}. \quad (2.22)$$

Primeramente, para el modelo GCG, es importante notar que su ecuación de estado lo limita a nunca alcanzar un valor de $\omega = -1$ ya que $A_s \in (0, 1)$. Es decir, el valor mínimo que puede alcanzar el parámetro en el pasado o presente está delimitado por el valor de A_s . En las gráficas de la Figura [2.1](#) se aprecia la sensibilidad del la ecuación de estado a la variación de los dos parámetros del modelo. Es posible notar que el parámetro α modula la suavidad con la cual el Gas de Chaplygin sufre la transición de polvo a energía oscura, se aprecia también lo ya mencionado sobre el

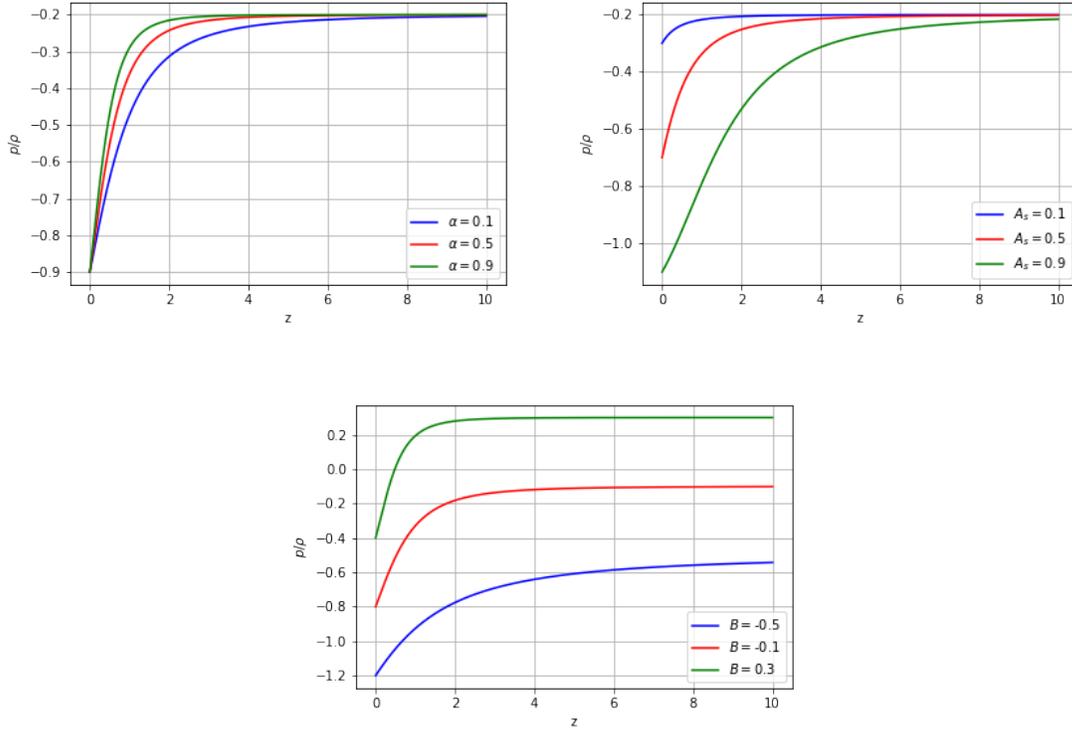


Figura 2.2: Gráficas de posibles parámetros de ecuación de estado ($\omega = \frac{p}{\rho}$) vs el corrimiento al rojo (z) para el modelo de GCM. *Arriba a la izquierda:* Se varió el parámetro α y los parámetros constantes tomaron valor de $A_s = 0.7$ y $B = -0.2$. *Arriba a la derecha:* Se varió el parámetro A_s y los parámetros constantes tomaron valor de $\alpha = 0.1$ y $B = -0.2$. *Abajo:* Se varió el parámetro B y los parámetros constantes tomaron valor de $A_s = 0.7$ y $\alpha = 0.1$.

parámetro A_s y además, se puede observar cómo es que ambos parámetros regulan cuándo inicia la expansión acelerada del Universo.

Para el modelo GCM, mediante las Ecuaciones [2.4](#) y [2.17](#), se puede llegar a la ecuación:

$$\omega = B - \frac{A_s}{A_s + (1 - A_s)(1 + z)^{3(1+B)\beta}}. \quad (2.23)$$

En este caso se observa que el límite superior, es decir qué tanto del gas de Chaplygin se comporta como polvo, está delimitado por el parámetro B . Así también, el valor mínimo al que puede llegar ω está acotado por la resta entre B y A_s . Como se ve en las gráficas de la Figura [2.2](#) la suavidad en la transición de fase en este modelo no resulta tan sensible como en el modelo GCG, en este caso pese a tener variaciones en α , la transición de un comportamiento a otro resulta más homogénea para los distintos valores. La principal diferencia en cada uno de los valores de α es qué tan temprano la expansión acelerada del Universo comienza. Por otro lado, el valor de A_s también contribuye a la determinación de cuándo inicia la expansión acelerada y a los valores a día de hoy de ω . Del parámetro B se observa lo que se mencionó previamente.

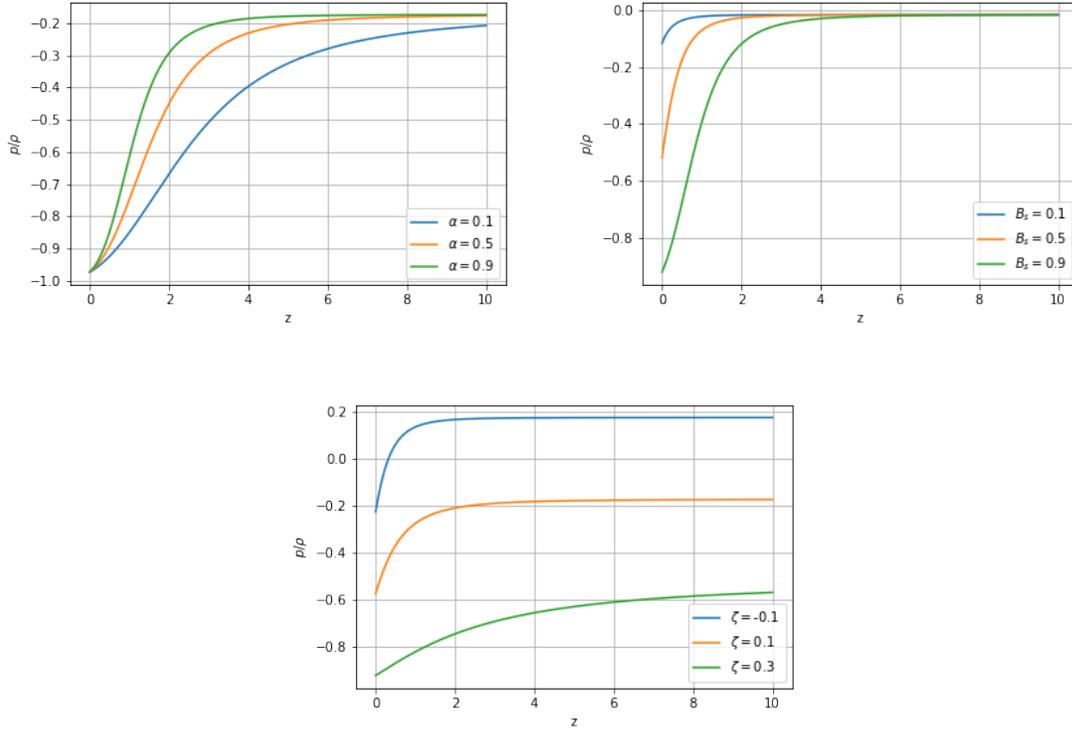


Figura 2.3: Gráficas de posibles parámetros de ecuación de estado ($\omega = \frac{p}{\rho}$) vs el corrimiento al rojo (z) para el modelo de GCVG. *Arriba a la izquierda:* Se varió el parámetro α y los parámetros constantes tomaron valor de $B_s = 0.8$ y $\zeta = 0.1$. *Arriba a la derecha:* Se varió el parámetro ζ y los parámetros constantes tomaron valor de $B_s = 0.4$ y $\alpha = 0.1$. *Abajo:* Se varió el parámetro B_s y los parámetros constantes tomaron valor de $\alpha = 0.4$ y $\zeta = 0.01$.

Finalmente para el modelo GCVG, se obtiene la siguiente ecuación de estado a partir de las Ecuaciones [2.5](#) y [2.20](#):

$$\omega = -\sqrt{3}\zeta - B_s \left/ \left[\frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta} + \left(1 - \frac{B_s}{1 - \sqrt{3}\zeta} \right) (1+z)^{3(1-\sqrt{3}\zeta)\beta} \right] \right. . \quad (2.24)$$

Este caso, pese a tener una ecuación algo más compleja, resulta similar que para el modelo GCM. Aquí el parámetro ζ delimita el comportamiento que tiene el gas a tiempos tempranos del Universo y la suma de los parámetros B_s y ζ es responsable por el valor actual de ω . De las gráficas de la Figura [2.3](#), es posible notar cómo es que la sensibilidad a α es mayor que para el modelo GCM pero menor que para el modelo GCG. De manera análoga a estos modelos, el parámetro α en conjunto con el parámetro B_s determinan cuándo comienza la expansión acelerada.

2.4. Priors

GCG. Los parámetros del GCG tienen limitaciones propias del modelo. Primeramente el prior de α debe cumplir con $0 \leq \alpha \leq 1$. Sería posible considerar un caso para

$\alpha < 0$ pero en dado caso, el modelo dejaría de unificar al sector oscuro del Universo. Por otro lado, el prior del parámetro A_s es el intervalo $[0, 1]$ para prevenir que p se indetermina para ciertos valores del factor de escala.

GCM. Los priors de los parámetros α y A_s de este modelo, son los mismos que para el modelo GCG. Mientras que para el parámetro B sólo tiene la restricción de ser distinto a -1 para evitar indeterminaciones de la densidad de energía.

GCVG. Los priors del parámetro α son los mismos que para los modelos anteriores. Por su parte, el del parámetro B_s cumple que $0 \leq B_s \leq 1$ por motivos similares al prior de A_s de los modelos anteriores. Y finalmente, el prior del parámetro ζ sólo está limitado a $\zeta < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3 Estimación de parámetros

La estadística nos da una herramienta cuyo principal objetivo es derivar una inferencia sobre un fenómeno aleatorio a partir de su observación. Es decir, busca encontrar alguna función que describa el comportamiento o distribución del mismo. Una manera de modelar dicha función es a través del acercamiento paramétrico, en el cual se representa la distribución de las observaciones mediante una función de densidad $f(x|\theta)$ donde sólo el parámetro θ es desconocido pero es de dimensión finita mientras que x es el vector de las observaciones de variables aleatorias. Una variable aleatoria es una función la cual le asigna un valor a un resultado de un evento aleatorio. De esta forma, se define un modelo estadístico paramétrico como aquel que consiste de la observación de una variable aleatoria x , distribuida conforme a $f(x|\theta)$ y θ es un parámetro desconocido que pertenece al espacio vectorial Θ de dimensión finita [41].

Existen dos tipos de enfoques en la interpretación de la inferencia estadística: la frecuentista y la bayesiana. La interpretación frecuentista o clásica, establece la probabilidad de un evento esperado como su frecuencia sobre un número de repeticiones de un procedimiento. Mientras que en la bayesiana, la probabilidad es el nivel de certidumbre, o bien, el *grado de creencia*. Además, en la estadística bayesiana el conocimiento previo del fenómeno influye en la inferencia [41, 42].

En el contexto de la cosmología, para confrontar la teoría con los datos, se utiliza la estadística bayesiana por sobre la frecuentista por el simple hecho de que tenemos un único Universo y no somos capaces de crear otros para obtener más datos. Por ello, es necesario entender estadística bayesiana para poder analizar cualquier tipo de modelo cosmológico [42].

