

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

**DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS**



TESIS DE DOCTORADO EN FÍSICA.

**$\ell$ -estrellas de bosones como componente de  
materia oscura en las curvas de rotación**

Presenta

**M. en F. Atalia Navarro Boullosa**

Asesora

**Dra. Argelia Bernal Bautista**

Co-asesor

**Dr. J. Alberto Vázquez González**

León, Guanajuato a 28 de febrero de 2024.

**Asunto:** Solicitud asignación de Jurado para defensa de tesis doctoral.

Dr. Delepine, David Yves-Ghislain.  
Director de la División de Ciencias e Ingenierías.  
Universidad de Guanajuato, Campus León.

Por medio del presente queremos solicitar de la manera más atenta la asignación de sinodales para la tesis de doctorado en Física titulada "I-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación", la cual realizó nuestra alumna de doctorado M. En F. Atalia Navarro Boullosa con NUA: 426452.

A continuación se menciona a los jurados para este trabajo:

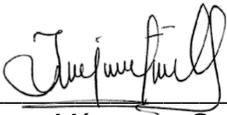
- Dr. Luis Arturo Ureña López
- Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
- Dra. Lorena Berenice Velázquez Ibarra
- Dra. Abril Suárez Ramírez
- Dr. Francisco Xavier Linares Cedeño

Sin más por el momento, reciba saludos cordiales.

ATENTAMENTE

---

Dra. Argelia Bernal Bautista  
DCI-UGTO  
Asesora



---

Dr. J Alberto Vázquez González  
ICF-UNAM  
Co-Asesor



León, Gto., 9 de abril del 2024

DR. DAVID DELEPINE  
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS, CAMPUS LEÓN  
DIRECTOR

P R E S E N T E

Por medio de la presente, como miembro del jurado calificador designado para revisar el trabajo de grado con título "***ℳ-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación***" que sustenta la ***M. Atalia Navarro Boullosa*** con el fin de obtener el grado de ***Doctora en Física***, hago constar que he leído el trabajo y que avalo el contenido y calidad del mismo como un trabajo de Tesis de Doctorado.

Sin más por el momento le envío saludos cordiales, quedando de usted para cualquier aclaración.

Atentamente,

Lorena Velázquez I.

Dra. Lorena Velázquez Ibarra

Profesora Asociada C



León, Guanajuato, 15 de Abril de 2024

**Dr. David Delepine**

**Director**

**División de Ciencias e Ingenierías**

**PRESENTE**

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada “**l-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación**”, que para obtener el grado de Doctorado en Física ha sido elaborada por la **M. F. Atalia Navarro Boullosa**. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Sin más por el momento quedo a sus órdenes para cualquier aclaración.

Atentamente

Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo  
Investigador por México Conahcyt  
Departamento de Física  
DCI, Campus León  
vaquera@fisica.ugto.mx

División de Ciencias e Ingenierías, Campus León  
Loma del Bosque 103, Fracc. Lomas del Campestre  
C.P. 37520, León, Gto., México  
[www.dci.ugto.mx](http://www.dci.ugto.mx)

Arkansas State University  
Campus Querétaro  
Km 17.5 Estatal 100, 72670 Cólón, Qro.

02 de Mayo de 2024

**Dr. David Delepine**  
**Director**  
**División de Ciencias e Ingenierías**  
**PRESENTE**

Por este medio me permito hacer de su conocimiento que he leído la tesis titulada “**l-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación**”, que para obtener el grado de Doctora en Física ha sido elaborada por la **M. F. Atalia Navarro Boullosa**. En mi calidad como sinodal de dicha tesis, puedo confirmar que el documento cumple satisfactoriamente con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, y hemos discutido ampliamente las preguntas surgidas durante su revisión, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Sin más por el momento, y agradeciendo la atención prestada quedo a sus órdenes para cualquier aclaración.

Cordialmente,



Dra. Abril Suárez  
Profesora/Investigadora del Area de Ciencias  
Arkansas State University, Campus Querétaro.  
asuarezramirez@astate.edu



Universidad  
de Guanajuato

CAMPUS LEÓN  
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Asunto: Revisión de tesis de doctorado  
León, Gto., Mayo de 2024

**DR. DAVID Y. G. DELEPINE**  
**DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS**  
**PRESENTE**

Por este medio le comunico que he revisado la tesis **l-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación**, escrita por la M. en F. **Atalia Navarro Boullosa**, para efecto de presentarla para la obtención del grado de Doctorado en Física en la División de Ciencias e Ingenierías de la Universidad de Guanajuato.

El texto de la tesis se encuentra completo y se presentan resultados interesantes y bien explicados sobre los modelos de estrellas de bosones y su posible presencia en los halos de materia oscura, utilizando sus curvas de rotación. En mi opinión, las hipótesis de trabajo y el análisis teórico se conectan bien con los resultados presentados, incluso dentro del contexto numérico. Igualmente, he podido ver que el texto fue modificado por la autora para reflejar las sugerencias y comentarios que le fueron expresados durante la revisión. En mi opinión la tesis cumple con los elementos necesarios para ser defendida ante el comité sinodal asignado en la fecha próxima que sea acordada de manera conjunta.

Agradeciendo su amable atención, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

**ATENTAMENTE**  
**“LA VERDAD OS HARÁ LIBRES”**

**DR. LUIS ARTURO UREÑA LÓPEZ**  
**PROFESOR TITULAR C**

Loma del Bosque # 103, Col. Loma del Campestre. León, Guanajuato, México. C. P. 37150  
Tel: +52 (477) 7885100 Exts. 8420 y 8421, Fax. Ext. 8410.



Morelia, Michoacán - México, Mayo 2024

Dr. David Delepine

Director

División de Ciencias e Ingenierías

Universidad de Guanajuato

Por medio de la presente me permito informar que he leído la tesis titulada “***l*-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación**”, que para obtener el grado de Doctorado en Física ha sido elaborada por la *M. F. Atalia Navarro Boullosa*. En mi opinión, la tesis cumple con los requisitos de calidad correspondientes al grado académico al que se aspira. Las correcciones sugeridas por mi parte han sido atendidas, por lo cual recomiendo se proceda a la defensa de la tesis.

Sin más por el momento quedo a sus órdenes para cualquier aclaración.

Atentamente,

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'F. Linares Cedeño'.

**Dr. Francisco Xavier Linares Cedeño**

**Investigador Posdoctoral CONAHCYT**

**Instituto de Física y Matemáticas**

**Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,**

**francisco.linares@umich.mx**



# Declaratoria.

Yo, Atalia Navarro Boullosa declaro que esta tesis de doctorado en Física titulada "*ℓ*-estrellas de bosones como componente de la materia oscura en las curvas de rotación" es propia al igual que el trabajo presentado en ella.

Los trabajos en los que está basado este trabajo están debidamente citados.

**M. en F. Atalia Navarro Boullosa**

Fecha: 5 - febrero - 2024.



# Resumen

Usando curvas de rotación de galaxias de bajo brillo superficial (LBSG, por sus siglas en inglés), se infirieron los parámetros libres de las  $\ell$ -estrellas de bosones como componente de materia oscura. Las  $\ell$ -estrellas de bosones son soluciones numéricas al límite no relativista del sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon, el sistema de ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP). Estas soluciones están parametrizadas por un número de momento angular  $\ell = (N - 1)/2$  y un número de excitación  $n$ . Para realizar el análisis bayesiano se modificó el código SimpleMC para obtener la inferencia de parámetros, para los casos con  $m = 0$  y,  $\ell = 0$ ,  $\ell = 1$  y multi-estados de  $\ell$ -estrellas de bosones, tales que se cumpla la condición  $n - 1 - \ell = 0$  para garantizar su estabilidad. Utilizamos el criterio de información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés), criterio de información Bayesiano (BIC, por sus siglas en inglés) y el factor de Bayes para comparar el caso de multi-estados y de un estado excitado ( $\ell=1$ ) con el estado base ( $\ell=0$ ) como el modelo base debido a su simplicidad. Encontramos que los datos en la mayoría de la muestra de galaxias favorece el caso de multi-estados y que la masa del campo escalar tiende a hacerse un poco más grande comparada al caso del estado base.

Este trabajo doctoral fue publicado en [1].

# Agradecimientos

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN117723. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Agradezco a CONACYT por brindarme la beca de doctorado que hizo posible parte de mi manutención durante este período.

Adicionalmente, quiero agradecer al LSST-DA Data Science Fellowship Program, el cual está financiado por LSST-DA, the Brinson Foundation, y the Moore Foundation; mi participación en el programa ha sido de ayuda para este trabajo.

Finalmente y no por ello menos importante, a aquellas personas que me apoyaron emocionalmente en esta travesía doctoral y después de ella. ¡Gracias!

# Índice general

## Resumen

## Agradecimientos

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Observables cosmológicas y galácticas . . . . .	4
1.1.1. Curvas de Rotación . . . . .	8
1.2. Modelos de materia oscura . . . . .	10
<b>2. Modelo de materia Oscura Escalar y las <math>\ell</math>-estrellas de bosones</b>	<b>13</b>
2.1. $\ell$ -estrellas de bosones . . . . .	15
2.1.1. Soluciones independientes . . . . .	20
2.1.2. Soluciones acopladas . . . . .	22
2.1.3. Características de las soluciones . . . . .	23
<b>3. Datos utilizados y análisis estadístico, frecuentista y bayesiano.</b>	<b>26</b>
3.1. Datos . . . . .	26
3.2. Análisis estadístico . . . . .	27
3.3. $\chi^2$ . . . . .	29
3.4. Estadística Bayesiana . . . . .	30
3.4.1. Muestreo anidado . . . . .	30
3.4.2. Factor de Bayes . . . . .	31
3.5. Criterios de información . . . . .	32
3.5.1. Criterio de información de Akaike (AIC) . . . . .	32
3.5.2. Criterio de Información Bayesiano (BIC) . . . . .	32
<b>4. Resultados</b>	<b>34</b>
4.1. Casos independientes . . . . .	34

4.2. superposición . . . . .	37
4.2.1. $\ell = 0 + \ell = 1$ . . . . .	37
4.2.2. $\ell = 0 + \ell = 1 + \ell = 2$ . . . . .	41
4.3. Acoplados . . . . .	41
<b>5. Conclusiones y Discusión</b>	<b>53</b>
<b>Appendices</b>	<b>56</b>
A. Resultados de la $\chi^2$ con los estados $\psi_{100}, \psi_{210}, \psi_{320}$ y $\psi_{430}$ . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El término materia oscura se ha utilizado desde hace varios siglos, principalmente, con la invención de la fotografía astronómica en el siglo XIX, astrónomos de la época discutieron la existencia de la materia oscura en forma de nubes oscuras o “nebulosas” oscuras. Posteriormente, en 1894 el astrónomo Arthur Ranyard realizó la hipótesis de que existían estructuras oscuras o masas absorbentes [2].

A principios de los 1900 Lord Kelvin fue una de las principales personas en aportar al análisis dinámico galáctico, estimando la cantidad de materia oscura de la Vía Láctea, argumentando que *si las estrellas en la Vía Láctea se pueden describir como un gas de partículas que actúan bajo la influencia gravitatoria, entonces se puede establecer una relación entre el tamaño del sistema y la velocidad de dispersión de las estrellas*. Adicionalmente, en 1906 Henri Poincaré mencionó que *como la dispersión de velocidad predicha por Kelvin era del mismo orden de magnitud que la observada, entonces la cantidad de **materia oscura** era menor o similar a la materia visible* [2, 3].