El Teorema de Bayes es una de las bases en las cuales se sustenta esta interpretación de la estadística. Dado que el análisis estadístico busca fundamentalmente una inversión (ya que busca encontrar las causas a partir de los efectos observados), el Teorema de Bayes da una descripción general a la inversión de *probabilidades condicionales*. Estas probabilidades se refieren a la probabilidad de que x_1 suceda dado que x_2 también suceda y se escriben como $P(x_1|x_2)$. El Teorema dice que si x_1 y x_2 son eventos con $P(x_1) \neq 0$, entonces las probabilidades $P(x_1|x_2)$ y $P(x_2|x_1)$ están relacionadas a través de la siguiente ecuación [41]:

$$P(x_2|x_1) = \frac{P(x_1|x_2)P(x_2)}{P(x_1)}. \tag{3.1}$$

Un modelo estadístico bayesiano se define como aquel compuesto por un modelo estadístico paramétrico, $f(x|\theta)$ donde f es función de x y depende de los parámetros

θ , y una distribución previa de los parámetros conocida como distribución *a priori* $\pi(\theta)$. Así, es posible obtener una distribución posterior (o distribución *a posteriori*) dada por el Teorema de Bayes [41]:

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}. \quad (3.2)$$

Se define la *verosimilitud* (o *likelihood*) como la densidad escrita de la siguiente forma

$$l(\theta|x) := f(x|\theta), \quad (3.3)$$

es decir, la verosimilitud es una función de θ y depende de la observación x . Esto se debe a que fundamentalmente, se busca hacer una inferencia de θ a partir del fenómeno observado x . Además, es posible notar que la distribución posterior $\pi(\theta|x)$ es proporcional a la verosimilitud de θ por la distribución *a priori*.

Otra forma de escribir el Teorema de Bayes es escribiendo explícitamente la dependencia de un modelo o hipótesis (H) en las probabilidades. Así, puede escribirse:

$$P(\theta|D, H) = \frac{P(D|\theta, H)P(\theta|H)}{P(D|H)}. \quad (3.4)$$

En este caso estamos considerando que $x_1 \rightarrow D$ conforma a un conjunto de datos y $x_2 \rightarrow \theta$ al vector de parámetros del modelo en cuestión.

Se conoce como *Evidencia Bayesiana* a $\mathcal{Z} \equiv P(D|H)$ (o también se conoce como “verosimilitud marginal”), la cual actúa como un factor de normalización y es, además, el promedio de la verosimilitud:

$$P(D|H) = \int P(D|\theta, H)P(\theta|H)d^N\theta, \quad (3.5)$$

donde N es la dimensión del espacio de parámetros [41].

Al comparar dos modelos distintos, se toma la diferencia en logaritmo de sus Evidencias Bayesianas, la cual se conoce como *Factor de Bayes*:

$$\mathcal{B}_{0,1} \equiv \ln \frac{\mathcal{Z}_0}{\mathcal{Z}_1}, \quad (3.6)$$

en donde el subíndice indica los distintos modelos.

3.0.1. Algoritmo Metropolis-Hastings

El algoritmo que se utiliza en el código *SimpleMC*, [43] el cual es el código de inferencia bayesiana con el que se analizaron los modelos, es uno conocido como Metropolis-Hastings. Este algoritmo se utiliza para aceptar o rechazar “pasos”, de forma que se vaya creando una *cadena de Markov*. Por este motivo, este algoritmo encaja dentro de los métodos conocidos como *MCMC* por las siglas en inglés de *Markov Chain Monte Carlo*.

Las cadenas de Markov son sucesiones discretas dentro del espacio de parámetros que convergen a un valor y evolucionan dependiendo únicamente del paso anterior. Además, permiten construir una visión progresiva de la distribución objetivo [41].

El algoritmo tiene una función con densidad $q(x, y)$ y si la distribución objetivo tiene una densidad g entonces el algoritmo es el siguiente [41]:

Se inicializa escogiendo un valor inicial arbitrario $x^{(0)}$ y corre a partir de $t \geq 1$.

1. Dado $x^{(t-1)}$, se genera $\tilde{x} \sim q(x^{(t-1)}, x)$.
2. Se computa

$$\rho(x^{(t-1)}, \tilde{x}) = \min\left(\frac{g(\tilde{x})/q(x^{(t-1)}, \tilde{x})}{g(x^{(t-1)})/q(\tilde{x}, x^{(t-1)})}, 1\right).$$

3. Con probabilidad $\rho(x^{(t-1)}, \tilde{x})$, se acepta \tilde{x} y se hace $x^{(t)} = \tilde{x}$. De otra forma se rechaza \tilde{x} y se hace $x^{(t)} = x^{(t-1)}$.

Este algoritmo permite analizar la distribución objetivo en diferentes zonas de interés. El hecho de que se genere cierta probabilidad como criterio de aceptación permite al algoritmo no permanecer en algún máximo local y así extraer información sobre otras zonas de la distribución que con otros algoritmos no sería posible encontrar. El código de *SimpleMC* utiliza el criterio de convergencia de Gelman-Rubin. El cual busca la convergencia de múltiples cadenas de Markov al comparar las variaciones entre ellas.

3.0.2. Muestreo Anidado

El código de *SimpleMC* también tiene la opción de utilizar otro algoritmo útil en la estadística bayesiana conocido como *Muestreo Anidado* o *Nested Sampling* en inglés. Este algoritmo obtiene tanto la distribución posterior como la verosimilitud marginal y su enfoque es similar a una integral de Lebesgue [44].

A grandes rasgos, el algoritmo sigue los siguientes pasos [44]:

1. Evalúa la verosimilitud de un número de puntos N tomados al azar de la distribución a priori. Estos puntos se conocen como *livepoints* ya que son los que en cada iteración se analizan.
2. Elimina el *livepoint* con la peor verosimilitud (peor ajuste) y lo reemplaza con otro punto al azar del prior que tenga una verosimilitud mayor al anterior.
3. Se itera el procedimiento anterior varias veces hasta que se cumple con un criterio de convergencia, el cual suele ser un límite de *livepoints* que se tienen verosimilitudes cercanas al máximo (o máximos) encontrado. Al llegar a este punto, otras iteraciones no mejorarían significativamente el resultado.

4. A partir de los puntos retirados en cada iteración se puede encontrar el “nivel de altura” de la integral que corresponde a la contribución de estos puntos a la distribución posterior. De esta manera se encuentra así tanto la verosimilitud marginal como la distribución posterior.

Este algoritmo permite estudiar una zona amplia del espacio de parámetros y facilita el análisis fuera de zonas de máximos locales que pueden resultar complicadas de estudiar con otros métodos de cadenas de Monte Carlo. Sin embargo, en el límite cuando el tiempo de cómputo tiende a infinito, el Muestreo Anidado y el MCMC resultan equivalentes y dan los mismos resultados de un mismo conjunto de datos con las mismas distribuciones a priori.

3.0.3. Comparación de modelos

Para poder comparar dos modelos distintos es necesario determinar alguna característica cuantitativa que permita determinar si un modelo es mejor respecto a otro. En primera instancia se podría considerar el factor de Bayes, como ya se mencionó, sin embargo por la complejidad del cálculo de sus integrales resulta conveniente optar por alternativas. Se opta entonces por tomar en cuenta la máxima verosimilitud y, debido a lo señalado en [45], al ignorar la distribución y considerar que la distribución posterior tiene comportamiento gaussiano, es posible así relacionar la distribución posterior con la verosimilitud.

La máxima verosimilitud es considerada ya que de esta forma se obtiene el conjunto de parámetros más probable que describe al modelo dado según los datos utilizados. Cuando las condiciones anteriores se cumplen, es posible escribir la función de la verosimilitud a maximizar como la siguiente:

$$l(x|\theta) = l(x|\theta_0) \exp \left\{ \left[-\frac{1}{2}(\theta_i - \theta_{0i})H_{ij}(\theta_j - \theta_{0j}) \right] \right\}, \quad (3.7)$$

donde H_{ij} es la matriz hessiana. El exponente de esta ecuación se busca minimizar para maximizar la verosimilitud y de esta forma se define la función de la *chi cuadrada*:

$$\chi^2 \equiv (\theta_i - \theta_{0i})H_{ij}(\theta_j - \theta_{0j}). \quad (3.8)$$

Por lo cual, el maximizar χ^2 es equivalente a minimizar la verosimilitud [45] [46].

Otro parámetro comparativo que resulta útil es la *chi cuadrada reducida*, la cual toma en cuenta el número de datos que se han ajustado y el número de parámetros de un modelo y busca que su valor sea lo más cercano a 1 posible. La expresión para χ_{red}^2 es la siguiente:

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi_{min}^2}{\nu}, \quad (3.9)$$

donde $\nu = n - k$ son los grados de libertad, n el número de datos y k el número de parámetros del modelo. Se busca que χ_{red}^2 sea cercano a 1 debido a que si $\chi_{red}^2 \ll 1$ se dice que el modelo está “sobreajustado”; por otro lado, si $\chi_{red}^2 \gg 1$ entonces se tiene un mal ajuste.

Es necesario considerar qué tan bien un modelo explica los datos y, además, qué tan complejo es el modelo. Esto viene del principio filosófico conocido como la *navaja de Okham*:

“La solución más sencilla o simple a un problema es la correcta”.

Siguiendo este principio, se suele penalizar a los modelos que más parámetros tengan, mientras que se recompensa el buen ajuste de datos. Los dos métodos más utilizados, en ausencia de la Evidencia Bayesiana, para comparar modelos son los criterios de información: el *criterio de información Akaike* o *AIC* por sus siglas en inglés; y el *criterio de información Bayesiana* o *BIC* [42, 47].

Por su parte se busca minimizar el AIC, el cuál está dado por:

$$AIC = 2k - 2 \log l, \quad (3.10)$$

donde k es el número de parámetros del modelo y l es la verosimilitud máxima del modelo. Este criterio surge al aproximar la entropía relativa de Kullback-Leibler [42, 47].

Mientras que el BIC está dado por:

$$BIC = k \log n - 2 \log l, \quad (3.11)$$

donde n es el número de datos. Proviene de una aproximación del factor de Bayes. El factor de Bayes también proporciona una manera mediante la cuál se pueden comparar los modelos pero debido a que calcular su integral resulta complejo y consume mucho tiempo de cómputo, no se suele usar [42, 47].

4 Datos

Para poder comprobar estudiar cualquier modelo físico es necesario estudiarlo con datos provenientes de los fenómenos físicos que se buscan explicar. Esto no es ninguna excepción para los modelos cosmológicos y para poder estudiarlos se utilizan principalmente datos recopilados por la astronomía observacional.

Unos de los eventos astronómicos más vistosos son las *supernovas* debido a que, a grandes rasgos, son grandes explosiones donde las estrellas incrementan excepcionalmente su luminosidad [48]. Existen diferentes tipos de supernovas, pero para este trabajo las más importantes son las del tipo Ia.

Las supernovas Ia (SN Ia) son causadas por la explosión de una enana blanca (la cual es un remanente de una estrella de menos de 10 masas solares) que se encuentra en un sistema binario. Para que esta supernova ocurra debe haber una transferencia de masa de la estrella compañera a la enana blanca. Esto provoca que la densidad de la enana blanca rebese cierto límite y por consecuencia explote. Este proceso está bien caracterizado y posee una luminosidad particular. Debido a estas propiedades, las SN Ia, son usadas como *candelas estándar*. Es decir, son objetos cuya luminosidad se conoce por lo cual, al medir el brillo aparente, es posible determinar la distancia entre el objeto y la Tierra [2, 10, 48].

Los datos obtenidos en [6] y [7] se basan en observaciones de SN Ia. En los últimos 6 años se han descubierto más supernovas de este tipo que en los 40 años previos, por lo cual su análisis ha permitido medir con mejor precisión los parámetros cosmológicos. A partir de las observaciones de las curvas lumínicas se obtiene el módulo de distancia de las candelas estándar derivado de una relación empírica:

$$\mu_{SN} = m_B^* + \alpha X - \beta C - M_B, \quad (4.1)$$

donde X es el parámetro de extensión, C el de color, M_B es la magnitud absoluta, m_B^* es la magnitud aparente de la banda B , α y β son parámetros de calibración. En el artículo [49] se encuentran los datos binnados (reducidos) que se utilizaron y que forman parte de la liberación de datos del artículo [50]. Los datos binnados están implementados en el código de *SimpleMC* bajo la etiqueta de “SN”, cabe mencionar que los datos completos también se encuentran implementados en el programa pero por cuestiones de tiempo de cómputo se optó por los binnados. Para obtener los datos primero se mide la magnitud aparente fijando la magnitud absoluta: $m_B = m_B^* + \alpha X - \beta C$. Así, para un modelo cosmológico cualquiera, el módulo de distancia es:

$$\mu(z) = 5 \log \frac{D_L(z)}{Mpc} + 25 = m_b - M_B, \quad (4.2)$$

en donde la distancia luminosa $D_L(z) = H_0 d_L(z)$ puede ser calculada en términos del corrimiento al rojo como $d_L(z) = (1+z)r(z)$ siendo $r(z)$ la distancia comóvil [51].