En 1915 el astrónomo Ernst Öpik propuso un modelo del movimiento de las estrellas, con el cual concluyó que la existencia de grandes cantidades de materia invisible era poco probable [4]. En 1922 Jacobus Kapteyn también propuso un modelo en el cuál describía a la Vía Láctea como una distribución de estrellas aplanada que giran al rededor de un eje apuntando hacia el Polo Galáctico y obtuvo la relación entre el movimiento de las estrellas y su velocidad de dispersión [2].

En 1932 Jan Oort, alumno de Kapteyn, analizó la cinemática de las estrellas en la vecindad solar, lo cuál le permitió obtener una estimación de la densidad local de

materia oscura [2, 5]. Adicionalmente, James Jeans en 1922 [6] y Bertil Lindblad en 1926 [7] también estimaron la densidad local de materia oscura.

Fritz Zwicky en 1933 analizó los corrimientos al rojo de varios cúmulos de galaxias, notando una gran dispersión de velocidades en ocho galaxias dentro del Cúmulo Coma, excediendo los 2000  $km/s$ . Además, aplicó el teorema de virial para estimar la masa de dicho cúmulo, encontrando que 800 galaxias de  $10^9 M_{\odot}$  (masas solares) en una esfera de  $10^6$  años luz deberían exhibir una dispersión de velocidad de 80  $km/s$ , contrario a la velocidad de dispersión observada a lo largo de la línea de visión de aproximadamente 1000  $km/s$ . En su artículo [8, 9] menciona que *si esto fuera confirmado, obtendríamos el sorprendente resultado de que la materia oscura está presente en mayor cantidad que la materia luminosa*.

Históricamente, en esos años la hipótesis de la materia oscura no fue bien aceptada por la comunidad científica, sin embargo, el hecho de que la materia oscura explicara la dinámica de los cúmulos de galaxias llevó a la comunidad a investigar sobre qué podría ser esta materia oscura.

Observaciones espectroscópicas de la galaxia Andrómeda realizadas por Vera Rubin y Kent Ford, publicadas en 1970, representaron un gran avance en términos de calidad [10]. En el mismo año Ken Freeman comparó las observaciones de las curvas de rotación fotométricas con las observadas en 21 cm (radioastronómicamente), encontrando que para las galaxias M33 y NGC 300, la curva de rotación observada tenía un pico a un radio mayor al predicho [11].

Las curvas de rotación planas obtenidas en 1974 por la comunidad de radioastronomía habían contribuido mucho a establecer la existencia de grandes cantidades de masa en las partes externas de las galaxias [12].

En 1978, Albert Bosma publicó los resultados de su tesis doctoral [13] donde incluía las observaciones de curvas de rotación de 25 galaxias que exhibían un comportamiento plano a radios mayores a lo observado ópticamente. Posteriormente, Rubin, Ford y Norbert Thonnard publicaron curvas de rotación ópticas de diez galaxias espirales de alta luminosidad, las cuales, al igual que las encontradas por Bosma, eran planas a radios mayores a los observados [14].

En la siguiente sección 1.1 hablaremos de otras observables astronómicas y cosmológicas que nos dan evidencia de la existencia de la materia oscura, así como la forma en la que son obtenidas. Posteriormente, en la sección 1.2 explicaremos algunos

modelos notables que intentan explicar qué es la materia oscura. Particularmente, en el capítulo 2 hablaremos del modelo de materia oscura escalar, modelo en el cual está centrado este trabajo.

## 1.1. Observables cosmológicas y galácticas

A partir de las observaciones se ha inferido la existencia de una materia invisible, materia oscura, necesaria para reproducir la dinámica observada. En la sección anterior se mencionaron cronológicamente las observaciones que dieron lugar a la propuesta y aceptación de la comunidad científica de la materia oscura.

En la escala cosmológica tenemos a las oscilaciones bariónicas acústicas, BAO por sus siglas en inglés y la radiación cósmica de fondo, CMB por sus siglas en inglés.

Las oscilaciones bariónicas acústicas son fluctuaciones en la densidad de materia visible (bariónica) que provienen del Universo temprano, el cuál era un plasma caliente de materia oscura, protones y neutrones, donde los fotones ejercían una presión en la materia bariónica. Fue hasta la época de la recombinación en la que los fotones viajaron libremente y se formaron átomos neutros. La presión ejercida por los fotones sobre los bariones dejó plasmada una distribución de densidad preferente en ellos. Posteriormente, debido a que la materia oscura únicamente interactúa gravitacionalmente con la materia, esa misma distribución comenzó a replicarse en ella, proporcionando una regla estándar en la distancia en la que las galaxias se agrupan, aproximadamente 150 Mpc [15]. Por lo que, si no existiera la materia oscura en el Universo, no tendríamos esta regla estándar. La distribución de densidades del Universo en las épocas descritas anteriormente puede ser observada en la Figura 1.1. Para una revisión en extenso del tema, se recomienda [16, 17, 18].

Por otro lado, el CMB es una fotografía del momento en el que los fotones empezaron a viajar libremente en el Universo. Al igual que BAO, esta observable nos dice que durante la evolución del Universo es necesaria la presencia de la materia oscura, de lo contrario esta observable sería distinta, ya que depende de la época de la recombinación, si la materia oscura fuera distinta entonces las interacciones de ésta también lo serían y por lo tanto las anisotropías del espectro de potencias del CMB serían distintas, éstas anisotropías pueden ser observadas en la Figura 1.2. La radiación cósmica de

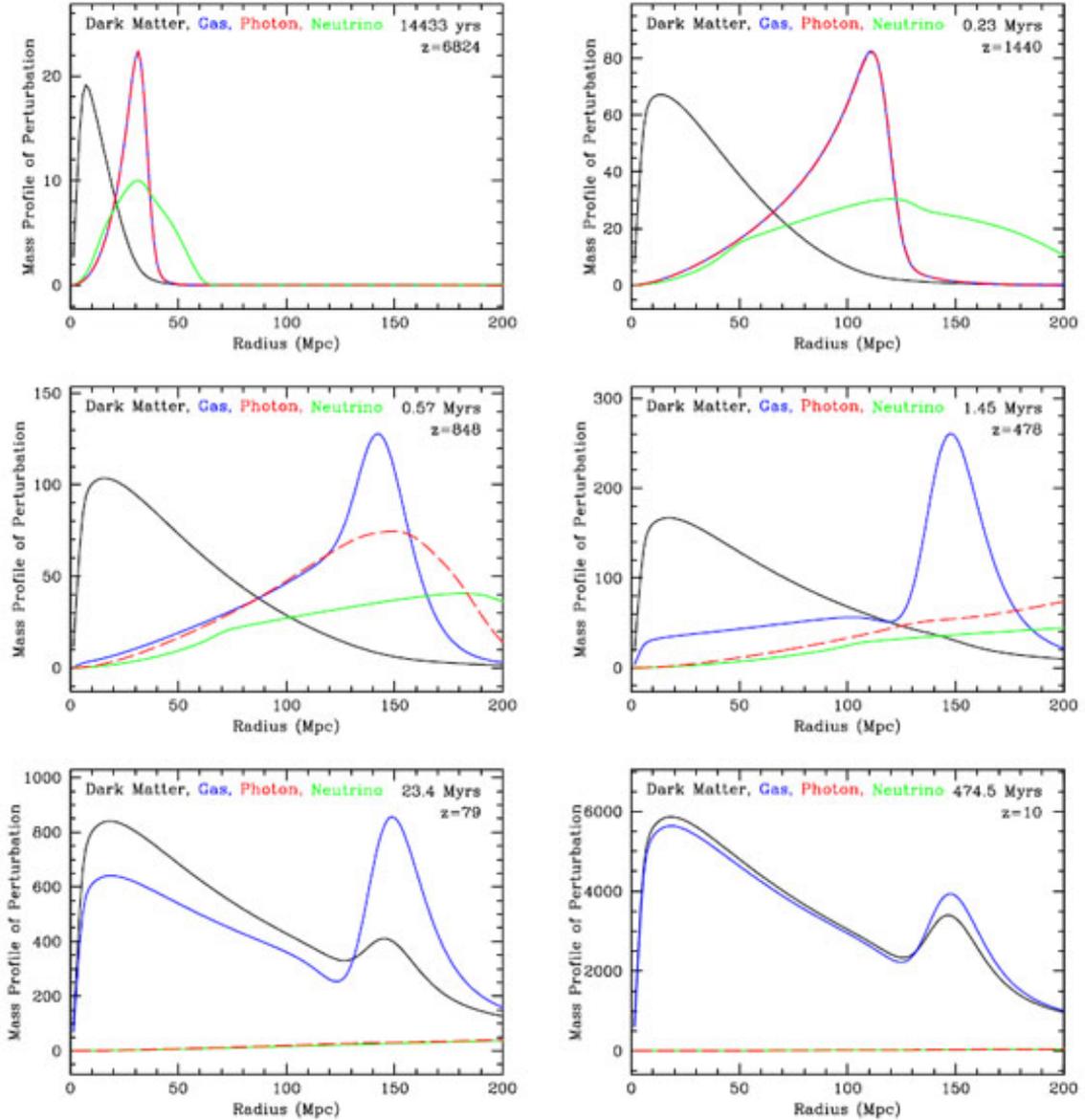


Figura 1.1: Evolución del perfil de masa radial versus el radio comóvil de una sobredensidad inicialmente puntual situada en el origen. La línea negra representa la materia oscura, la línea azul los bariones, la línea roja los fotones y la verde los neutrinos. En cada panel se encuentra indicado el corrimiento al rojo ( $z$ ) y el tiempo después del Big Bang. a) Inicialmente, los fotones y bariones viajaron en conjunto. b) Cercano a la recombinación. c) Durante la recombinación los fotones comenzaron a viajar libremente. d) Después de la recombinación los fotones viajan libremente dejando únicamente una perturbación en los bariones alrededor de 150 Mpc. e) f) Al término de la recombinación, la interacción gravitacional entre la materia oscura y la materia bariónica hizo que ambas se acumularan en dichas escalas, teniendo sobredensidades de materia tanto en el sitio donde se origina la perturbación como al rededor de 150 Mpc [16, 17, 18].