Se han planteado algunos problemas sistemáticos con respecto al uso e interpretación de las supernovas Ia. En los artículos de [52] [53] y [54], se plantean que el análisis de las supernovas presentan prejuicios y consideraciones erróneas, por ejemplo, aquellas supernovas que se encuentran en regiones donde hay formación estelar son más tenues que otras en regiones más tranquilas. Las conclusiones de estos artículos indicarían que para utilizar a las supernovas Ia como candelas estándar hay que realizar procedimientos extras en los cuales se consideren la edad de las regiones para estandarizar y eliminar sesgos en los datos, ya que esto afectaría a los resultados de los análisis donde se usen los datos.

Otro conjunto de datos que se utilizan son los denominados *cronómetros cósmicos*. Los cuales son galaxias masivas que evolucionan pasivamente. Así, se observan este tipo de galaxias en distintos corrimientos al rojo y al determinar su estado de evolución se puede conocer cuánto tiempo ha pasado entre los distintos corrimientos al rojo. El uso de estos datos en las pruebas de distintos modelos cosmológicos se ha acrecentado en últimas fechas ya que los cronómetros cósmicos permiten analizar el progreso de la expansión del Universo independientemente de un modelo cosmológico. Más en concreto, los cronómetros cósmicos permiten obtener una relación del parámetro de Hubble, siendo esta

$$H(z) \approx \frac{-1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

donde la razón $\Delta z/\Delta t$ es la medición en la diferencia de edad en los cronómetros cósmicos. Dentro del código de *SimpleMC* se utilizan los datos que se encuentran en el artículo de [55] donde se hace un análisis más a detalle mediante cronómetros cósmicos de los resultados obtenidos por [56] [57] y [58], estos datos están etiquetados como “HD” en el código [51].

Finalmente, otro conjunto de datos que se encuentran implementados en el código son las Oscilaciones Acústicas de Bariones (o BAOs por sus siglas en inglés). Las BAOs son pequeñas fluctuaciones en la densidad de materia bariónica originadas por las condiciones del Universo temprano durante la época de recombinación. En esta época, la materia se extendía casi uniformemente en un mar de electrones, protones y neutrones mientras la gravedad actuaba sobre estas partículas. Al juntarse, las partículas atraídas aumentaban su temperatura y se generaba una presión debido a las colisiones entre ellas por lo que se volvían a expandir. Así la gravedad volvía a atraer a las partículas volviéndose un ciclo dando origen a ondas de presión similares a ondas de sonido (de ahí el nombre de BAOs).

Al expandirse el Universo, se enfriaron las partículas y cuando los fotones pudieron desacoplarse del resto del plasma por lo que dejaron de haber las condiciones necesarias para que se formaran las ondas de presión. Sin embargo, sus “huellas” quedaron plasmadas en la estructura del Universo. Las variaciones de densidad que produjeron se ven reflejadas en “burbujas” donde es probable encontrar más galaxias que en otras zonas, como se aprecian en la Figura 4.1. Así, las BAOs son usadas como “reglas estándar” ya que permiten medir la distancia angular $D_A = r(z)/(1+z)$. En este

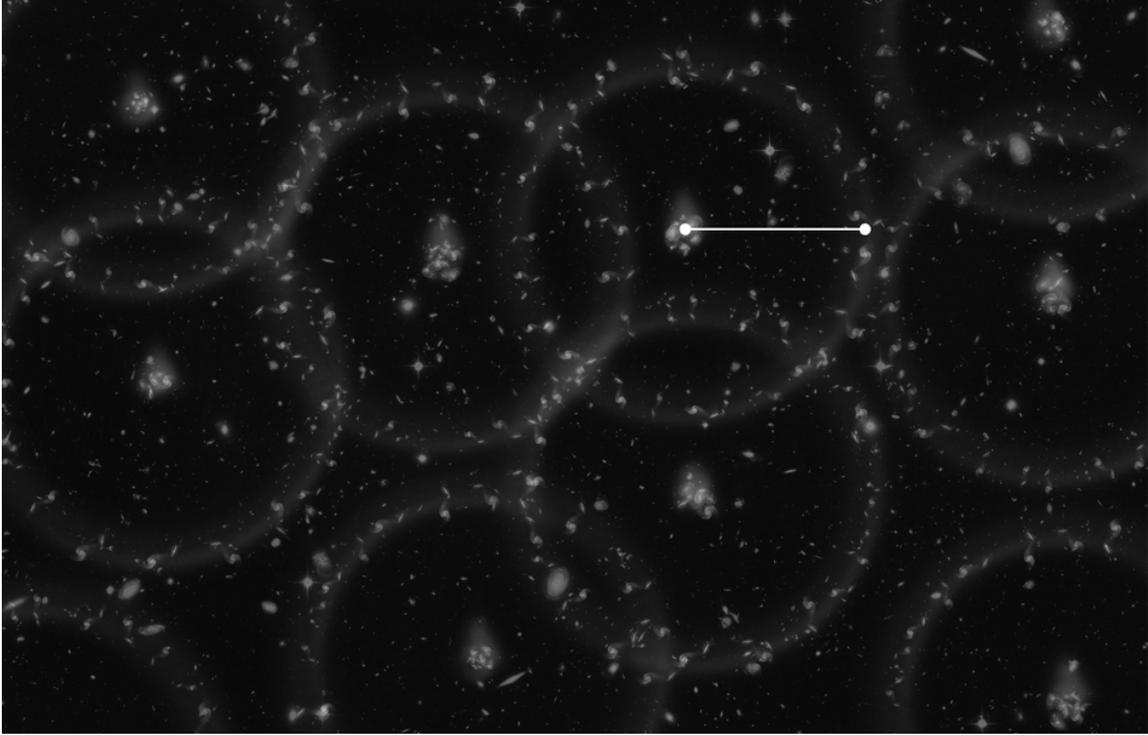


Figura 4.1: Imagen ilustrativa de mediciones de BAOs. Hecha por Zozia Rostomian. Y tomada de [59]

caso, la escala de las BAOs está determinada por el radio del horizonte de sonido,

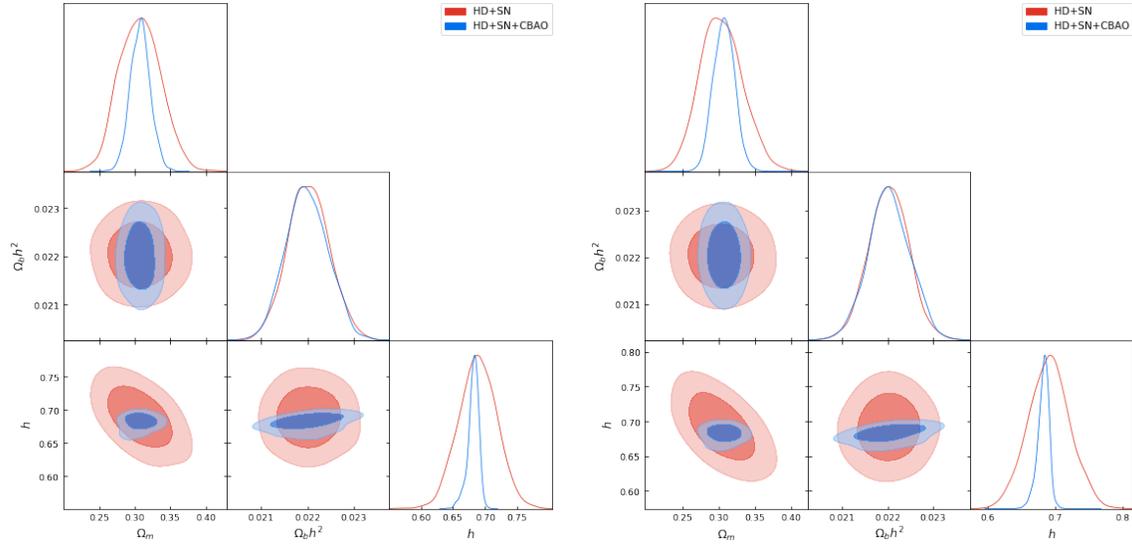
$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z')}{H(z')} dz', \quad (4.4)$$

con $c_s(z)$ la velocidad del sonido del fluido de fotones y bariones. Dado que r_d depende del modelo, los BAOs permiten constreñir $D_A(z)/r_d = H_0 d_A(z)/r_d$, $H(z)/r_d$ y el volumen promedio de distancia $D_V(z)/r_d = [(1+z)^2 D_A^2(z) cz/H(z)]^{1/3}$. Los datos que se utilizan en el código de *SimpleMC* provienen de los artículos [60-65]. Estos a su vez utilizan datos obtenidos de los proyectos SDSS, BOSS [56-58, 66], eBOSS [67] y 6dFGS [68].

5 Resultados

5.1. Distribuciones de probabilidad y valores encontrados

El código de SimpleMC tiene preestablecidas las ecuaciones del modelo Λ CDM para que se puedan correr pruebas y obtener resultados con fines comparativos con respecto de otros modelos. Con esta motivación fue que se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 5.1 y cuyas verosimilitudes se pueden apreciar en la Tabla A.2. De las gráficas mostradas en dicha Figura, es posible apreciar la alta precisión que se obtiene aún para el conjunto de datos “HD+SN”. Además el comportamiento resulta aproximadamente gaussiano.



(b) Resultados de correr Λ CDM en SimpleMC con Muestreo Anidado

Figura 5.1: Resultados de las distribuciones de probabilidad de Λ CDM con la combinación de datos “HD+SN”, y “HD+SN+CBAO”. A la izquierda: Usando MCMC. A la derecha: Usando Muestreo Anidado.

Para obtener resultados con los cuales comparar los modelos de Gas de Chaplygin con el modelo estándar se introdujeron las ecuaciones correspondientes en el programa

SimpleMC. Primeramente se corrieron utilizando la combinación de datos provenientes de supernovas, siendo estas candelas estándar y cronómetros cósmicos, las cuales tienen como etiqueta “HD+SN”. Posteriormente se incluyeron también los datos de “CBAO” los cuales provienen de mediciones de BAOs. Inicialmente se utilizó el algoritmo de MCMC para analizar los modelos, para su uso se estableció un parámetro de convergencia de Gelman-Rubin de 0.005 para asegurarse que las cadenas fueran confiables, esto se muestra en la Figura [A.1](#). Luego se usó el algoritmo de Muestreo Anidado utilizando 500 *livepoints* para todos los modelos. Los resultados de usar Muestreo Anidado se pueden observar en la gráfica de la Figura [5.1\(b\)](#) y en la Figura [5.2](#).

Originalmente se buscó hacer el análisis principalmente con los datos obtenidos de las cadenas de MCMC, sin embargo, se presentó un problema en dichos resultados. Especialmente para el modelo GCG, se encontraba una distribución posterior con comportamiento bimodal para el parámetro α . En un inicio se creyó que era algo intrínseco del modelo, pero al no encontrarse el mismo comportamiento al usar Muestreo Anidado y analizarse con detenimiento las cadenas se determinó que dicho comportamiento se debía a la no convergencia del parámetro. Debido a ello, los resultados estadísticos mostraban el comportamiento bimodal cuando en realidad no existía uno. Por tales motivos, se decidió exponer como resultados principales los obtenidos mediante Muestreo Anidado y explicar en el apéndice los resultados obtenidos mediante MCMC.

Luego de obtener las cadenas, con ayuda de la paquetería de Python “getdist” [\[69\]](#), se extrajo la estadística correspondiente a cada modelo y conjunto de datos. En la Tabla [5.1](#) se pueden observar los valores de los parámetros de cada modelo según los diferentes conjuntos de datos utilizados. Primero se muestran los valores del mejor ajuste y después el dado por el promedio de todas las cadenas. Además, en la Tabla [5.2](#) se muestran las χ^2 mínimas y las χ^2_{red} mínimas que cada modelo obtuvo con los respectivos conjuntos de datos.

Debido a que el modelo Λ CDM por su simplicidad es el que más apoyo tiene por parte de la comunidad científica [\[70\]](#), se obtuvieron los resultados corriendo el código de SimpleMC con las mismas condiciones (*livepoints* y parámetro de Gelman-Rubin, respectivamente). De esta forma, es posible comparar directamente el comportamiento de los modelos de Gas de Chaplygin con el modelo estándar.

Al ver la gráfica de la Figura [5.1\(b\)](#) se ve claramente un comportamiento gaussiano y también la constricción que se genera cuando se añaden los datos de BAOs al análisis. Si además se compara los resultados mostrados en la Tabla [5.1](#), entonces es posible notar que los contornos de confianza se centran en los datos de la tabla. Idealmente, se esperaba un comportamiento similar para los modelos de Gas de Chaplygin.

Para el modelo GCG, entre la gráfica de la Figura [5.2\(a\)](#) y la Tabla [5.1](#), se puede notar que los resultados obtenidos coinciden. Puesto que se observa cómo se encuentran centrados los contornos de criterio en 0.022 para $\Omega_b h^2$, en 0.69 para h y en 0.75 para A_s ; mientras que para α , se aprecia que es menor a 0.5. Estos corresponden a valores cercanos a los mostrados en la tabla. También es posible observar cómo se mejora la precisión de los resultados al agregar más datos, al utilizar los datos de CBAO se constriñen de mejor manera los parámetros.

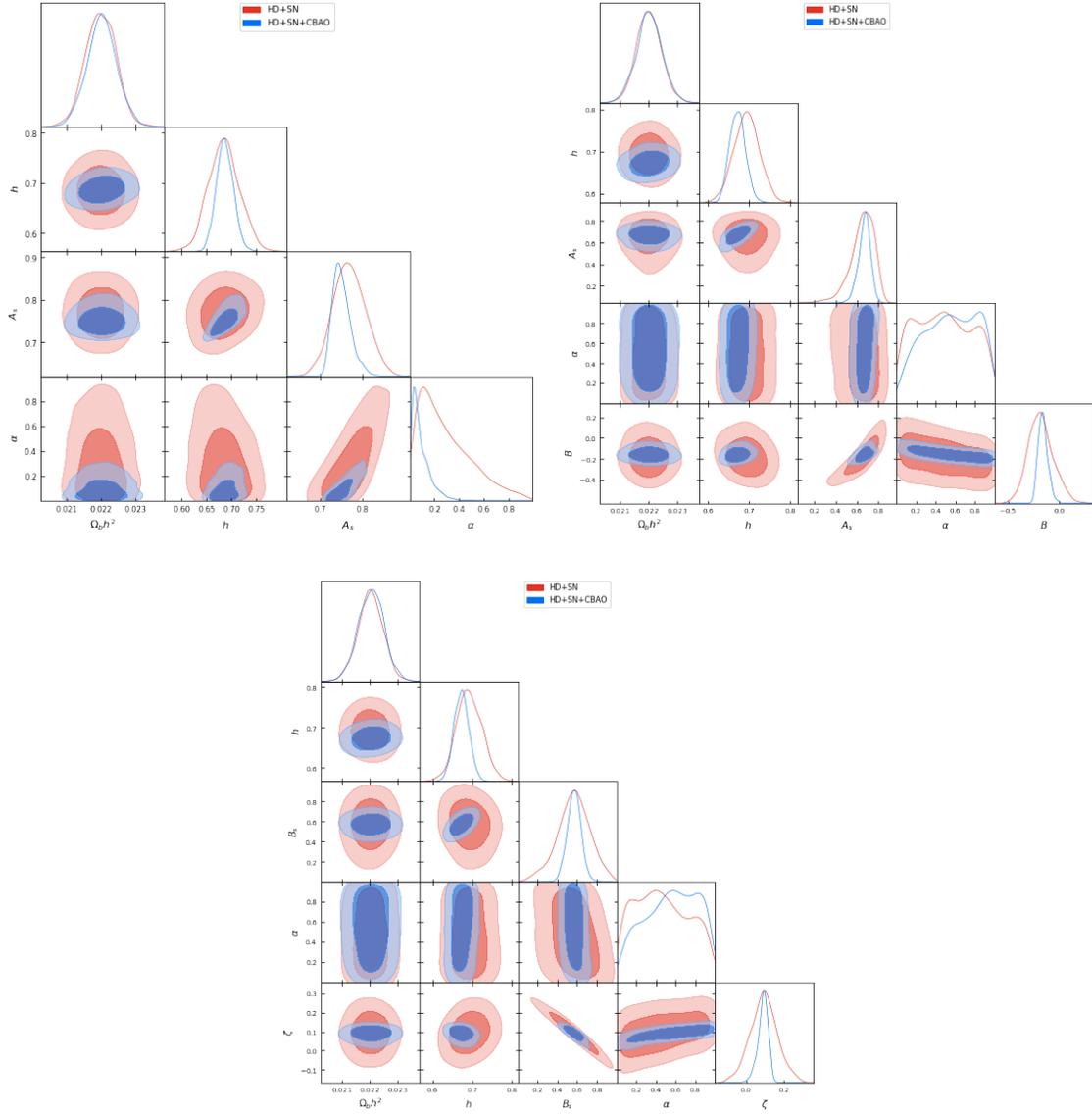


Figura 5.2: Resultados de correr los modelos GCG (*arriba a la izquierda*), GCM (*arriba a la derecha*) y GCVG (*abajo*) con SimpleMC mediante Nested Sampling. Se usaron los datos de HD y SN en todas las cadenas mientras que se agregaron CBAO en otras.

Para la gráfica de la Figura [5.2\(b\)](#) y la Tabla [5.1](#), también se puede ver la coincidencia de los valores centrados en 0.022 para $\Omega_b h^2$, 0.69 para h , 0.7 para A_s y -0.2 para B . Sin embargo, el contorno de α parece no estar constreñido más allá de las limitaciones dadas de los priors. Este resultado podría indicar que el modelo es insensible a este parámetro por lo cual podría eliminarse, es decir, se podría estudiar mediante una contribución del GC original más una constante cosmológica. De igual manera que para el modelo anterior, es posible apreciar la mejora en precisión al utilizar un conjunto mayor de datos.

De manera similar, entre la gráfica de la Figura [5.2\(c\)](#) y la Tabla [5.1](#), se aprecia

cómo es que están centrados en 0.022 para $\Omega_b h^2$, 0.69 para h , en 0.6 para B_s y en 0.1 para ζ . Además, la restricción resultante de α sugiere que este debe tener un valor mayor a 0.4. También, como en los modelos anteriores, se observa la mejoría en la precisión al aumentar el conjunto de datos.

Es importante mencionar sobre la cercanía a los límites de los priors de algunos parámetros, como se observa para α del GCG, para A_s del GCM y para B_s del GCVG. Generalmente, cuando se tiene un comportamiento en el cual los contornos de confianza se acercan mucho a los límites de los priors se puede entender que dicho límite debe ampliarse para poder analizar regiones a las que tienden las cadenas. Sin embargo, en estos casos no es posible realizar dicha ampliación. En la situación de los parámetros A_s y B_s de los modelos GCM y GCVG respectivamente, el límite está dado por la contribución a la densidad de energía total del Universo, de ser mayor que 1, significaría que los gases de Chaplygin poseen más energía que la disponible en el Universo, es decir, la Ecuación 1.17 daría un valor mayor a 1. Por su parte, el parámetro α del modelo GCG sí podría estudiarse en una región más allá del límite inferior 0. Sin embargo, el caso cuando $\alpha < 0$ corresponde a un Gas de Chaplygin que no unifica el sector oscuro, es decir, se tendría que considerar algún tipo de materia oscura y la Ecuación 2.11 dejaría de ser válida. El estudio de este caso queda pendiente de estudiar en otro trabajo futuro.

5.2. Criterios de información

De la Tabla 5.2 se puede apreciar que en realidad las χ^2 son muy similares entre sí. Ya que las diferencias entre Λ CDM y los otros modelos al usar “HD+SN” son: 0.02 entre GCG, 0.03 entre GCM y 0.02 entre GCVG. Y al incluir “CBAO” las diferencias son de: 0.07 entre GCG, 3.40 entre GCM y 3.41 entre GCVG. Estos resultados indican que no hay una mejoría clara entre un modelo y otro. Solo dan indicios de que el GCM y el GCVG podrían tener más apoyo. Por el lado de la χ^2_{red} , el modelo GCM es el que más cercano está a 1 cuando se usan los datos de “HD+SN”, mientras que al considerar también los de “CBAO”, el modelo GCG es el que se acerca más a 1.

Para obtener la Tabla 5.3, se utilizaron las Ecuaciones 3.10 y 3.11 considerando que el conjunto de datos “HD” tiene 31 puntos, “SN” tiene otros 31 y que “CBAO” tiene 13. De estos datos, es posible ver que al considerar el número de parámetros extras de los modelos modifica significativamente la comparación con Λ CDM. De los datos en la Tabla 5.3 es posible ver que ningún modelo obtuvo un resultado menor al obtenido por Λ CDM, es decir, el modelo estándar obtuvo la mejor relación entre simplicidad y descripción de los datos. De los modelos de GC los que mejores resultados tuvieron con el AIC fueron GCM y GCVG cuando se usaron todos los datos, ya que tuvieron una diferencia con respecto a Λ CDM de 0.60 y 0.59 respectivamente. Sin embargo, el modelo GCG obtuvo mejores resultados cuando se usaron los datos de “HD+SN” y no cambió significativamente el criterio de información al agregar los datos de “CBAO”, además, es el modelo que mejores resultados obtuvo con el BIC con diferencias de poco más de 4 puntos en ambos casos. Estos resultados mixtos sugieren que el modelo Λ CDM aún presenta ventaja sobre estos modelos.

	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	Ω_m		
Λ CDM	HD+SN	Mejor	69.2	0.022	0.30		
		Prom	69.1 ± 3.13	0.022 ± 0.0001	0.30 ± 0.029		
	HD+SN +CBAO	Mejor	68.4	0.022	0.31		
		Prom	68.3 ± 0.88	0.022 ± 0.004	0.31 ± 0.015		
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	A_s	
GCG	HD+SN	Mejor	68.9	0.022	0.015	0.731	
		Prom	68.5 ± 3.15	0.022 ± 0.0005	< 0.819	0.770 ± 0.0391	
	HD+SN +CBAO	Mejor	68.2	0.022	0.001	0.729	
		Prom	68.7 ± 1.72	0.022 ± 0.0004	< 0.280	0.751 ± 0.0220	
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	A_s	B
GCM	HD+SN	Mejor	69.9	0.022	0.117	0.720	-0.058
		Prom	69.4 ± 3.14	0.022 ± 0.0004	0.485 ± 0.2880	0.651 ± 0.1155	-0.180 ± 0.1254
	HD+SN +CBAO	Mejor	67.9	0.022	0.975	0.711	-0.191
		Prom	67.2 ± 1.93	0.022 ± 0.0004	0.553 ± 0.2686	0.670 ± 0.0576	-0.157 ± 0.0476
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	B_s	ζ
GCVG	HD+SN	Mejor	69.4	0.022	0.131	0.677	0.034
		Prom	69.3 ± 3.26	0.022 ± 0.0004	0.466 ± 0.280	0.567 ± 0.1676	0.094 ± 0.0732
	HD+SN +CBAO	Mejor	67.8	0.022	0.940	0.570	0.110
		Prom	67.3 ± 1.90	0.022 ± 0.0005	0.556 ± 0.2691	0.571 ± 0.0698	0.090 ± 0.0277

Tabla 5.1: Resultados obtenidos de SimpleMC mediante Nested Sampling de los modelos. En la columna de Ajuste, “Mejor” hace referencia al mejor ajuste que encontró el programa y por ello no tiene incertidumbres; “Prom” se refiere a los resultados que se obtuvieron de promediar las cadenas, la incertidumbre corresponde al límite del 68% de confianza.

Modelo	Datos	χ^2	χ_{red}^2
Λ CDM	HD+SN	47.82	0.810
	HD+SN+CBAO	58.98	0.819
GCG	HD+SN	47.84	0.82
	HD+SN+CBAO	59.05	0.832
GCM	HD+SN	47.87	0.840
	HD+SN+CBAO	55.58	0.794
GCV	HD+SN	47.84	0.839
	HD+SN+CBAO	55.57	0.794

Tabla 5.2: χ^2 y su correspondiente χ_{red}^2 reducida obtenidas de los resultados de Muestreo Anidado.

Modelo	Datos	AIC	δ	BIC	δ
LCDM	HD+SN	53.82	0	60.20	0
	HD+SN+CBAO	64.98	0	71.93	0
GCG	HD+SN	55.84	2.02	64.35	4.15
	HD+SN+CBAO	67.05	2.07	76.32	4.39
GCM	HD+SN	57.87	4.05	68.51	8.31
	HD+SN+CBAO	65.58	0.60	77.16	5.23
GCVG	HD+SN	57.84	4.02	68.47	8.27
	HD+SN+CBAO	65.57	0.59	77.15	5.22

Tabla 5.3: Criterios de información resultantes de los modelos obtenidos mediante Muestreo Anidado.