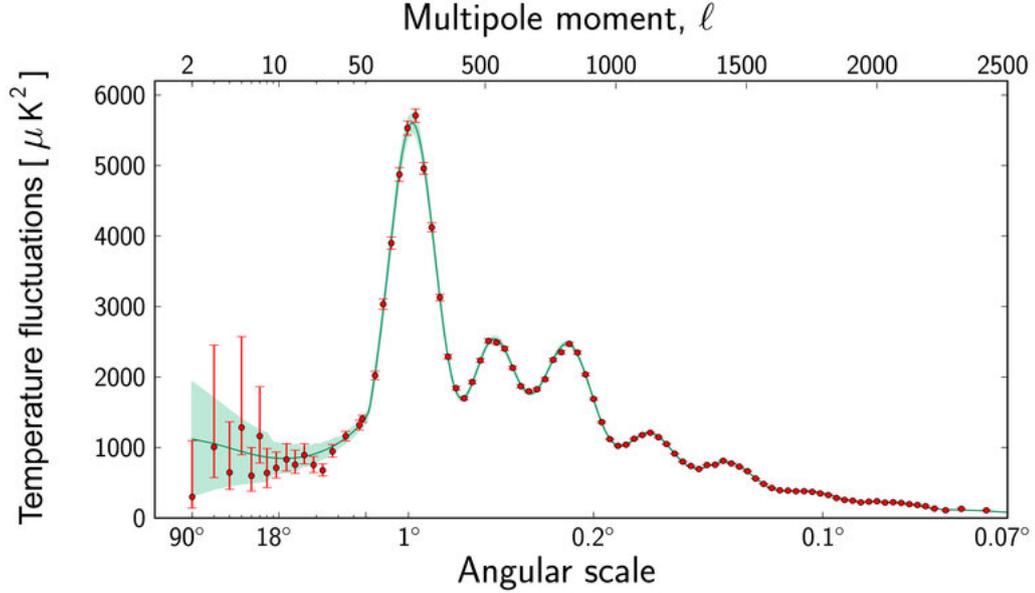


Figura 1.2: Espectro de potencias del CMB observado por Planck [19]. Los puntos rojos con barras de error son los datos observados. La región sombreada en verde indica el error teórico. La precisión es una varianza cósmica limitada a  $\ell \cong 2000$ .

fondo fue observada por primera vez en 1965 por Penzias y Wilson en los laboratorios Bell, obteniendo el premio Nobel en 1978. Después de la primera detección, hasta el momento se han construido tres misiones para obtener observaciones con mayor resolución, el Explorador del Fondo Cósmico COBE (Cosmic Background Explorer) operó de 1989 a 1993, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observó de 2001 al 2010 y el satélite Planck operado por la Agencia Espacial Europea (ESA) (2009-2013) [19]. En la Figura 1.3 se observa el cambio en la resolución cronológicamente con cada satélite.

En la escala galáctica las observaciones que son evidencia de la existencia de la materia oscura son el lente gravitacional, particularmente el lente gravitacional débil y las curvas de rotación, a las cuales les dedicaremos la siguiente subsección debido a que son parte central de este trabajo.

El lente gravitacional es una de las predicciones de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, propuesta en 1915 [21]. Observado en 1919 por Arthur Eddington y Sir Frank Watson Dyson [22]. Este efecto consiste en la presencia de una fuente gravitacional muy grande, como lo puede ser una galaxia, la luz proveniente de

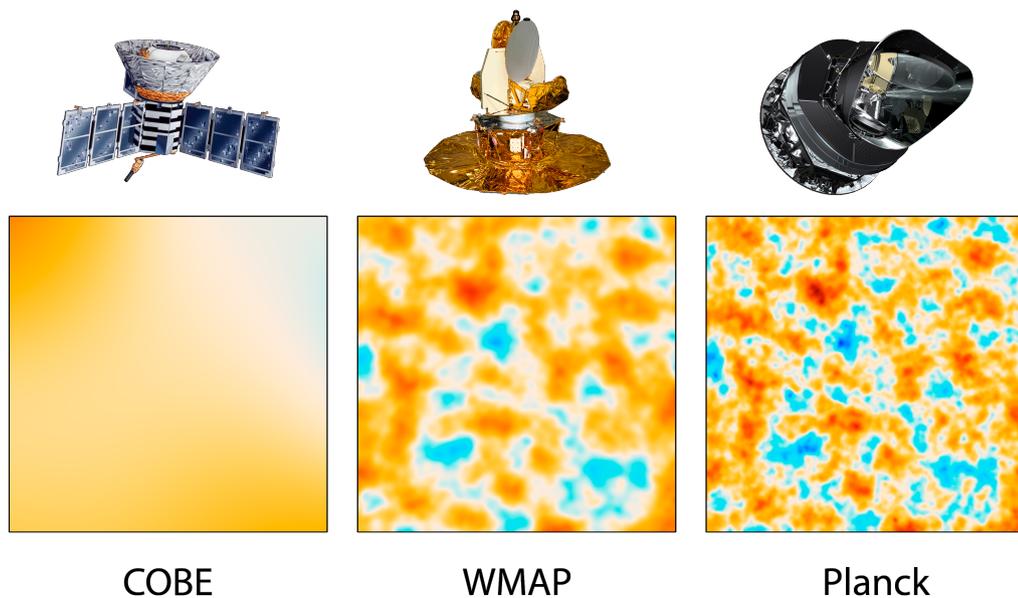


Figura 1.3: Resolución de las observaciones del CMB de cada generación de instrumentos. Cada panel muestra la misma región del cielo de 10 grados cuadrados, mostrando como cambiaría la resolución de las anisotropías con cada satélite, COBE/DMR (1989-1993), WMAP (2001-2010) y Planck (2009-2013) [20].

una galaxia más pequeña que está atrás de esta fuente gravitacional, es distorsionada y por lo tanto, la luz que recibimos como observadores es diferente a la de la galaxia originaria. Si la fuente gravitacional es muy pesada, suelen formarse anillos de Einstein como se puede observar en la Figura 1.4.

Es importante mencionar que estructuras como los anillos de Einstein son observadas en una alineación en la que el observador, fuente gravitacional fuerte y galaxia que se quiere observar están en la misma línea de visión, este alineación puede ser observada en la Figura 1.5.

Particularmente, existe un efecto llamado microlensing, o lente gravitacional débil, el cual ocurre cuando el objeto que genera la lente es un objeto relativamente pequeño o compacto, tales como una estrella, planeta o agujero negro. Contrario al lente gravitacional que genera múltiples imágenes o un anillo de Einstein, el lente gravitacional débil generalmente genera un incremento temporal en el brillo de la fuente del fondo a medida que el objeto lente pasa entre la fuente y el observador. Dicho efecto fue observado en cuasáres por Kyongae Chang y Sjur Refsdal en 1979 [25]. Posteriormente en 1986, Bohdan Paczynski [26] propuso que este fenómeno de lente gravitacional débil podría usarse para buscar objetos compactos en el halo de la Vía Láctea.

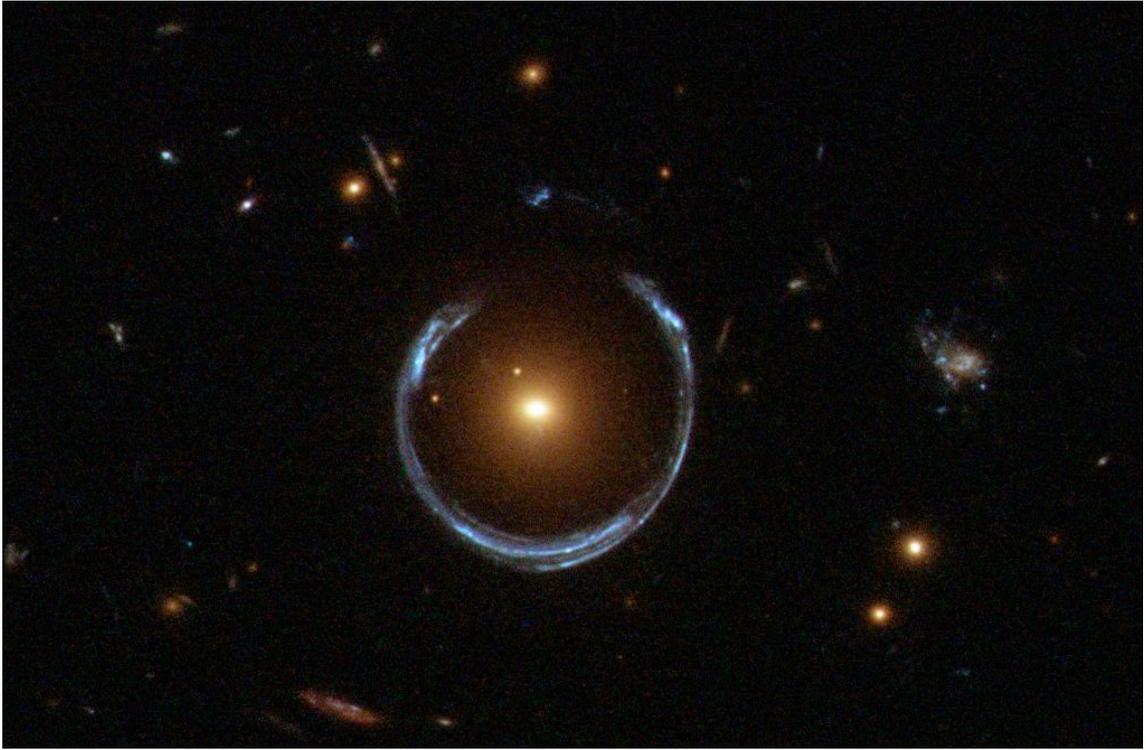


Figura 1.4: Anillo de Einstein observado por el telescopio espacial Hubble [23].

### 1.1.1. Curvas de Rotación

Las curvas de rotación fueron la observable que hizo que la comunidad científica le tomara importancia a la propuesta de la materia oscura, en particular con las observaciones de Vera Rubin y Kent Ford.

Se obtienen a partir de la rapidez a la que se mueven las estrellas en la órbita de la galaxia a la que pertenecen, es decir, la rapidez de una partícula de prueba en una órbita circular a un radio  $r$ ; a esto se le conoce como rapidez circular ( $v_c(r)$ ). Para obtener una expresión para la rapidez circular partimos del campo gravitacional, el cual está definido por

$$\vec{F}_r(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{e}_r, \quad (1.1)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional,  $M(r)$  es la función de masa. Al igualarla con la aceleración centrípeta obtenemos

$$\frac{v_c^2}{r} = |\vec{F}_r| = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (1.2)$$

donde hemos utilizado la expresión  $\vec{F} = -\nabla\Phi$ , con  $\Phi$  el potencial gravitacional. Por lo tanto, podemos despejar y obtener que

$$v_c^2 = r\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (1.3)$$

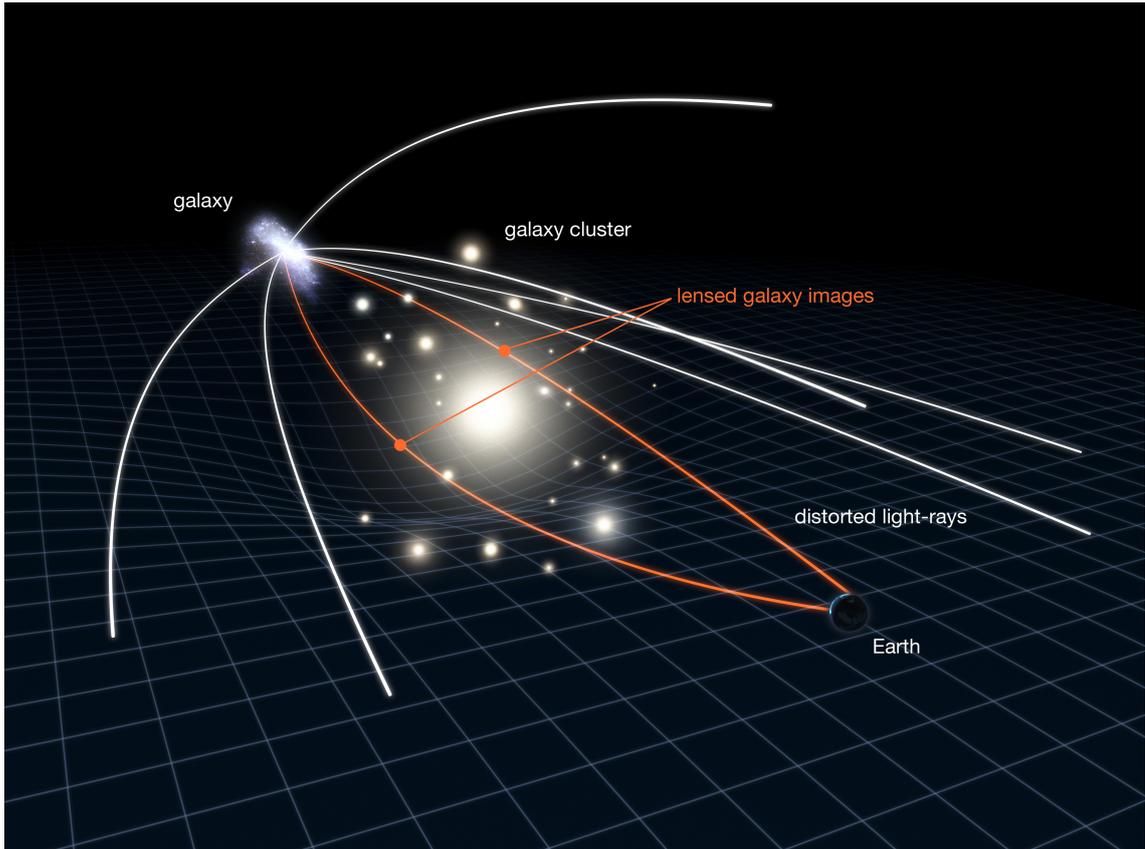


Figura 1.5: Alineación de lente gravitacional. En la figura se muestra la alineación el la que es observable el anillo de Einstein, donde la fuente, el lente y el observador se encuentran en la misma línea de visión [24].