5.3. Dinámica de los modelos

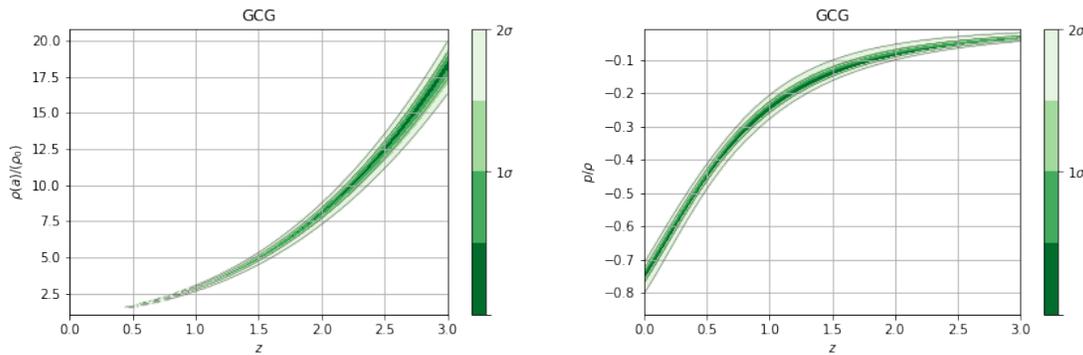


Figura 5.3: Contornos de confianza de la densidad de energía y la ecuación del modelo GCG. Resultados derivados de usar Muestreo Anidado. *A la izquierda:* Densidad de energía vs corrimiento al rojo. *A la derecha:* Ecuación de estado.

A partir de los resultados es posible obtener también el comportamiento de la densidad de energía de los gases de Chaplygin así como sus correspondientes ecuaciones de estado. Para obtener dichas imágenes se utilizó la librería “fgivenx” [71] de Python, la cual utiliza los resultados de las cadenas obtenidas para otorgarles un contorno de confianza.

Para el modelo GCG, es posible ver de la Figura 5.3 cómo es que la densidad de energía tiende a cero cuando se acerca a corrimientos al rojo cercanos. Además, los contornos de confianza tienen una ligera desviación para corrimientos mayores. Es decir, el comportamiento de la densidad de energía del modelo está mejor constreñida para corrimientos al rojo cercanos que para los lejanos. Esto principalmente se debe a que los datos de “HD+SN”, en su mayoría, se encuentran en corrimientos al rojo

cercanos. De la misma figura se ve que el comportamiento de la ecuación de estado es el que se esperaba, es decir, en tiempos tempranos del Universo, el Gas de Chaplygin se comportaría como polvo (con $\omega \approx 0$) para posteriormente pasar a ser un agente que promueve la expansión acelerada del Universo sin llegar al valor de $\omega = -1$. En contraste con la gráfica de la densidad de energía, donde se ve que para tiempos tempranos del Universo, los contornos de confianza disminuyen su variación. Esto se debe al comportamiento mismo de la ecuación de estado que tiende a cero para estas épocas del Universo. Ahora, al considerar la Figura 5.6(a), es posible ver que la expansión acelerada del Universo comienza entre el corrimiento al rojo $z = 0.60$ y $z = 0.75$, lo cual corresponde con lo que se observa también en la Figura 5.3 al considerar que $\omega < -\frac{1}{3}$ para que haya expansión acelerada.

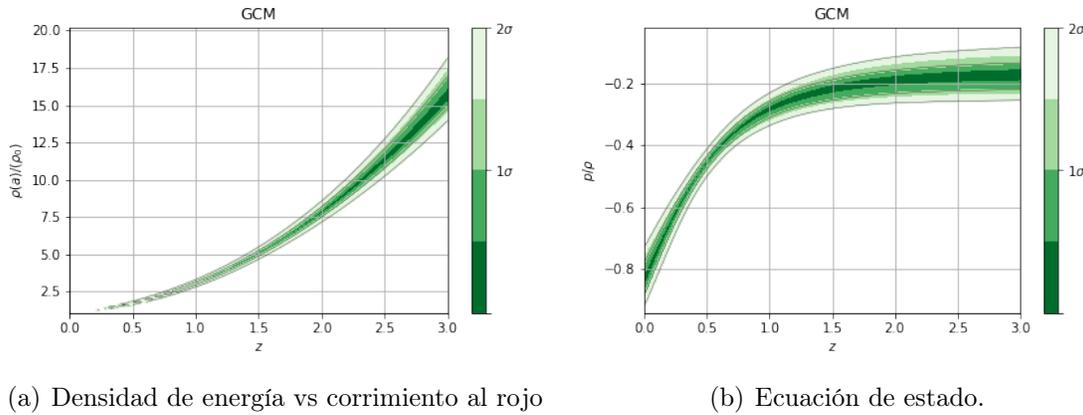


Figura 5.4: Contornos de confianza de la densidad de energía y la ecuación del modelo GCM. Resultados derivados de usar Muestreo Anidado

Del modelo GCM, es posible ver en la Figura 5.4, que la densidad de energía del gas modificado tiende a cero también a tiempos actuales del Universo; asimismo, para tiempos tempranos, los contornos de confianza tienden a desviarse y ensancharse de forma más pronunciada que del modelo anterior. Además del comportamiento de la ecuación de estado puede observarse que la transición pasa de ser cercano a un polvo, alrededor de $\omega = -0.2$, a un agente de expansión acelerada con $\omega \approx -0.8$. En este caso, la ecuación de estado 2.23 tiende al valor de B , lo cual impide que el gas se comporte como polvo en un inicio. Además, los contornos de confianza se ensanchan a tiempos tempranos debido justamente a la incertidumbre asociada al parámetro B . De la gráfica de la Figura 5.6(b), se aprecia que el momento en el cual la expansión acelerada comienza resulta más difícil de distinguir ya que los contornos de confianza son bastante más anchos para su parámetro de desaceleración, sin embargo, es posible determinar que este periodo comienza entre $z = 0.25$ y $z = 0.65$.

Finalmente, del modelo GCVG, se puede ver de la Figura 5.5 cómo es que la densidad de energía se comporta de manera similar que para el modelo anterior; tendiendo a cero para corrimientos al rojo cercanos y con contornos de confianza más amplios a corrimientos más altos. Además, la forma de su parámetro de ecuación de estado también es similar a la del modelo GCM, tendiendo a -0.7 en tiempos actuales y a

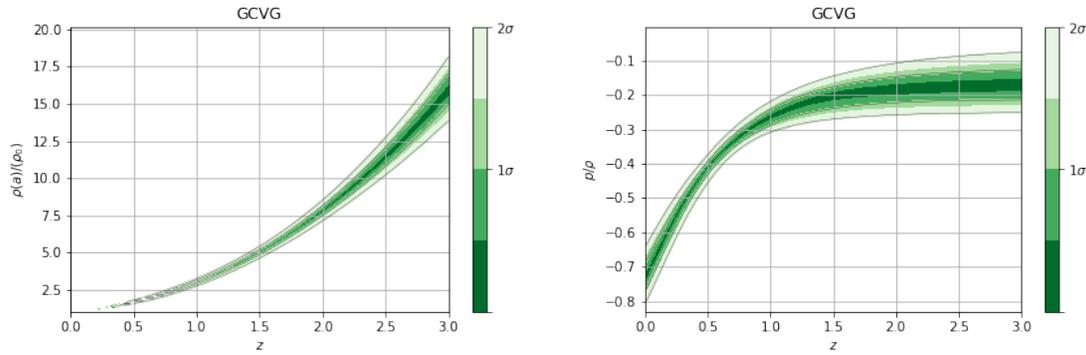


Figura 5.5: Contornos de confianza de la densidad de energía y la ecuación del modelo GCVG. Resultados derivados de usar Muestreo Anidado. *A la izquierda:* Densidad de energía vs corrimiento al rojo. *A la derecha:* Ecuación de estado.

-0.2 en épocas tempranas. El comportamiento de los contornos de confianza, similarmente, se ensancha a tiempos más tempranos pero en este modelo el ensanchamiento es mayor. Además, para el GCVG, el inicio de la época de expansión acelerada inicia entre $z = 0.25$ y $z = 0.65$ como se ve en la gráfica de la Figura [5.6\(c\)](#).

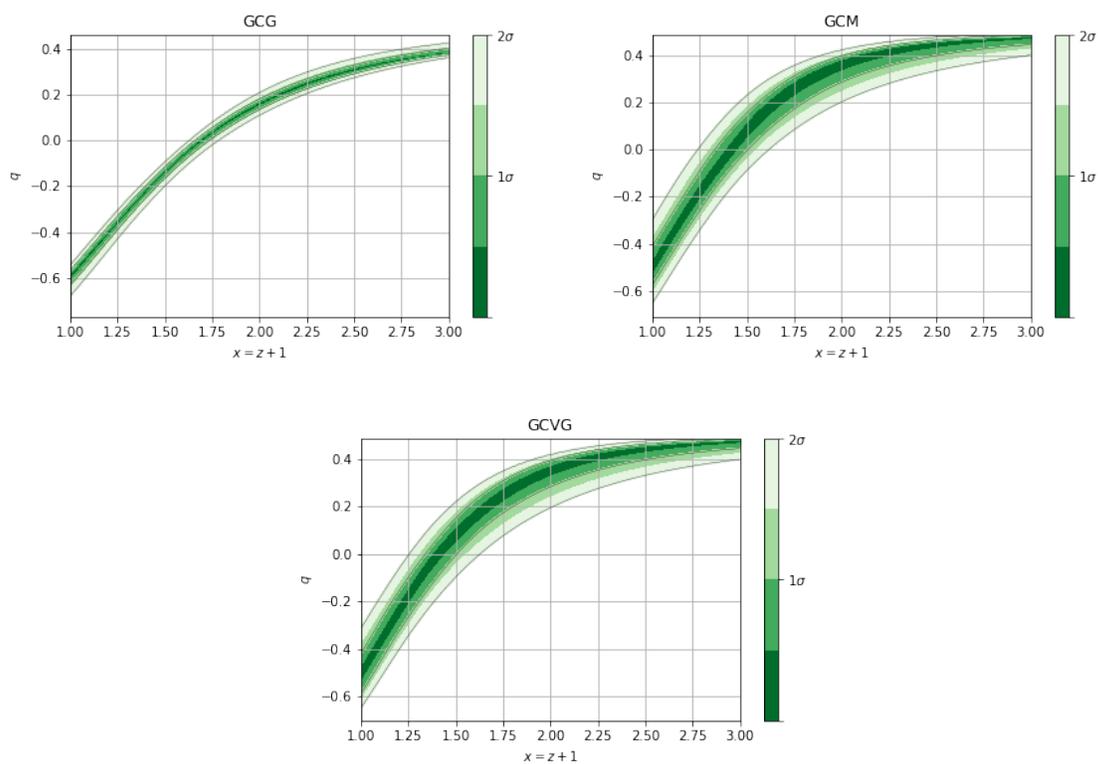


Figura 5.6: Parámetros de desaceleración de los distintos modelos de Gas de Chaplygin usando los datos obtenidos de muestreo anidado. *Arriba a la izquierda: GCG. Arriba a la derecha: GCM. Abajo: GCVG.*

6 Conclusiones

En este trabajo se han presentado diversos resultados con los cuales es posible concluir distintos puntos. Primeramente, los modelos de Gas de Chaplygin explican los datos obtenidos de las observaciones actuales de buena forma. Esto indica que los estos modelos son una alternativa considerable al modelo estándar. Además presentan una solución al problema de la coincidencia y al de ajuste fino al presentar el Gas de Chaplygin como una mezcla de tanto materia oscura como energía oscura y sufriendo una transición suave entre ambos comportamientos.

De hecho, los comportamientos que se observan de las ecuaciones de estado son los esperados. Las ecuaciones de estado de cada uno de los modelos pasan de un comportamiento similar a polvo, a uno similar a una constante cosmológica. Esto es especialmente cierto para el modelo GCG el cual presenta un comportamiento que tiende a cero para épocas tempranas del Universo y posteriormente tomar valor de un agente que promueve la expansión acelerada. Por parte de los otros dos modelos, tienen una ecuación de estado que se desvía del comportamiento de polvo en tiempos tempranos por lo cual estudiar cómo afectaría a la formación de estructuras sería recomendable en un futuro.

A pesar de los buenos resultados de los gases de Chaplygin, el modelo estándar sigue viéndose favorecido. Λ CDM obtuvo criterios de información de 53.82 y 64.98 de AIC y también 60.20 y 71.93 de BIC, por lo que presenta la mejor combinación de ajuste de datos y simplicidad de entre los modelos estudiados. Aún así, los de gases de Chaplygin no tienen discrepancias lo suficientemente grandes como para concluir que los modelos pueden ser descartados. Cabe destacar que al comparar las χ^2_{red} se puede apreciar que el GCG presenta ventaja frente a Λ CDM, por lo cual estudiar los modelos con aún más datos podrá dar un resultado más contundente.