Particularmente, en el caso con simetría esférica, el potencial gravitacional está dado por

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' + \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \right], \quad (1.4)$$

donde la primera integral corresponde a las contribuciones de  $r < r'$ , mientras que la segunda integral corresponde a las contribuciones de  $r > r'$ . Al utilizar la expresión anterior en conjunto con la ecuación (1.3) obtenemos,

$$v_c^2 = -4\pi G r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right) = 4\pi G r \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = \frac{GM(r)}{r}, \quad (1.5)$$

siendo la expresión que utilizaremos en este trabajo para obtener la rapidez circular.

## 1.2. Modelos de materia oscura

El modelo  $\Lambda$ CDM, compuesto por una constante cosmológica ( $\Lambda$ ) asociada a la energía oscura, materia oscura fría (CDM por sus siglas en inglés), radiación y materia ordinaria; ha prevalecido como el modelo estándar debido a su simplicidad y a su concordancia con observaciones [19], como la abundancia de hidrógeno y elementos ligeros, la estructura a gran escala y la expansión acelerada del universo. Dicho modelo presenta varias discrepancias con las observaciones de galaxias satélites al rededor de galaxias con características similares a la Vía Láctea, debido a que las simulaciones de materia oscura fría indican la existencia de más galaxias satélites que las que se observan, a este problema se le denomina problema de satélites faltantes (MSP por sus siglas en inglés). Sin embargo, en los últimos años se ha discutido como las observaciones actuales podrían dar una solución plausible a este problema, por la alta resolución de las observaciones, para más detalles al respecto se recomienda consultar [27].

Otra discrepancia proveniente de las simulaciones de materia oscura fría es el problema "too big to fail", consiste en que las galaxias satélites predichas por el modelo son tan masivas que es imposible que no tengan suficientes estrellas visibles, es decir, que los satélites observados de la Vía Láctea no son suficiente masivos para ser consistentes con las predicciones de  $\Lambda$ CDM [28]. Por otro lado, está el problema "cusp/core", el cual consiste en que los perfiles de densidad predichos por simulaciones de  $\Lambda$ CDM, crecen abruptamente y por lo tanto producen una distribución "cuspy" de la materia oscura a radios pequeños. Mientras que las observaciones de los perfiles de densidad

de materia oscura de galaxias enanas muestran núcleos (“cores”) centrales planos, indicando lo contrario [29, 30].

Debido a las discrepancias mencionadas anteriormente, la comunidad científica ha propuesto distintos candidatos de materia oscura, desde agujeros negros primordiales, partículas elementales más allá del modelo estándar, materia oscura ultraligera, entre otras. Para un resumen general de distintos modelos de materia oscura, sobre todo enfocado en el área de partículas se recomienda consultar [2]. En [31] hacen una introducción a la detección indirecta y algunos modelos de materia oscura. Mencionan también, las distintas escalas de masa para candidatos de materia oscura, como podemos observar en la Figura 1.6, siendo éste uno de los mayores retos sobre su descubrimiento, ya que al no tener un rango pequeño de masa en el cual buscar, se convierte en una tarea más retadora.

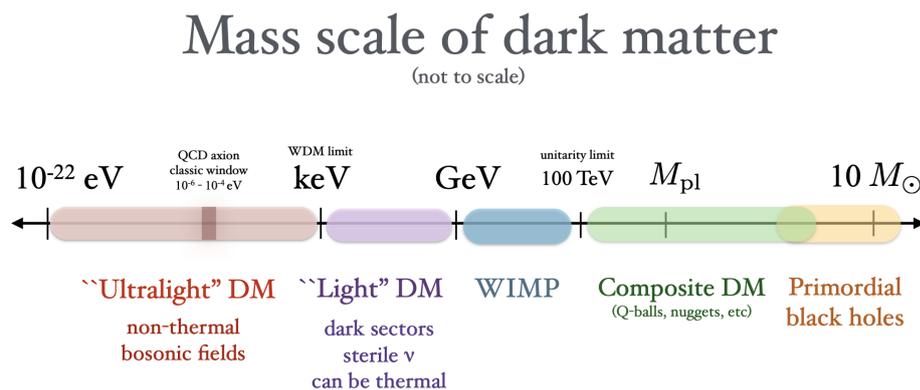


Figura 1.6: Rango de masa permitido para candidatos de materia oscura, desde partículas candidatas hasta agujeros negros primordiales. Los rangos de masa son solamente aproximados [31].

En este trabajo de tesis doctoral nos centraremos en el modelo de materia oscura escalar (también puede ser encontrado en la literatura como wave DM, Axion-like), el cual corresponde a la escala ultra-ligera de la Figura 1.6 ya que suele tener una masa alrededor de  $10^{-22}[\text{eV}/c^2]$ .

En el siguiente capítulo explicaremos detalladamente este modelo, sus ventajas respecto al modelo estándar cosmológico y sus restricciones, centrándonos en las  $\ell$ -estrellas de bosones y obtendremos soluciones a diferentes casos de éstas. En el capítulo 3 hablaremos sobre los datos usados y explicaremos los pasos seguidos para el

análisis de datos con distintos casos de  $\ell$ -estrellas de bosones. Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 4 y finalmente, la discusión y perspectivas del trabajo realizado se encuentran en el capítulo 5.

## Capítulo 2

# Modelo de materia Oscura Escalar y las $\ell$ -estrellas de bosones

Un modelo de materia oscura tiene que ser consistente con las observaciones mencionadas en 1.1, desde la escala cosmológica hasta escala galáctica, además de resolver las discrepancias que se han observado con el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM). El modelo de materia oscura escalar (SFDM por sus siglas en inglés) ha mostrado ciertas ventajas respecto a  $\Lambda$ CDM. Comenzando por las escalas cosmológicas, donde el modelo ha reproducido el fondo y las perturbaciones lineales en la densidad, además de que da un corte natural a pequeñas escalas en el espectro de potencias de masa [32]. Este corte previene la sobreproducción de pequeñas estructuras y se debe a que el único parámetro libre del modelo es la masa del campo, poniendo la cota de que ésta debe ser mayor a  $10^{-23}\text{eV}/c^2$  para ser compatible con las observaciones del espectro de potencias [33]. Lo anterior resuelve el problema de los satélites faltantes.

Simulaciones de SFDM realizadas por [34] muestran estructura a gran escala que es indistinguible de aquella proveniente de materia oscura fría y, proveen un perfil de densidad analítico para los halos de materia oscura con un núcleo solitónico y una parte exterior formada por el perfil Navarro-Frenk-White (NFW) [35]. Dicho perfil de densidad analítico para el campo escalar resuelve el problema cusp/core, al tener un núcleo solitónico, es decir, tipo core. Este perfil ha sido utilizado para restringir las características de la materia oscura, utilizando diferentes sistemas tales como galaxias esferoidales enanas [36, 37]. Este análisis ha mostrado que el tener un solo estado de

SFDM restringe mucho la masa del campo escalar con las observaciones de Lyman- $\alpha$ , teniendo cotas al rededor de  $(\log_{10}(m/\text{eV}) \sim [-23,-24])$  [38, 39].

Además, al usar una reconstrucción no paramétrica de curvas de rotación con distintos perfiles de densidad, se encontró que 44 % de las galaxias utilizadas prefieren el modelo SFDM [40]. Lo anterior ha motivado a la comunidad científica a seguir trabajando con el modelo de SFDM, buscando extenderlo de distintas formas, como considerar estados excitados [41], un campo escalar autogravitante con autointeracción [42] o un estado base con un estado excitado inestable [43], por nombrar algunos ejemplos. Uno de los primeros trabajos a escalas galácticas de campo escalar autointeractuante con multiples estados es [44], el cuál fue utilizado en [45] para analizar las velocidades de dispersión de ocho de las galaxias enanas esferoidales satélites de la Vía Láctea. Posteriormente fue utilizado en [46] para compararlo con el caso de un estado base interno con una parte exterior NFW, esto con galaxias de bajo brillo superficial. A escalas cosmológicas se ha introducido la materia oscura multi-campo escalar (MSFDM por sus siglas en inglés), esto significa que se consideran distintas combinaciones de potenciales, para mayores detalles sobre MSFDM consultar [47] y sus referencias.

Otra forma de explorar el modelo de campo escalar es a través de la teoría cuántica de campos, particularmente con las estrellas de bosones, las cuales fueron introducidas en [48] como soluciones regulares a las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon para un campo escalar clásico complejo y mínimamente acoplado. Posteriormente en [49] introdujeron las soluciones autogravitantes, estáticas, con simetría esférica de partículas con espín cero.

Las estrellas de bosones han sido utilizadas para modelar halos de SFDM y así poner restricciones a la masa del campo con distintas observables como curvas de rotación [50] y dinámica estelar de clústers [51]. En el caso de las curvas de rotación se ha encontrado que al hacer el ajuste con el estado base se obtienen distintos valores de la masa del campo para distintas galaxias [50], mientras que al tomar solamente estados excitados se puede ajustar con un solo valor de la masa pero las configuraciones no son estables [52].

Las configuraciones con bosones en distintos estados proveen una fenomenología más rica al SFDM. Los estados están caracterizadas por sus números cuánticos  $n$ ,  $\ell$  y  $m$ ; y es posible explorar distintas combinaciones de dichos valores como por ejemplo

en el trabajo [53], donde toman  $n \neq 0, \ell = m = 0$ , para el cual  $n$  toma distintos valores. Estas configuraciones son llamadas multi-estado y fueron propuestas para obtener curvas de rotación planas a grandes radios con SFDM. Por lo mismo es importante conocer la estabilidad de los multi-estados y ésta fue probada en [43, 54].