Respecto de los modelos GCM y GCVG: lo comentado en la Sección 4 se pudo comprobar en los resultados. Dado que la reparametrización del GCM al GCVG sea más compleja los resultados computacionales varían pero no de forma significativa. Especialmente en los resultados de χ^2 y χ^2_{red} se aprecia la poca diferencia entre un modelo y otro lo cual conlleva a que tengan, en esencia, los mismos criterios de información. También producen figuras equivalentes y las mayores discrepancias entre estas se deben a los errores altos que se presentan en la parametrización del GCVG. Por ello es posible concluir que ambos modelos resultan ser el mismo pese a que tengan motivaciones y fundamentos físicos aparentemente distintos y que la distinción entre ellos es meramente una reparametrización.

Finalmente, respecto a los algoritmos utilizados es posible decir que ambos re-

sultan ser equivalentes cuando el tiempo de cómputo es el suficiente. Esto se puede apreciar en los resultados que se presentan en el Apéndice A debido a que las figuras, resultados de χ^2 y criterios de información corresponden con discrepancias mínimas. A excepción de la gráfica de la Figura A.1(a), la cual presenta un comportamiento anómalo por cuestiones de cómputo que además se soluciona al correr más cadenas de forma simultánea, las figuras de resultados de Muestreo Anidado y MCMC presentan los mismos comportamientos.

Los modelos de Gas de Chaplygin resultan ser alternativas simples para el modelo estándar que explican de buena forma los datos. Por ello, se plantean estudios a futuro de los cuales se hablan un poco más en el apéndice de perspectivas. De forma resumida, se plantea el estudio de estos modelos con un conjunto de datos mayor y más reciente para verificar si existe alguna diferencia notable con respecto a Λ CDM . También se plantea el estudio permitiendo que el parámetro α tome valores negativos. Asimismo, se pueden encontrar equivalencias de los modelos de GC con otras alternativas por lo que estudiar y encontrar estas equivalencias permite facilitar el análisis de modelos con planteamientos más complejos. Igualmente queda como trabajo a futuro, estudiar estos modelos mediante campos escalares.

A Apéndice

A.1. Resultados con MCMC.

A.1.1. Distribuciones de probabilidad y valores encontrados

Para obtener los resultados mediante el algoritmo de MCMC del código de SimpleMC, se estableció un criterio de convergencia de Gelman-Rubin de 0.005 esto para asegurarse de la convergencia de las cadenas. Así se obtuvieron los resultados para Λ CDM y los modelos de Gas de Chaplygin que se muestran en las Figuras [5.1](#) y [A.1](#) respectivamente.

Para resultados del modelo Λ CDM, en la Figura [5.1](#) se aprecian las distribuciones gaussianas de los contornos de confianza que están bien delimitados por el algoritmo. Se aprecia también cómo es que se constriñen de mejor forma los parámetros al sumar los datos de “CBAO”. Al comparar esta gráfica con los datos de la Tabla [A.1](#) se aprecia el buen ajuste que tiene puesto que las distribuciones mostradas están centradas en los resultados que se muestran en la tabla.

Los resultados del modelo GCG son de particular interés en esta sección. Al observar la gráfica de la Figura [A.1\(a\)](#) se puede apreciar que los parámetros A_s y α presentan uso comportamientos que se desvían de la distribución gaussiana. Mientras que el parámetro A_s presenta un segundo máximo relativamente cercano al primero, el parámetro α presenta una distribución binomial con dos máximos claramente distinguibles. Sin embargo este comportamiento solamente ocurre al usar el conjunto de datos “HD+SN”, ya que al agregar los datos de “CBAO” se recupera el comportamiento gaussiano y se constriñen de buena forma los parámetros. Al analizar el comportamiento de cada una de las cadenas se pudo determinar que la distribución mostrada no se debe a un comportamiento interesante del modelo que se delimita mejor con más datos, sino que esta es la consecuencia de un problema de cómputo al únicamente utilizar una cadena de Markov. Lo que ocurrió en realidad fue que el parámetro no convergía pero permaneció cercano a distintos valores lo cual dio la impresión de converger. Dado que el criterio de convergencia de Gelman-Rubin funciona cuando se utilizan diversas cadenas al compararlas entre ellas y corroborar la convergencia, al utilizar solamente una el algoritmo la divide en dos y compara entre ellas la convergencia. Por ello, en algunos casos es posible que resulte en una convergencia falsa con valores equivocados, como sucedió aquí.

Ahora bien, al enfocarse en los datos que se obtuvieron con el conjunto de datos completo es posible ver que en este caso el algoritmo funcionó de manera adecuada.

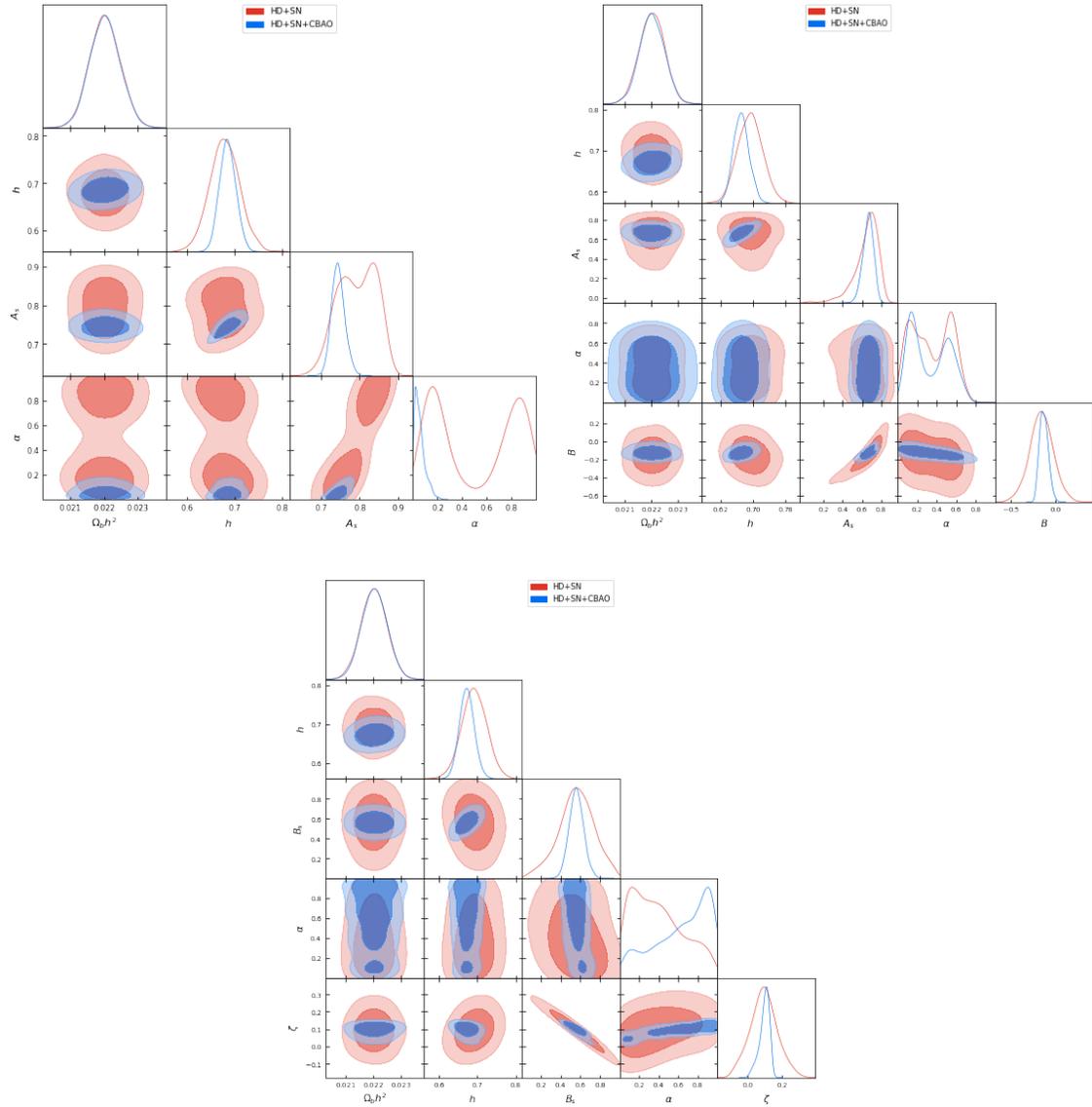


Figura A.1: Resultados de correr los modelos GCG (*arriba a la izquierda*), GCM (*arriba a la derecha*) y GCVG (*abajo*) con SimpleMC mediante MCMC. Se usaron los datos de HD y SN en todas las cadenas mientras que se agregaron CBAO en otras.

Sin necesidad de comparar los datos con los obtenidos mediante Muestreo Anidado, es posible notar de la Tabla [A.1](#) que para el parámetro Ω_h^2 su contorno se centra en 0.022, para h en 68 y para A_s alrededor de 0.74; mientras que para α se aprecia que los valores se concentran siendo menores a 0.2.

Del modelo GCM, es posible notar que, con excepción del parámetro α , todos los parámetros muestran un comportamiento gaussiano y regular como se muestra en la gráfica de la Figura [A.1\(b\)](#). De estos parámetros, al compararlos con los datos de la Tabla [A.1](#) se aprecia que, en efecto, los contornos de confianza se centran en los resultados mostrados. No obstante el comportamiento que presenta α aparenta ser similar al obtenido para el modelo GCG al usar el conjunto de datos “HD+SN”. Pero en este caso, al analizar tanto la cadena como la imagen, el comportamiento se debe a que el parámetro solo pudo ser delimitado a ser menor a 0.8 y cualquier valor entre 0 y 0.8 satisfizo el análisis realizado por el programa. En otras palabras, se muestra en la gráfica que el modelo resultó poco sensible a cambios del parámetro α , el cual debe ser menor a 0.8.

Del modelo GCVG, en la gráfica de la Figura [A.1\(c\)](#), se aprecia un caso similar al anterior. Es decir, para todos los parámetros con excepción del parámetro α , se muestra un comportamiento gaussiano que los constriñe de buena forma y al compararlos con los datos de la Tabla [A.1](#), se puede notar que los contornos de confianza se centran en los resultados obtenidos. Sin embargo para este modelo el parámetro α no presenta constricciones más allá de lo impuesto por los priors. Por una parte, con los datos de “HD+SN”, el programa muestra una ligera preferencia por valores cercanos a cero; mientras que al agregar los datos de “CBAO”, el programa prefiere valores cercanos a uno. A pesar de esto no es posible establecer una restricción clara y fehaciente con lo obtenido ya que, sencillamente, los resultados no dan información relevante de este parámetro.

A.1.2. Criterios de información y dinámica

Respecto de la Tabla [A.2](#), se aprecia que las χ^2 son bastante similares entre sí para el primer conjunto de datos con una diferencia máxima de 0.09 y siendo Λ CDM el modelo con el mejor resultado. A su vez, con el segundo conjunto de datos, la diferencia máxima es de 3.39 siendo el GCVG el modelo que obtuvo el mejor valor. Pero al considerar la χ_{red}^2 , el modelo GCVG es el que más se acerca a uno con los datos de “HD+SN” y al agregar los datos de “CBAO” es el modelo GCG el cual se acerca más.

Ahora, de la Tabla [A.3](#), es posible notar que ningún modelo obtuvo menores criterios que Λ CDM. Aún así el modelo que obtuvo menor diferencia con respecto al modelo estandar fue el GCG, el cual obtuvo los mejores AIC para el primer conjunto de datos y los mejores BIC para ambos conjuntos. Cabe destacar que la diferencia entre los criterios de información al usar unos datos u otros es mínima para este modelo. En cambio los modelos GCM y GCVG sí muestran una diferencia significativa al utilizar más datos. Además estos modelos presentaron un mejor AIC al usar los datos completos y la diferencia entre los criterios de ambos modelos es mínima.