En este trabajo nos centramos en las estrellas de bosones con multi-estados, es decir,  $\ell$ -estrellas de bosones como halo de materia oscura escalar. Partiendo de las soluciones al estado base y estados excitados de forma independiente para después explorar las soluciones al sistema de ecuaciones acoplado, tomando la regla de selección  $n - 1 - \ell = 0$ , indicando que tomamos únicamente las soluciones que no tienen nodos para asegurar su estabilidad. La estabilidad para el caso de multi-estados ha sido estudiada en [55], donde se menciona que tener un estado excitado permite tener un mayor rango radial para objetos astronómicos, es decir, que el tener más de un estado podría resolver las discrepancias creadas por este centro solitónico del campo escalar para las curvas de rotación. Por ello, decidimos centrar nuestros esfuerzos en estudiar los multi-estados con el estado base y dos estados excitados.

En la siguiente sección (2.1) describiremos de forma general cómo obtener los sistemas de ecuaciones que describen a las estrellas de bosones, sus condiciones iniciales y de frontera, y su transformación a un sistema de ecuaciones de primer orden que posteriormente es resuelto utilizando el método de shooting y un Runge Kutta. En la sección 2.1.1 se muestran explícitamente las ecuaciones resueltas de forma independiente para distintos valores de  $\ell$ , su función de masa y su rapidez circular. Mientras que en la sección 2.1.2 se muestran las ecuaciones acopladas hasta  $\ell = 2$ . Finalmente, en la sección 2.1.3 se describen las características de las ecuaciones para cada uno de los diferentes casos.

## 2.1. $\ell$ -estrellas de bosones

Para obtener el sistema de ecuaciones que describen a las  $\ell$ -estrellas de bosones se obtuvo el límite no relativista de las ecuaciones de Einstein-Klein Gordon (EKG), siguiendo el procedimiento presentado en [56, 57], con el potencial de un campo escalar de espín 0

$$V(\Psi_{n\ell m}) = -\frac{1}{2}m_a^2\Psi_{n\ell m}^2, \quad (2.1)$$

donde  $m_a$  es la masa del campo escalar y el subíndice  $a$  hace referencia al axión. El sistema de ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP) de forma general es

$$i\hbar\dot{\Psi}_{nlm} = -\frac{\hbar^2}{2m_a}\nabla^2\Psi_{nlm} + m_a V\Psi_{nlm}, \quad \nabla^2\Psi_{nlm} = 4\pi G m_a \sum_{nlm} |\Psi_{nlm}|^2. \quad (2.2)$$

Las soluciones a este sistema son configuraciones autogravitantes de una combinación ortogonal de estados etiquetados con los números cuánticos  $n$ ,  $\ell$  y  $m$ ,  $\Psi_{nlm}$ , estos estados están ocupados por bosones de masa  $m_a$  y  $m_a|\Psi_{nlm}|^2$  es la contribución del estado  $\Psi_{nlm}$  a la densidad de masa que genera el potencial gravitacional  $V$ .

Considerando configuraciones estacionarias y axisimétricas, se propone la siguiente solución [58]

$$\Psi_{nlm} = \Psi_{nlm}(t, \vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma_{nlm}t} r^\ell \psi_{nlm}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.3)$$

donde  $Y_{\ell m}$  son los armónicos esféricos y los valores que pueden tomar los números cuánticos son  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, n-1$  y  $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$ . Al igual que en problema de mecánica cuántica en el que se tiene una partícula libre en un potencial externo, la función radial  $\psi_{nlm}$  tiene un número de nodos dado por  $n-1-\ell$ .

Las estrellas de bosones son soluciones esféricas a (2.1) para un solo  $\Psi_{n00}$ . Para  $n=1$  la función radial tiene cero nodos y es estable, las soluciones con  $n>1$  tienen  $n-1$  nodos y son inestables. Las  $\ell$ -estrellas de bosones son soluciones con  $\ell$  y  $n$  fijas y con  $\ell \neq 0$ , y se cumple para la funciones radiales, distinguidas por  $m$

$$\psi_{nl-\ell} = \psi_{nl-\ell+1} = \dots = \psi_{nl\ell-1} = \psi_{nl\ell}, \quad (2.4)$$

implicando que la densidad total de materia tenga simetría esférica. Finalmente, las multi- $\ell$ -estrellas de bosones son soluciones que consideran varios valores de  $\ell$  pero que al igual que las  $\ell$ -estrellas de bosones, para cada  $\ell$ ,  $n$  es fija y los  $2\ell+1$  campos  $\psi_{nlm}$  tienen la misma función radial como se expresa en (2.4). Además, las multi- $\ell$ -estrellas de bosones tienen simetría esférica. Es importante señalar que en este trabajo nos referimos a las multi- $\ell$ -estrellas como el caso de multiestados.

Así, la ecuación análoga a la ecuación de Poisson es [58]

$$\nabla_{r\ell}^2 V_{\ell 0} = 4\pi G m_a^2 \frac{\delta_{\ell 0}}{r^\ell} \sum_{n, \ell_1} (2\ell_1 + 1) r^{2\ell_1} \psi_{n\ell_1 0}^2, \quad (2.5)$$

donde se ha tomado el índice  $m = 0$  y

$$\nabla_{r\ell}^2 = \partial_r^2 + \left[ \frac{2(\ell + 1)}{r} \right] \partial_r. \quad (2.6)$$

Adicionalmente, se puede notar que el lado derecho de la ecuación 2.1 se anula si  $\ell \neq 0$ , por la delta de Kronecker, implicando que el único término diferente de cero en este caso es el monopolar del potencial gravitacional, por lo que  $V_{\ell 0}$  se convierte en  $V_{00}$ . Entonces, la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla_{r\ell}^2 V_{00} = 4\pi G m_a^2 \sum_{n, \ell_1} (2\ell_1 + 1) r^{2\ell_1} \psi_{n\ell_1 0}^2. \quad (2.7a)$$

Además, la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r\ell}^2 \psi_{n\ell 0} = (m_a V_{00} - \gamma_{n\ell 0}) \psi_{n\ell 0}, \quad (2.7b)$$

por simplicidad en la escritura del desarrollo de aquí en adelante se tomará  $\ell_1 \rightarrow \ell$ .

Para poder resolver el sistema de ecuaciones numéricamente es necesario introducir las siguientes cantidades y adimensionalizar el sistema SP

$$\psi = \bar{\psi} \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}}, E = \bar{E} \epsilon^2 m_a c^2, r = \frac{\bar{r}}{\epsilon} \frac{\hbar}{m_a c}, V = \bar{V} \epsilon^2 c^2, M = \bar{M} \epsilon \frac{m_{pl}^2}{m_a}, \quad (2.8)$$

donde la barra en cada expresión representa la solución numérica,  $\epsilon$  es una cantidad adimensional relacionada con qué tan pequeño es nuestro sistema comparado con la velocidad de la luz,  $E$  es la energía,  $r$  es la coordenada radial,  $V$  es el potencial,  $c$  es la velocidad de la luz y  $m_{pl}$  es la masa de Planck.

Debido a la simetría esférica únicamente tenemos dependencia radial en las ecuaciones, lo cual nos permite escribir las derivadas parciales como derivadas totales respecto a  $r$  en el sistema de ecuaciones. Al sustituir las expresiones (2.8) para adimensionalizar la ecuación análoga a la ecuación de Poisson (2.7a), tenemos

$$\left[ \left( \frac{\epsilon m_a c}{\hbar} \right)^2 \frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{2(\ell + 1) \epsilon m_a c}{\bar{r} \hbar} \frac{\epsilon m_a c}{\hbar} \frac{d}{d\bar{r}} \right] \bar{V}_{00} \epsilon^2 c^2 = 4\pi G m_a^2 \sum_{n, \ell} (2\ell + 1) \left( \frac{\bar{r}}{\epsilon} \frac{\hbar}{m_a c} \right)^{2\ell} \bar{\psi}_{n\ell 0}^2 \frac{\epsilon^4 c^4}{\hbar^2 4\pi G}, \quad (2.9)$$

simplificando tenemos

$$\left[ \frac{\epsilon^4 m_a^2 c^4}{\hbar^2} \right] \left[ \frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{2(\ell + 1)}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right] \bar{V}_{00} = \frac{\epsilon^4 m_a^2 c^4}{\hbar^2} \sum_{n, \ell} (2\ell + 1) \left( \frac{\bar{r}}{\epsilon} \frac{\hbar}{m_a c} \right)^{2\ell} \bar{\psi}_{n\ell 0}^2, \quad (2.10)$$

por simplicidad a partir de aquí omitiremos la notación de barras. Eliminando términos semejantes obtenemos que la ecuación análoga a la ecuación de Poisson es

$$\frac{d^2 V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) r^{2\ell} \psi_{n\ell 0}^2, \quad (2.11a)$$

y al repetir el mismo procedimiento con la ecuación de Schrödinger (2.7b) se obtiene

$$\frac{d^2 \psi_{n\ell 0}}{dr^2} = -\frac{2(\ell + 1)}{r} \frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr} + 2(V_{00} - \gamma_{n\ell 0}) \psi_{n\ell 0}, \quad (2.11b)$$

donde para llegar a ella es importante tomar en cuenta que  $\gamma_{n\ell 0}$  tiene la mismas unidades de adimensionalización que  $E$ . Además, se decidió añadir al sistema de ecuaciones SP la siguiente ecuación para el número de partículas en cada estado [43]

$$\frac{dN_\ell}{dr} = \psi_{n\ell 0}^2 r^{2+2\ell}. \quad (2.12)$$

Para obtener las soluciones numéricas al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones anteriores, es importante conocer las condiciones iniciales y de frontera del sistema. Las condiciones de frontera deben de garantizar que las soluciones sean regulares, es decir, que existan sus derivadas para poder resolver el sistema de ecuaciones y que sean asintóticamente planas, indicando que las soluciones no deben de tener nodos, es decir, que no tenga raíces en  $r = 0$ . Lo cual implica que la expresión (2.11b) se convierta en un problema de eigenvalores de las frecuencias  $\gamma_{n\ell 0}$ .

El que las soluciones sean regulares en el origen implica las siguientes condiciones iniciales obtenidas al realizar una expansión en serie de Taylor, para el potencial

$$V'_{00}(0) = 0, \quad V''_{00}(0) = 0, \quad V'''_{00}(0) = 0, \quad V_{00}(r = 0) = v_1, \quad (2.13)$$

mientras que para el campo y para la frecuencia

$$\psi'_{n\ell 0}(0) = 0, \quad \psi''_{n\ell 0}(0) = \frac{2V_{00}(0)\psi_{n\ell 0}(0)}{3 + 2\ell}, \quad \psi'''_{n\ell 0}(0) = 0, \quad \gamma(r = 0) = v_2, \quad (2.14)$$

donde se han asignado las variables  $v_1$  y  $v_2$  a aquellas condiciones iniciales desconocidas. Además, para el campo se debe cumplir  $\psi_{n\ell 0}(r = 0) = C_i$ , donde  $C_i$  es el valor de una constante que indica el valor de la amplitud central del estado.

Adicionalmente, es importante notar que el hecho de que  $\frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr}(r = 0) = 0 = \frac{dV_{00}}{dr}(r = 0)$  hace que el sistema de ecuaciones formado por (2.11a) y (2.11b) no diverja al tener términos de la forma  $1/r$ .

Por otro lado, que las soluciones sean asintóticamente planas implica las siguientes condiciones de frontera cuando  $r \rightarrow \infty$

$$\psi_{n\ell 0} = 0, \quad V_{00} = -\frac{M}{r}, \quad \frac{V_{00}}{r}(r \rightarrow \infty) + \frac{dV_{00}}{dr}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.15)$$

donde la segunda condición implica la tercera, es decir, la tercera condición es impuesta.