	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	Ω_m		
Λ CDM	HD+SN	Mejor	68.9	0.022	0.30		
		Prom	68.9 ± 3.05	0.022 ± 0.0004	0.31 ± 0.029		
	HD+SN +CBAO	Mejor	68.5	0.022	0.31		
		Prom	68.2 ± 0.90	0.022 ± 0.0004	0.31 ± 0.014		
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	A_s	
GCG	HD+SN	Mejor	69.3	0.022	0.017	0.737	
		Prom	67.9 ± 3.22	0.022 ± 0.0005	< 0.99	0.794 ± 0.0497	
	HD+SN +CBAO	Mejor	68.1	0.022	0.002	0.729	
		Prom	68.5 ± 1.74	0.022 ± 0.0004	< 0.16	0.744 ± 0.0174	
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	A_s	B
GCM	HD+SN	Mejor	69.4	0.022	0.240	0.702	-0.099
		Prom	69.3 ± 3.12	0.022 ± 0.0004	0.343 ± 0.2031	0.648 ± 0.1286	-0.157 ± 0.134
	HD+SN +CBAO	Mejor	67.2	0.022	0.705	0.682	-0.176
		Prom	67.1 ± 1.90	0.022 ± 0.0004	0.327 ± 0.199	0.664 ± 0.0561	-0.129 ± 0.0489
	Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	B_s	ζ
GCVG	HD+SN	Mejor	69.4	0.022	0.021	0.701	0.016
		Prom	69.2 ± 3.28	0.022 ± 0.0004	0.390 ± 0.2709	0.561 ± 0.1845	0.092 ± 0.0804
	HD+SN +CBAO	Mejor	67.4	0.022	0.907	0.564	0.110
		Prom	67.3 ± 1.94	0.022 ± 0.0005	0.641 ± 0.2893	0.560 ± 0.0739	0.097 ± 0.0302

Tabla A.1: Resultados obtenidos de correr SimpleMC mediante MCMC de los modelos. Se utilizó un criterio de convergencia de 0.005. En la columna de Ajuste, “Mejor” hace referencia al mejor ajuste que encontró el programa y por ello no tiene incertidumbres; “Prom” se refiere a los resultados que se obtuvieron de promediar las cadenas, la incertidumbre corresponde al límite del 68% de confianza.

Modelo	Datos	χ^2	χ_{red}^2
Λ CDM	HD+SN	47.83	0.811
	HD+SN+CBAO	58.98	0.819
GCG	HD+SN	47.89	0.83
	HD+SN+CBAO	59.07	0.832
GCM	HD+SN	47.86	0.840
	HD+SN+CBAO	55.72	0.796
GCV	HD+SN	47.92	0.841
	HD+SN+CBAO	55.59	0.794

Tabla A.2: χ^2 mínimas y su correspondiente χ_{red}^2 obtenidas de las cadenas de MCMC.

Modelo	Datos	AIC	δ	BIC	δ
LCDM	HD+SN	53.83	0	60.21	0
	HD+SN+CBAO	64.98	0	71.94	0
GCG	HD+SN	55.89	2.06	64.40	4.19
	HD+SN+CBAO	67.07	2.09	76.34	4.41
GCM	HD+SN	57.86	4.03	68.50	8.28
	HD+SN+CBAO	65.72	0.74	77.31	5.37
GCVG	HD+SN	57.92	4.09	68.55	8.34
	HD+SN+CBAO	65.59	0.61	77.17	5.24

Tabla A.3: Criterios de información resultantes de los modelos.

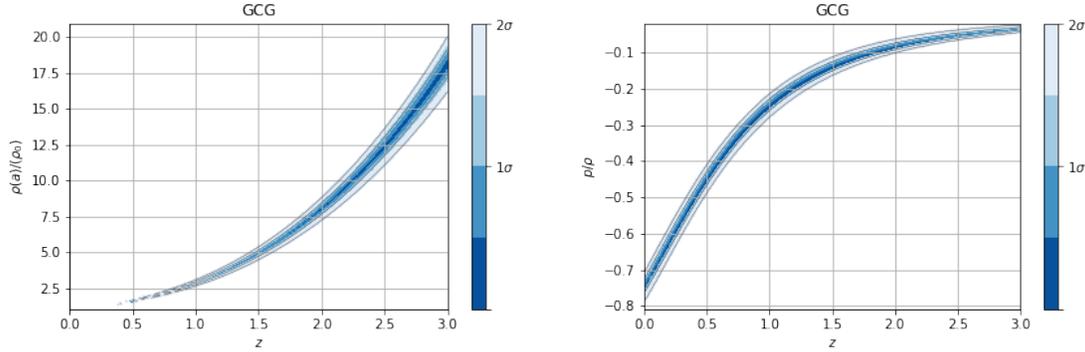


Figura A.2: Contornos de confianza de la densidad de energía la ecuación de estado del modelo GCG. A la izquierda: Densidad de energía vs corrimiento al rojo. A la derecha: Ecuación de estado.

El comportamiento de la densidad de energía y las ecuaciones de estado se presentan en las Figuras [A.2](#), [A.3](#) y [A.4](#), además de los parámetros de desaceleración en la Figura [A.5](#). Estos resultados son prácticamente iguales a los obtenidos mediante Muestreo Anidado, con la mayor diferencia siendo la anchura de las delimitaciones de los contornos de confianza por lo cual sería redundante explicarlos. Sin embargo, hay un caso que sí vale la pena mencionar: en la gráfica de la Figura [A.5\(b\)](#) se aprecia una bifurcación en el contorno de confianza a partir de $x = 2$. Este comportamiento surge como consecuencia de la poca claridad que existe respecto al parámetro α y a las dos zonas con mayor verosimilitud, que si bien no tienen una gran diferencia entre estos máximos y el mínimo que las separa (como se ve en la gráfica [A.1\(b\)](#)), sí termina afectando al realizar este tipo de análisis. Aún así, la bifurcación tiende hacia valores similares.

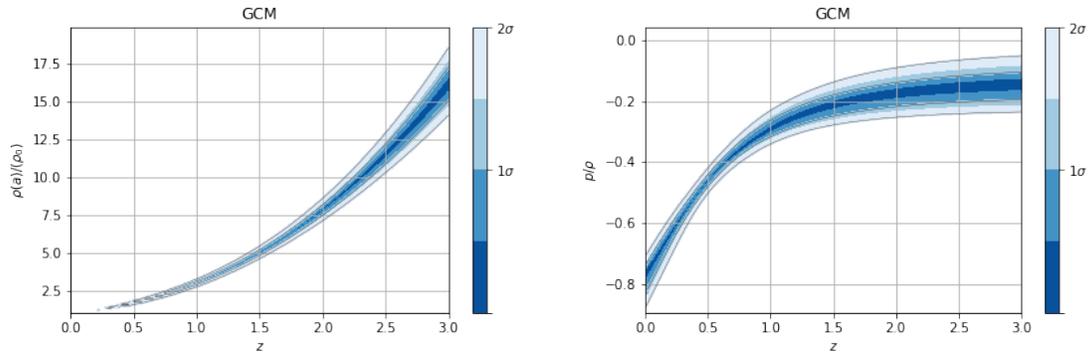


Figura A.3: Contornos de confianza de la densidad de energía la ecuación de estado del modelo GCM. A la izquierda: Densidad de energía vs corrimiento al rojo. A la derecha: Ecuación de estado.

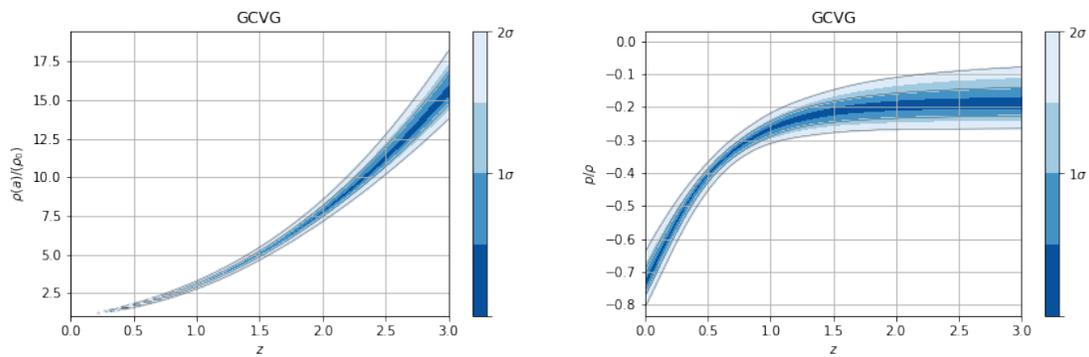


Figura A.4: Contornos de confianza de la densidad de energía la ecuación de estado del modelo GCVG. A la izquierda: Densidad de energía vs corrimiento al rojo. A la derecha: Ecuación de estado.

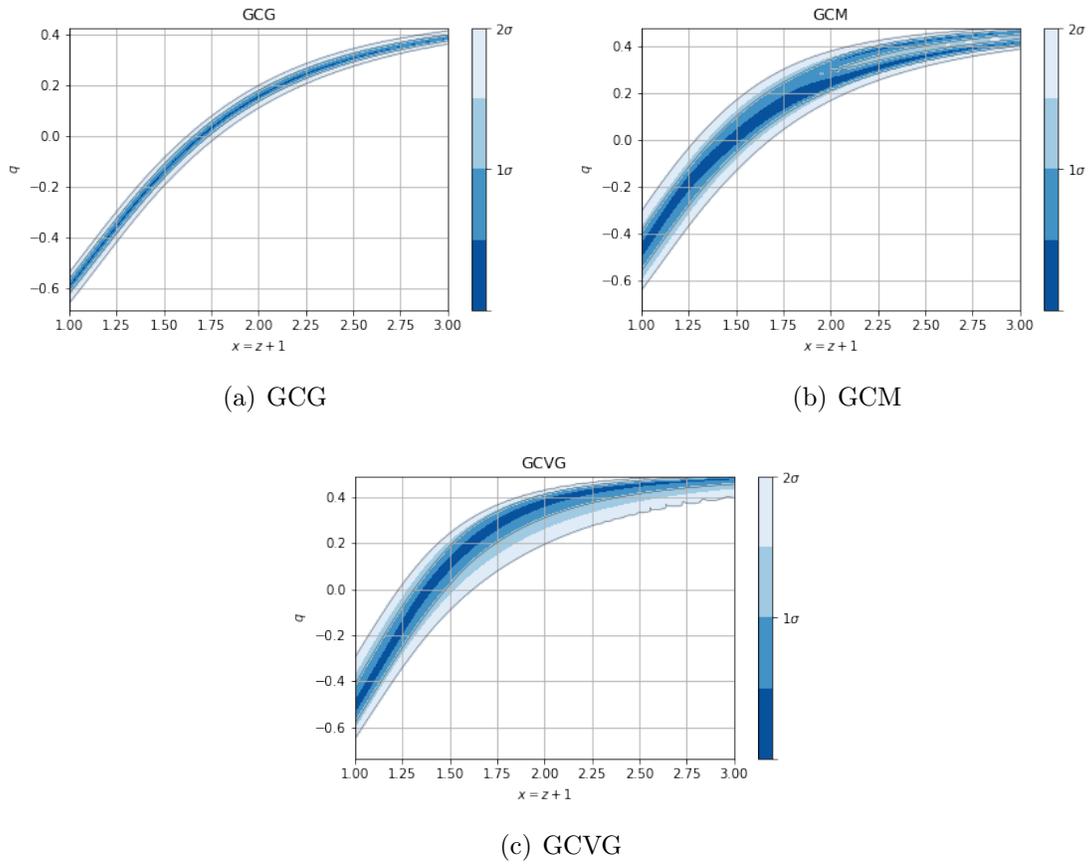


Figura A.5: Parámetros de desaceleración de los distintos modelos de Gas de Chaplygin usando los datos de MCMC. *Arriba a la izquierda: GCG. Arriba a la derecha: GCM. Abajo: GCVG.*

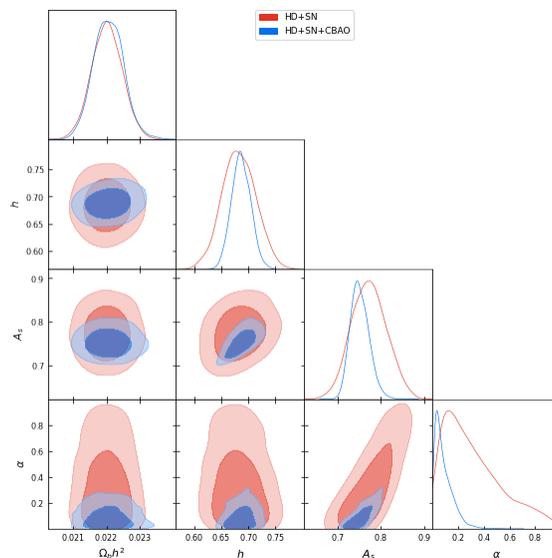


Figura A.6: Resultado de correr con 4 cadenas MCMC simultáneas el modelo GCG. El parámetro de convergencia fue de 0.01.

A.2. Resultados con cadenas simultáneas de MCMC

Para solventar el problema que se presenta en las cadenas del análisis del modelo GCG, se realizó otro análisis corriendo el programa con diversas cadenas simultáneamente. Para esto, se utilizó una computadora con 4 núcleos disponibles y se instruyó para que cada uno de ellos corriera una cadena. En este caso, la exigencia de un parámetro de convergencia de 0.005 era demasiado fuerte por lo cual se redujo a 0.01. De esta forma, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura [A.6](#) y la Tabla [A.4](#).