Debido a que desconocemos algunas de las condiciones de frontera de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, implementamos el método de shooting, el cual consiste en encontrar soluciones al problema de condiciones de frontera para diferentes condiciones iniciales hasta encontrar una solución que también cumpla con las condiciones de frontera, lo cual permite encontrar las raíces, es decir, los valores de  $C_i$ ,  $v_1$  y  $v_2$  para los cuales el sistema de ecuaciones cumple las condiciones. Para implementar el shooting se realizó el siguiente cambio de variable

$$y_1 = \psi_{n\ell 0}, \quad y_2 = \frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr} = \frac{dy_1}{dr}, \quad y_3 = V_{00}, \quad y_4 = \frac{dV_{00}}{dr} = \frac{dy_3}{dr}, \quad y_5 = \gamma_{n\ell 0}, \quad y_6 = N_\ell, \quad (2.16)$$

lo cual permitió pasar de un sistema de ecuaciones de segundo grado a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \\ y_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{-2(\ell+1)}{r}y_2 + 2y_1(y_3 - y_5) \\ y_4 \\ -\frac{2(\ell+1)}{r}y_4 + \sum_{n,\ell} (2l+1)r^{2l}y_1^2 \\ 0 \\ y_1^2 r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

y con un Runge Kutta de cuarto orden se resolvió el sistema de ecuaciones.

Posteriormente se utilizaron estas soluciones para obtener la rapidez circular ( $V_c$ ), para ello se utilizó la expresión

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}, \quad (2.18)$$

ya que las soluciones únicamente dependen de la coordenada radial. Donde  $M(r)$  es la función de masa dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\tilde{r})\tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (2.19)$$

Al utilizar los cambios de variable (2.8) con las soluciones numéricas obtenidas le regresamos las unidades físicas a las soluciones, por lo que en este caso la densidad está dada por

$$\rho(r) = \frac{m_a^2 \epsilon^4}{4\pi(1.95 \times 10^{-69})} \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) r^{2\ell} \psi_{n\ell}^2 \frac{M_\odot}{\text{kpc}^3}, \quad (2.20)$$

donde  $r^{2\ell} \psi_{n\ell}^2$  es la densidad numérica,  $M_\odot$  indica que son masas solares, la cual es igual a  $1.99 \times 10^{30}$  kg y kpc indica kiloparsec, el cual es igual a  $3.086 \times 10^{16}$  km. Por lo tanto, la rapidez circular es

$$v_c^2 = 8.95 \times 10^{10} \frac{\epsilon^2}{r} \int_0^R \tilde{r}^2 \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) \tilde{r}^{2\ell} \psi_{n\ell}^2 d\tilde{r} \left( \frac{\text{km}}{\text{s}} \right)^2. \quad (2.21)$$

En las siguientes secciones tomaremos dos casos del sistema de ecuaciones SP, a los que dividiremos en soluciones independientes (sección 2.1.1) y soluciones acopladas (sección 2.1.2). Donde en cada caso, después de obtener sus soluciones se continuo con el análisis para obtener su rapidez circular, es decir, su curva de rotación.

### 2.1.1. Soluciones independientes

Como primer paso para obtener las soluciones a las  $\ell$ -estrellas de bosones se obtuvieron soluciones a cada uno de los estados por separado, es decir, soluciones con  $\ell = 0$ ,  $\ell = 1$  y  $\ell = 2$ . El obtener las soluciones nos permitió explorar y conocer las características de ellas, las cuales se encuentran descritas detalladamente en la sección 2.1.3 en conjunto con las características correspondientes a la solución de las ecuaciones acopladas, subsección 2.1.2. Para los casos independientes, dichas características de reescalamiento nos permitieron fijar la amplitud central del estado, es decir,  $\psi_{n\ell}(r = 0) = 1$  y el hecho de que forman una familia nos permitió utilizar el parámetro  $\epsilon$  como factor de reescalamiento en la amplitud central. A continuación se presentará explícitamente el sistema de ecuaciones resuelto de cada uno de los casos independientes y su rapidez circular.

#### Estrella de bosones ( $\ell = 0$ )

Al tomar el sistema de ecuaciones (2.11b) y (2.11a), con  $\ell = 0$  y  $n = 1$ , se obtienen las soluciones conocidas como una estrella de bosones simple, las cuales han sido estudiadas a profundidad en [59, 52]. Explícitamente, el sistema de ecuaciones es

$$\frac{d^2 \psi_{100}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{100}) \psi_{100} - \frac{2}{r} \frac{d\psi_{100}}{dr} \quad (2.22a)$$

y

$$\frac{d^2 V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + \psi_{100}^2. \quad (2.22b)$$

Donde las condiciones iniciales que serán encontradas utilizando el método de shooting son:  $\gamma_{100}(r = 0)$  y  $V_{00}(r = 0)$ . La función de masa está dada por

$$M(r) = 1.33 \times 10^{-10} \frac{\epsilon}{m_a} \int_0^r \tilde{r}^2 \psi_{100}^2 d\tilde{r} M_{\odot}, \quad (2.23)$$

y por lo tanto, la rapidez circular para el estado base es

$$v_{c,\ell=0}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\epsilon^2}{r} \int_0^r \tilde{r}^2 \psi_{100}^2 d\tilde{r} \left( \frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.24)$$

Así, los parámetros libres a ser estimados son  $\epsilon$  y  $m_a$ . Además, podemos notar que la rapidez circular únicamente depende de  $\epsilon$  como parámetro libre.

### Estrella de bosones con estado excitado ( $\ell = 1$ )

Consideramos el caso en el que el halo de materia oscura únicamente está formado por un estado excitado, el cuál está relacionado con la simetría cuadrupolar. Resolvimos el sistema de ecuaciones de SP con el término  $\ell = 1$  y  $n = 2$ , dado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2 \psi_{210}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{210})\psi_{210} - \frac{4}{r} \frac{d\psi_{210}}{dr} \quad (2.25a)$$

y

$$\frac{d^2 V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + 3r^2 \psi_{210}^2. \quad (2.25b)$$

Las condiciones iniciales son las mismas que para el estado base [2.1.1](#), donde  $\gamma_{210}(r = 0)$  y  $V_{00}(r = 0)$  serán determinados al resolver el problema de eigenvalores. Por otro lado, la función de masa está dada por

$$M(r) = 1.33 \times 10^{-10} \frac{\epsilon}{m_a} \int_0^r 3\tilde{r}^4 \psi_{210}^2 d\tilde{r} M_{\odot}, \quad (2.26)$$

y la rapidez circular

$$v_{c,\ell=1}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\epsilon^2}{r} \int_0^r \tilde{r}^4 \psi_{210}^2 d\tilde{r} \left( \frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.27)$$

Podemos notar que al igual que en el estado base, los parámetros libres son  $\epsilon$  y  $m_a$ .

## Superposición

El caso de superposición es una primera aproximación al caso de soluciones acopladas, donde se añadieron las soluciones sistemáticamente, es decir, se comenzó con las soluciones independientes para  $\ell = 0$  y  $\ell = 1$ , y posteriormente se añadieron las soluciones correspondientes a  $\ell = 2$ , las cuales corresponden al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2\psi_{320}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{320})\psi_{320} - \frac{6}{r} \frac{d\psi_{320}}{dr}, \quad (2.28a)$$

y

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + 5r^4\psi_{320}^2. \quad (2.28b)$$

donde en este caso  $\gamma_{320}(r = 0)$  y  $V_{00}(r = 0)$ , también son determinados al utilizar el método de shooting. Debido a que la función de masa proviene de la integral del potencial gravitacional y éste cumple con el principio de superposición, se asumió que la función de masa es una superposición de las soluciones de los sistemas de ecuaciones de SP independientes para cada estado. Por lo que la expresión para  $M(r)$  total es

$$M_{\text{TOT}}(r) = M_{\ell=0}(r) + M_{\ell=1}(r) + M_{\ell=2}(r). \quad (2.29)$$

Esta expresión nos permite escribir a la rapidez circular total de la siguiente forma

$$v_{c,\text{TOT}} = \sqrt{v_{c,\ell=0}^2 + v_{c,\ell=1}^2 + v_{c,\ell=2}^2}, \quad (2.30)$$

donde  $v_{c,\ell=0}$  es la ecuación (2.24),  $v_{c,\ell=1}$  la ecuación y  $v_{c,\ell=2}$  es

$$v_{c,\ell=2}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\epsilon_2^2}{R} \int_0^R r^6 \psi_{320}^2 dr \left( \frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.31)$$

Es importante notar que en la expresión anterior se cambió  $\epsilon$  por  $\epsilon_2$ , comparando con la ecuación general (2.21). Esto se debe a que para el caso de superposición se tomaron como parámetros libres  $m_a$  y  $\epsilon_\ell$  para cada estado debido a su relación con la amplitud central de éste. Por lo que los parámetros libres son  $m_a, \epsilon_0, \epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

### 2.1.2. Soluciones acopladas

Para resolver el sistema de ecuaciones acoplado formado por las ecuaciones (2.11b) y (2.11a), se decidió obtener las soluciones estables, es decir, aquellas que no tienen nodos y que siguen la regla de selección  $n - 1 - \ell = 0$  [58]. Además, se tomaron las soluciones hasta  $\ell = 2$  porque los resultados del caso de superposición nos indicaban

que  $\ell = 2$  tiene un buen alcance para grandes extensiones radiales, en el capítulo 4 se discute a detalle los resultados obtenidos. Por otro lado, en el apéndice encontrarán resultados preliminares al tomar hasta  $\ell = 3$ .

El sistema de ecuaciones de SP acoplado resuelto es

$$\frac{d^2\psi_{100}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{100})\psi_{100} - \frac{2}{r}\frac{d\psi_{100}}{dr}, \quad (2.32a)$$

$$\frac{d^2\psi_{210}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{210})\psi_{210} - \frac{4}{r}\frac{d\psi_{210}}{dr}, \quad (2.32b)$$

$$\frac{d^2\psi_{320}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{320})\psi_{320} - \frac{6}{r}\frac{d\psi_{320}}{dr}, \quad (2.32c)$$

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{dV_{00}}{dr} + \psi_{100}^2 + 3r^2\psi_{210}^2 + 5r^4\psi_{320}^2. \quad (2.32d)$$

Para encontrar las soluciones resolvimos el problema de eigenvalores de las frecuencias  $\gamma_{100}$ ,  $\gamma_{210}$  y  $\gamma_{320}$  utilizando el método de shooting. Parte de las condiciones iniciales implican  $\psi_{100}(r=0) = C_1$ ,  $\psi_{210}(r=0) = C_2$  y  $\psi_{320}(r=0) = C_3$ . Por lo tanto,  $\psi_{100}(0)$ ,  $\psi_{210}(0)$  y  $\psi_{320}(0)$  se convierten en parámetros libres, en conjunto con  $\epsilon$  y  $m_a$  para este caso. Es importante mencionar que añadir las amplitudes centrales como parámetros libres implica resolver el problema de eigenvalores a cada paso del sampleo, haciendo al algoritmo más costoso computacionalmente. La expresión para el número de partículas en cada estado también es parte del sistema de ecuaciones, lo cual significa que también las soluciones para  $N_{\ell=0}$ ,  $N_{\ell=1}$  y  $N_{\ell=2}$  están siendo encontradas.