De la Figura [A.6](#) se puede notar que el comportamiento de los parámetros se arregla y en cambio se tienen distribuciones gaussianas. Pero para el parámetro α en este caso solo se puede constreñir a ser menor a los datos reportados en la Tabla [A.4](#) debido a que la distribución no queda completamente contenida dentro de los priors.

Al comparar estos resultados con los obtenidos mediante el Muestreo Anidado, es posible ver la poca diferencia entre ellos. Principalmente es el parámetro α el que difiere entre ellos pero los resultados siguen siendo compatibles. Simplemente al observar las Figuras [5.2\(a\)](#) y [A.6](#) se nota que, en esencia, son las mismas figuras. Lo cual era de esperarse ya que, en principio, el algoritmo de análisis es equivalente cuando el tiempo de cómputo tiende a infinito. Sin embargo, en métodos prácticos, el Muestreo Anidado pide menos requerimientos y un tiempo de cómputo bastante menor a lo solicitado por las cadenas simultáneas de MCMC.

Datos	Ajuste	H_0	$\Omega_b \times h^2$	α	A_s
HD+SN	Mejor	68.9	0.022	0.007	0.732
	Prom	68.3 ± 3.16	0.022 ± 0.0005	< 0.869	0.773 ± 0.0408
HD+SN +CBAO	Mejor	68.2	0.022	0.004	0.728
	Prom	68.7 ± 1.79	0.022 ± 0.0004	< 0.265	0.752 ± 0.0221

Tabla A.4: Resultados de correr con 4 cadenas simultáneas el modelo GCG con un criterio de convergencia de 0.01.

A.3. Perspectivas

Casos con $\alpha < 0$. Como se mencionó en los resultados, es posible estudiar un Gas de Chaplygin cuyo parámetro α tenga un valor negativo. Sin embargo esto provoca que el gas se comporte únicamente como energía oscura, por lo cual la ventaja de la unificación del sector oscuro y solución del problema de la coincidencia se desvanece. Por ello es necesario desarrollar los modelos con estas consideraciones y desarrollar las ecuaciones de Friedmann con la contribución de materia oscura por su parte. El principal obstáculo radica en la implementación de un código en el programa SimpleMC, que pueda alternar en el régimen de comportamiento sin problemas. Por ello se plantea el desarrollo y estudio de estos casos.

Equivalencias con otros modelos. En la literatura se pueden encontrar conexiones de los modelos de Gas de Chaplygin con otros modelos o formalismos. Por ejemplo, en el artículo de [72] se encuentra una relación entre el GCM y una propuesta de gravedad modificada. Tal equivalencia permite que un modelo surgido a partir de ideas matemáticas más complejas pueda reducirse y estudiarse de forma más simple. También cabe destacar el artículo [73] donde encuentran que el modelo GCM puede derivarse a través del formalismo desarrollado por el autor Hernando Quevedo.

Además de estas equivalencias, también se puede encontrar otra a partir del parámetro de ecuación de estado del modelo de Energía Oscura Graduada [74]:

$$\omega = -1 + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\lambda-1}, \quad (\text{A.1})$$

donde γ y λ son parámetros propios del modelo. Entonces, de la Ecuación [2.4], al dividirla entre ρ se puede encontrar la ecuación de estado

$$\omega = B - \frac{A}{\rho^{\alpha+1}}. \quad (\text{A.2})$$

Por lo cual, si se hace $B = -1$, $A = \frac{\gamma}{\rho^{\lambda-1}}$ y $\alpha = -\lambda$ se recupera la ecuación del modelo de energía graduada. Esta equivalencia y sus implicaciones queda como propuesta a estudiarse en un futuro.

Formulación lagrangiana de los modelos. Una característica importante de los modelos de Gas de Chaplygin es que son fácilmente adaptables a la interpretación mediante campos escalares y sus potenciales asociados. Por ello la formulación lagrangiana de estos modelos permiten utilizar las herramientas disponibles para ahondar más en las matemáticas intrínsecas del modelo y estudiar así comportamientos más complejos de una forma más simple.

Se puede traducir el modelo MCG al lenguaje de un campo escalar si se considera un potencial que interactúa consigo mismo ($U(\varphi)$) con el lagrangiano dado por [33]:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - U(\varphi). \quad (\text{A.3})$$

Luego se asocia la densidad de energía y la presión del gas modificado con el campo [32, 35, 37]:

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi) = \rho, \\ p_\varphi &= \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - U(\varphi) = B\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La estructuración y el análisis de los modelos mediante su formulación lagrangiana se plantea como trabajo a futuro ya que permite un análisis más a fondo de ellos.

Bibliografía

- (1) Schutz, B., *A First Course in General Relativity*; Cambridge University Press: **2009**.
- (2) Liddle, A., *An Introduction to Modern Cosmology*; Wiley: **2003**.
- (3) Bonometto, S.; Gorini, V. y Moschella, U., *Modern Cosmology*; IOP Publishing: **2002**.
- (4) Dunér, D., *Copernican Principle*; Gargaud, M. *et al.* Eds.; Springer Berlin Heidelberg: Berlin, Heidelberg, **2020**, págs. 1-3.
- (5) Hubble, E. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **1929**, *15*, 168-173.
- (6) Perlmutter, S. *et al.* *Bulletin of the American Astronomical Society* **1998**,
- (7) Riess, A. G. *et al.* *The Astronomical Journal* **1999**, *117*, 707-724.
- (8) Klus, H. *How We Came to Know the Cosmos: Space & Time* <https://www.thestargarden.co.uk/Big-bang.html> (Último acceso: 03-02-2024).
- (9) Ellis, G. *Foundations of Physics* **2018**, *48*,
- (10) Dodelson, S., *Modern Cosmology*; Elsevier: **2003**.
- (11) Ryden, B., *Introduction to Cosmology*; Cambridge University Press: **2016**.
- (12) SAHNI, V. y STAROBINSKY, A. *International Journal of Modern Physics D* **2006**, *15*, 2105-2132.
- (13) Bertone, G.; Hooper, D. y Silk, J. *Physics Reports* **2005**, *405*, 279-390.
- (14) Azzaro, M.; Prada, F. y Gutiérrez, C. M. Motion properties of satellites around external spiral galaxies, **2003**.
- (15) Hoekstra, H.; Yee, H. y Gladders, M. D. *New Astronomy Reviews* **2002**, *46*, 767-781.
- (16) Zaritsky, D.; Smith, R.; Frenk, C. y White, S. D. M. *The Astrophysical Journal* **1997**, *478*, 39.
- (17) Hayashi, E. *et al.* *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2004**, *355*, 794-812.
- (18) Navarro, J. F.; Frenk, C. S. y White, S. D. M. *The Astrophysical Journal* **1996**, *462*, 563.
- (19) Navas, S. *et al.* *Phys. Rev. D* **2024**, *110*, 030001.

- (20) Zlatev, I.; Wang, L. y Steinhardt, P. J. *Physical Review Letters* **1999**, *82*, 896-899.
- (21) Bianchi, E. y Rovelli, C. *Why all these prejudices against a constant?*, **2010**.
- (22) Vilenkin, A. *Science* **2006**, *312*, 1148-1149.
- (23) Burgess, C. P. *The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics*, **2013**.
- (24) Ezquiaga, J. M. y Zumalacárregui, M. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences* **2018**, *5*,
- (25) Valentino, E. D.; Melchiorri, A. y Silk, J. *Nature Astronomy* **2019**, *4*, 196-203.
- (26) Aloni, D. *et al. Physical Review D* **2022**, *105*,
- (27) Caldwell R, S. P. *Quintessence*, Último acceso: 23 de octubre del 2023, **2000**.
- (28) YOO, J. y WATANABE, Y. *International Journal of Modern Physics D* **2012**, *21*, 1230002.
- (29) Carroll, S. Vacuum stability, Último acceso: 23 de octubre del 2023, **2004**.
- (30) Ludwick, K. J. *Modern Physics Letters A* **2017**, *32*, 1730025.
- (31) Kamenshchik, A.; Moschella, U. y Pasquier, V. *Physics Letters B* **2001**, *511*, 265-268.
- (32) Gorini, V.; Kamenshchik, A.; Moschella, U. y Psaquier, V. The Chaplygin gas as a model for dark energy, **2006**.
- (33) Benaoum, H. B. *Advances in High Energy Physics* **2012**, *2012*, 1-12.
- (34) Zhang, X.; Wu, F.-Q. y Zhang, J. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2006**, *2006*, 003-003.
- (35) Benaoum, H. *Universe* **2002**, *8*, 340.
- (36) ZHAI, X.-H.; XU, Y.-D. y LI, X.-Z. *International Journal of Modern Physics D* **2006**, *15*, 1151-1161.
- (37) Bento, M. C.; Bertolami, O. y Sen, A. A. *Physical Review D* **2002**, *66*,
- (38) Sahlu, S. *et al. Confronting the Chaplygin gas with data: background and perturbed cosmic dynamics*, **2023**.
- (39) Zheng, J. *et al. The European Physical Journal C* **2022**, *82*,
- (40) Bento, M.; Bertolami, O. y Sen, A. *Physics Letters B* **2003**, *575*, 172-180.
- (41) Robert, C. P., *The Bayesian Choice*; Springer: **2007**.
- (42) Trotta, R. *Contemporary Physics* **2008**, *49*, 71-104.
- (43) Vázquez, J. y Gómez-Vargas, I. *SimpleMC* <https://github.com/ja-vazquez/SimpleMC>.
- (44) Buchner, J. *Statistics Surveys* **2023**, *17*,
- (45) Padilla, L. E.; Tellez, L. O.; Escamilla, L. A. y Vazquez, J. A. *Universe* **2021**, *7*, 213.

- (46) Andrae, R.; Schulze-Hartung, T. y Melchior, P. *Dos and don'ts of reduced chi-squared*, **2010**.
- (47) Liddle, A. R. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* **2007**, 377, L74-L78.
- (48) Leblanc, F., *An Introduction to Stellar Astrophysics*; John Wiley & Sons: **2010**.
- (49) Betoule, M. *et al. Astronomy & Astrophysics* **2014**, 568, A22.
- (50) Sako, M. *et al. Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **2018**, 130, 064002.
- (51) Escamilla, L. A. y Vazquez, J. A. *The European Physical Journal C* **2023**, 83,
- (52) Rigault, M. *et al. The Astrophysical Journal* **2015**, 802, 20.
- (53) Rigault, M. *et al. Astronomy & Astrophysics* **2020**, 644, A176.
- (54) Nicolas, N. *et al. Astronomy & Astrophysics* **2021**, 649, A74.
- (55) Moresco, M. *et al. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2016**, 2016, 014-014.
- (56) Schlegel, D.; White, M. y Eisenstein, D. The Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Precision measurements of the absolute cosmic distance scale, **2009**.
- (57) Eisenstein, D. J. *et al. The Astronomical Journal* **2011**, 142, 72.
- (58) Dawson, K. S. *et al. The Astronomical Journal* **2012**, 145, 10.
- (59) III, S. D. S. S. *A One-Percent Measure of the Universe* <https://www.sdss3.org/press/onepercent.php> (Último acceso: 31-07-2024).
- (60) Alam, S. *et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2017**, 470, 2617-2652.
- (61) Ata, M. *et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2017**, 473, 4773-4794.
- (62) De Sainte Agathe, V. *et al. Astronomy & Astrophysics* **2019**, 629, A85.
- (63) Blomqvist, M. *et al. Astronomy & Astrophysics* **2019**, 629, A86.
- (64) Beutler, F. *et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2011**, 416, 3017-3032.
- (65) Ross, A. J. *et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2015**, 449, 835-847.
- (66) Abolfathi, B. *et al. The Astrophysical Journal Supplement Series* **2018**, 235, 42.
- (67) Dawson, K. S. *et al. The Astronomical Journal* **2016**, 151, 44.
- (68) Jones, D. H. *et al. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **2009**, 399, 683-698.
- (69) Lewis, A. *GetDist: a Python package for analysing Monte Carlo samples* <https://getdist.readthedocs.io>.

- (70) Abdalla, E. *et al.* *Journal of High Energy Astrophysics* **2022**, *34*, 49-211.
- (71) Handley, W. *The Journal of Open Source Software* **2018**, *3*,
- (72) Bose, A.; Sardar, G. y Chakraborty, S. *Physics of the Dark Universe* **2022**, *37*, 101087.
- (73) Benaoum, H. B. y Quevedo, H. *Modified Chaplygin Gas Cosmology from Geometrothermodynamics*, **2019**.
- (74) Akarsu, O.; Barrow, J. D.; Escamilla, L. A. y Vazquez, J. A. *Physical Review D* **2020**, *101*,