### 2.1.3. Características de las soluciones

Al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de SP se observaron características interesantes. En el caso de las soluciones independientes ( $\psi_{100}$ ,  $\psi_{210}$  y  $\psi_{320}$ ) se pudo observar que forman una familia, es decir, que al tomar la solución para cierta amplitud central  $\psi_{n\ell 0}(0)$  podemos utilizar la expresión

$$\lambda = \left( \frac{1}{\psi_{n\ell 0}(0)} \right)^{(1/(\ell+2))}, \quad (2.33)$$

para obtener la solución correspondiente a una amplitud central  $\psi_{n\ell 0}(0)$  diferente sin necesidad de volver a resolver el sistema de ecuaciones, ver Figura 2.1. Esto se debe a las propiedades de reescalamiento del sistema de ecuaciones, las cuales pueden ser

encontradas al utilizar la transformación  $(r, \psi_{n\ell 0, V_{00}}) \rightarrow (r\lambda, \psi_{n\ell 0}/\lambda^{\ell+2}, V_{00}/\lambda^2)$ . Por lo tanto, para las soluciones independientes el parámetro  $\lambda$  es análogo al parámetro  $\epsilon$ , dicha equivalencia se deja de cumplir en el caso de las soluciones de multiestados, esto se puede ver en la ecuación (2.20), donde el parámetro  $\epsilon$  está multiplicando la suma sobre  $n$  y  $\ell$ , por lo tanto si el parámetro  $\epsilon$  cambia, cambiaría todos los estados en la suma por igual.

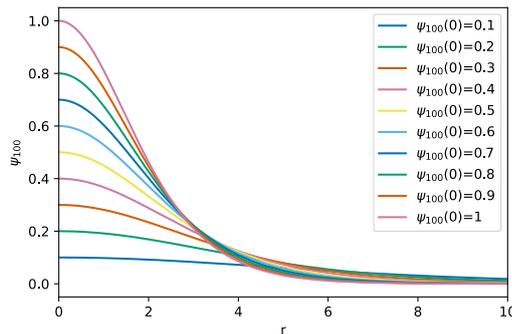


Figura 2.1: Soluciones numéricas para el sistema de ecuaciones del estado base, descrito por las ecuaciones (2.22a) y (2.22b). Cada solución fue obtenida utilizando la expresión (2.33) con  $\psi_{100} = 1$  como principal.

En la Figura 2.2 y Figura 2.3, se muestran los perfiles de densidad numéricos para los sistemas de ecuaciones descritos en las secciones 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente.

Al comparar estas gráficas se puede observar que en la Figura 2.2 cada densidad numérica tiene una mayor amplitud y extensión radial que las densidades numéricas de la Figura 2.3, dichas discrepancias pueden ser atribuidas a la interacción gravitacional entre los estados y al sistema de ecuaciones acoplado que las ecuaciones (2.32a - 2.32d) representan. Además, es notoria la diferencia entre una contribución independiente, i.e. resolver independientemente cada estado y tomar la superposición de ellos; y la contribución acoplada de cada estado a la curva de rotación total. Debido a que estas soluciones están relacionadas con los armónicos esféricos, se puede ver que para las soluciones de multi-estados, cada uno de ellos tiene una contribución multipolar. Para más detalles acerca de las características de las  $\ell$ -estrellas y en otro contexto se recomienda consultar [60, 61, 62].

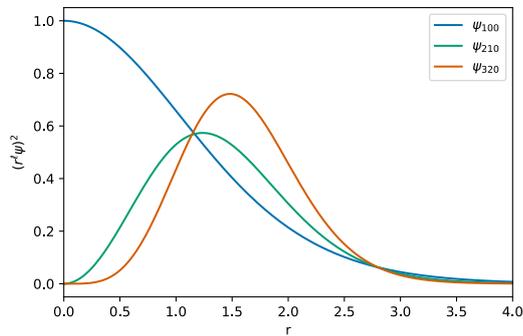


Figura 2.2: Perfiles de densidad numéricos para cada estado, resolviendo el sistema de ecuaciones para el estado base  $\psi_{100}$  (2.22a)-(2.22b), el primer estado excitado ( $\psi_{210}$ ), (2.25a)-(2.25b) y el sistema de ecuaciones (2.28a)-(2.28b) para el estado  $\psi_{320}$ . La línea azul corresponde al estado  $\psi_{100}$ , la línea verde al estado  $\psi_{210}$  y la línea naranja corresponde al estado  $\psi_{320}$ .

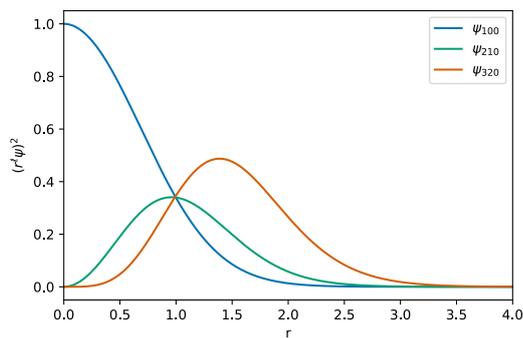


Figura 2.3: Perfiles de densidad numéricos para cada estado, resolviendo el sistema de ecuaciones (2.32a - 2.32d). La línea azul corresponde al estado  $\psi_{100}$ , la línea verde al estado  $\psi_{210}$  y la línea naranja corresponde al estado  $\psi_{320}$ .

# Capítulo 3

## Datos utilizados y análisis estadístico, frecuentista y bayesiano.

En este capítulo explicaremos la muestra de datos utilizada en este trabajo, sección 3.1 y los métodos estadísticos para el análisis de ellos (sección 3.2), al igual que el procedimiento que se siguió para el análisis.

### 3.1. Datos

Se ha mencionado en el capítulo 1 la importancia de las observaciones de las curvas de rotación para la inferencia de la existencia de materia oscura a escala galáctica y como las observaciones de M31 realizadas por Vera Rubin y Kent Ford en 1970 fueron importantes para que la comunidad científica comenzara a atacar el problema de la materia oscura desde distintos ángulos.

Actualmente, se sabe que las galaxias de bajo brillo superficial (LSBG, por sus siglas en inglés) son galaxias propicias para probar modelos de materia oscura [63, 64], debido a su baja visibilidad en el espectro óptico y su fotometría en HI, lo cual puede indicar que la dinámica de su curva de rotación principalmente depende de la contribución de la materia oscura.

Por lo anterior, decidimos utilizar un conjunto de 17 LSBG, basándonos en la buena calidad de los datos que fue clasificada por [65] y en su modelo de masa [66, 67, 46].

En la tabla 3.1 se muestra la morfología de cada galaxia del conjunto seleccio-

nado, para mayores detalles sobre las características de los datos consultar [65]. La morfología de cada galaxia nos puede dar información de su historia de formación, sin embargo, al no encontrar ninguna relación entre su morfología y los parámetros libres del modelo, se decidió mostrar los resultados basándonos en la extensión radial de las galaxias y su comportamiento lineal. Es decir, se dividieron en aquellas con  $r < 10$  kpc y  $r > 10$  kpc, añadiendo una categoría extra para 3 galaxias con  $r < 10$  kpc, ya que los datos parecen indicar que son una línea recta.

<b>Galaxia</b>	<b>Morfología</b>
ESO3020120	Espiral, indicio de barra?
ESO3050090	Espiral barrada
ESO4880490	Barra de Magallanes inclinada
UGC11557	Espiral difusa, núcleo pequeño
UGC11616	Difusa, irregular
UGC4115	Nudosa y difusa
ESO0140040	Bulbo, brazos espirales justos
ESO0840411	Edge-on
ESO1200211	Barra de Magallanes difusa
ESO1870510	Espiral irregular, floclante
ESO2060140	Espiral
ESO4250180	Espiral barrada abierta
F730-V1	Espiral
UGC11454	Espiral difusa, núcleo pequeño
UGC11583	Barra de Magallanes tenue
UGC11648	Irregular
UGC11748	Irregular, núcleo/barra brillante?

Tabla 3.1: Morfología de cada galaxia en el conjunto de datos seleccionado, para más detalles consultar [65].

## 3.2. Análisis estadístico

Como primer paso en nuestro análisis calculamos la  $\chi^2$  mínima, la cual está descrita en la sección 3.3. Comenzando por el estado base y la superposición, añadiendo

sistemáticamente estados, es decir,  $\psi_{100} + \psi_{210}$  y  $\psi_{100} + \psi_{210} + \psi_{320}$ , éstos últimos resultados nos dieron información de cómo contribuye cada uno de los estados a la curva de rotación total. Concluyendo que para la mayoría de las galaxias en la muestra deberían incluir al menos tres estados (un estado base y dos estados excitados).

Debido a los resultados mencionados anteriormente, se decidió centrar el trabajo en el modelo descrito en la sección 2.1.2, ya que sirvieron como una primera aproximación al sistema acoplado, y utilizar como la información a priori en el algoritmo de muestreo anidado, los resultados de la  $\chi^2$  de la superposición de estados. Como es un sistema de ecuaciones acoplado, no se puede utilizar el parámetro  $\epsilon$  para cada estado como se hizo en el caso de superposición. En la ecuación (2.21) se puede observar que  $\epsilon$  se convierte en un parámetro global para este caso. Por lo tanto, se eligió la amplitud central de cada estado ( $\psi_{n\ell}(0)$ ) como parámetro libre, la cual es parte de las condiciones iniciales necesarias para resolver el sistema de ecuaciones numéricamente. Este cambio hizo que la estimación de parámetros fuera más costosa computacionalmente debido a que la integración con el método de shooting se tenía que hacer a cada paso del algoritmo de muestreo anidado.

Los parámetros libres para el caso de multi-estados son:  $m_a$ ,  $\epsilon$ ,  $\psi_{100}(0)$ ,  $\psi_{210}(0)$  and  $\psi_{320}(0)$ .

Elegimos los siguientes priors planos  $-26 \leq \log(m_a[\text{eV}/c^2]) \leq -20$ ,  $-6 \leq \log(\epsilon) \leq -2$ ,  $-5 \leq \log(\psi_{100}(0)) \leq 0$ ,  $-6 \leq \log(\psi_{210}(0)) \leq 0$  y  $-6 \leq \log(\psi_{320}(0)) \leq 0$ . Donde la cota superior de la masa del campo escalar ( $m_a$ ) es elegido a partir de las observaciones de Lyman- $\alpha$  [38, 39] y el inferior a partir de los resultados obtenidos para el modelo mencionados anteriormente. El parámetro  $\epsilon$  está relacionado con qué tan pequeño es nuestro sistema respecto a la velocidad de la luz, debido a que estamos tomando el límite no relativista queremos que sea suficientemente pequeño, la cota inferior de este prior fue restringida al resolver numéricamente el sistema ecuaciones ya que al hacer más pequeña la cota no se encontraron condiciones iniciales que cumplieran la condición de cero nodos. Los prior referentes a las amplitudes centrales se eligieron con una cota superior de  $\log(\psi_{\ell n_0}(0)) = 0$ , debido a que una reparametrización en la que la amplitud central de cada estado sea la unidad puede ser encontrada, mientras que la cota inferior fue restringida al considerar que una contribución numérica de  $10^{-5}$  es cercana a cero, es decir, el estado no contribuye a la curva de rotación total. Para los casos independientes, estado base ( $\psi_{100}$ ) y primer estado excitado ( $\psi_{210}$ ) elegimos los

mismos priors para los parámetros libres  $m_a$  y  $\epsilon$ , respectivamente.

Para el número de “live points” necesarios para el algoritmo de muestreo anidado se siguió la regla  $50 \times k$ , donde  $k$  corresponde a la dimensionalidad del vector de parámetros libres, como un número mínimo. Se modificó SimpleMC, un código que utiliza dynesty [68], este método de sampleo nos permitió obtener la evidencia bayesiana, la cuál utilizamos para obtener el factor de Bayes. Este algoritmo es descrito en la sección 3.4.1.

Adicionalmente, se utilizó la librería fgivenx [69] para la visualización del análisis obtenido con el muestreo anidado. Los contornos a  $2\sigma$  obtenidos al utilizar esta librería pueden ser observados en las figuras.

Para conocer cual de los tres casos considerados en este trabajo es favorecido por los datos como componente de materia oscura, calculamos los criterios de información de Akaike y bayesiano, en conjunto con el factor de Bayes. Para este último tomamos al estado base ( $\psi_{100}$ , section 2.1.1) como el modelo base, debido a su simplicidad y a su correspondencia con el perfil solitónico obtenido de las simulaciones de campo escalar [34], que usualmente es utilizado en la literatura con un perfil NFW en la parte exterior [36, 37]. Adicionalmente, tomamos las cotas para la masa del campo escalar encontradas en [46] para este caso,  $0.212 \times 10^{-23} < m_a[\text{eV}/c^2] < 27.0 \times 10^{-23}$ .

En las siguientes secciones, adicional a la explicación de las métricas utilizadas en el análisis, se dará una breve introducción a estadística bayesiana, la cual es clave en el muestreo anidado utilizado en este trabajo.

### 3.3. $\chi^2$

Como se mencionó anteriormente, en la primera parte del análisis se minimizó el error a través de la siguiente expresión

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(v_{\text{obs}} - v(x_i, \theta))^2}{\sigma_{v_{\text{obs}}}^2}, \quad (3.1)$$

donde  $v_{\text{obs}}$  es la rapidez circular observada,  $\sigma_{v_{\text{obs}}}^2$  es la varianza de  $v_{\text{obs}}$ ,  $\theta$  son los parámetros libres y  $v(x_i, \theta)$  es el modelo evaluado en los puntos observados.

## 3.4. Estadística Bayesiana

A diferencia de la estadística frecuentista, la estadística Bayesiana define la probabilidad como una medida de qué tan posible es que un evento o la posición de una partícula sea cierta, dado otro evento que sabemos que es cierto,  $P(A|B)$ . A esta cantidad se le conoce como la probabilidad condicional, debido a que depende de que el observador tenga información del evento y puede actualizarse al tener más información. La estadística Bayesiana se basa en el teorema de Bayes, definido de la siguiente forma

$$P(\Theta) = \frac{\mathcal{L}(\Theta)\pi(\Theta)}{z}, \quad (3.2)$$

donde

- $P(\Theta) = P(\theta|D, M)$ , es el *posterior* y nos da la probabilidad de una hipótesis (modelo,  $M$ ) dada la evidencia observada (datos,  $D$ ), donde  $\theta$  corresponde a los parámetros libres del modelo.
- $\mathcal{L}(\Theta) = P(D|\theta, M)$ , es el *likelihood* o verosimilitud, es la probabilidad de observar los datos bajo la suposición de un modelo. Se forma a partir de la distribución de probabilidad conjunta de la muestra.
- $\pi(\Theta) = P(\theta|M)$ , es el *prior*, es decir, el grado de nuestra creencia a priori de la hipótesis basada en nuestro conocimiento previo.
- $z = P(D|M)$ , es la evidencia, la probabilidad de los datos en todas sus posibilidades y está dada por la siguiente integral sobre todo el espacio de parámetros ( $\Omega_\Theta$ ).

$$z = \int_{\Omega_\Theta} \mathcal{L}(\Theta)\pi(\Theta)d\Theta. \quad (3.3)$$

### 3.4.1. Muestreo anidado

El muestreo anidado (nested sampler en inglés) es un algoritmo introducido por [70] en el 2004, dicho algoritmo es muy útil para lidiar con espacios de parámetros grandes o en casos en el que el cálculo del likelihood es más costoso computacionalmente. A continuación se presenta una breve explicación de como funciona

- **Inicialización:** Comienza con un conjunto de puntos de la distribución de los parámetros del modelo. Estos puntos son conocidos como *live points* y pueden ser vistos como un conjunto de partículas en el espacio de parámetros.

- **Iteración:** Posteriormente, a cada iteración el algoritmo identifica el punto con el menor valor del likelihood, lo elimina y lo reemplaza con un punto muestreado del prior, con la restricción de que su probabilidad sea mayor que la del punto eliminado. Este proceso continúa hasta alcanzar cierto umbral de probabilidad.
- **Muestreo del Prior dentro de las constricciones del likelihood:** Al explorar gradualmente el espacio de parámetros eligiendo muestreos del prior dentro de la región donde likelihood, la cual es definida por aquel punto con el menor likelihood, se permite que el algoritmo se centre únicamente en las regiones con mayor likelihood.
- A cada iteración el área del likelihood va disminuyendo y los *live points* continúan explorando el espacio de parámetros en aquellas regiones con mayor likelihood. Este proceso continúa hasta que el umbral del likelihood es muy cercano al del máximo likelihood del modelo.
- **Estimación de evidencia y posteriors:** Los *live points* nos ayudan a estimar el valor de la evidencia y también pueden ser utilizados para aproximar las distribuciones posterior del modelo.

Para mayor detalle sobre como funciona el muestreo anidado, se recomienda consultar [71].

### 3.4.2. Factor de Bayes

El factor de Bayes,  $B_{12}$ , es razón entre el *posterior* de un modelo ( $M_1$ ) comparado con otro modelo ( $M_2$ ), dado cierto conjunto de datos ( $D$ ), permitiéndonos compararlos entre sí. En escala logarítmica

$$\log B_{12} \equiv \log \left[ \frac{z_1(D|M_1)}{z_2(D|M_2)} \right] \quad (3.4)$$

$$= \log [z_1(D|M_1)] - \log [z_2(D|M_2)], \quad (3.5)$$

donde  $z(D|M)$  es la evidencia bayesiana, la cual está definida como

$$z(D|M) = \int P(\theta|M)\mathcal{L}(D|\theta, M)d\theta. \quad (3.6)$$

Se recomienda la revisión [72, 73] acerca de estadística bayesiana y selección de modelos.

$\log B_{12}$	Información
<1.0	Inconcluso (apoya al $M_2$ )
1.0	Débil
2.5	Moderado
5.0	Fuerte
>5	Muy fuerte

Tabla 3.2: Escala de Jeffrey para cuantificar qué tan bueno es un modelo respecto a otro.

Si  $\log(B_{12})$  es mayor que la unidad, los datos favorecen ligeramente el modelo  $M_1$ , de lo contrario ( $\log(B_{12})$  es más pequeño que la unidad), los datos favorecen al modelo  $M_2$ . La tabla 3.2 contiene la información que nos da la evidencia según la escala de Jeffrey [74], la cual cuantifica qué tan bueno es un modelo respecto de otro.

## 3.5. Criterios de información

### 3.5.1. Criterio de información de Akaike (AIC)

El Criterio de información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés) está basado en la teoría de la información y nos da una forma de comparar modelos dado un conjunto de datos [75]

$$\text{AIC} = -2 \ln \mathcal{L} + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}, \quad (3.7)$$

donde  $k$  es el número de parámetros libres en nuestro modelo,  $n$  es el número de datos de cada galaxia y  $\mathcal{L}$  es el valor máximo del likelihood, el cuál es calculado previamente para cada modelo. El primer término apremia el ajuste, mientras que el segundo penaliza al modelo al incluir el número de parámetros libres, lo cual hace que incremente el valor de la función, Así, el AIC desalienta el sobreajuste. Además, al añadir el último término penaliza el trabajar con una muestra pequeña de datos [76], lo cual es nuestro caso debido a que las galaxias de bajo brillo tienen pocos puntos observables.

### 3.5.2. Criterio de Información Bayesiano (BIC)

Similar al AIC, el BIC es un criterio de selección de modelos y está definido de la siguiente forma [77]

$$\text{BIC} = -2 \ln \mathcal{L} + k \ln n, \quad (3.8)$$

donde el primer término contiene información de qué tan bueno es el ajuste del modelo, mientras que el segundo término lo penaliza al incluir los parámetros libres ( $k$ ) y el número de datos utilizados en el ajuste ( $n$ ).

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1. Casos independientes

La Tabla 4.1 muestra la estimación de parámetros obtenida con el muestreo anidado, el valor de la evidencia ( $\log(z)$ ) y  $-2 \ln \mathcal{L}$ , para los casos 2.1.1 y 2.1.1; el valor medio está reportado con una confianza de  $1\sigma$ . Los valores de  $-2 \ln \mathcal{L}$  y  $\log(z)$  en la Tabla 4.1, muestran que para el conjunto de galaxias los casos en los que solamente la contribución del estado base ( $\psi_{100}$ ) está presente se tiene un mejor ajuste comparado con los casos en los que solamente se tiene un estado excitado ( $\psi_{210}$ ). Además, se puede notar que para todas las galaxias el valor de la masa del campo escalar ( $m_a$ ) es mayor para los casos con el estado excitado que para aquellas con solamente el estado base. Como se mencionó en el capítulo 3.1, presentamos los resultados basándonos en la extensión radial de las galaxias, las cuales están divididas en dos secciones:  $r < 10$  kpc y  $r > 10$  kpc; añadiendo una restricción extra para los datos con un comportamiento lineal, es decir, aquellas galaxias con curva de rotación similar a una línea recta. Las regiones sombreadas corresponden a las cotas para la masa del campo escalar encontradas en [46], como se mencionó anteriormente. Esta clasificación se encuentra en la Figura 4.1 y 4.2, para los casos independientes,  $\psi_{100}$  y  $\psi_{210}$ , respectivamente. Se puede notar que la mayoría de las galaxias con  $r < 10$  kpc tienden a tener una masa más grande mientras que aquellas galaxias con  $r > 10$  kpc tienden a tener masas más ligeras. En las gráficas de contornos se puede notar un caso particular, la galaxia UGC11616 tiene una extensión radial de  $r = 9.6$  kpc, debido a la cercanía al valor  $r = 10$  kpc, se puede asumir que esta galaxia tiene un comportamiento similar a aquellas con  $r > 10$  kpc. Por otro lado, las galaxias con comportamiento lineal y  $r < 10$  kpc están altamente

correlacionadas entre sus parámetros libres en el estado base ( $\psi_{100}$ ), esta correlación parece romperse en el caso de un solo estado excitado ( $\psi_{210}$ ).

Galaxy	$\psi_{100}$				$\psi_{210}$			
	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(z)$	$-2 \log \mathcal{L}$	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(z)$	$-2 \ln \mathcal{L}$
ESO3020120	$-23.20^{+0.08}_{-0.10}$	$-3.42^{+0.03}_{-0.04}$	$-7.93 \pm 0.36$	0.96	$-23.05^{+0.07}_{-0.07}$	$-3.42^{+0.03}_{-0.04}$	$-11.87 \pm 0.36$	8.61
ESO3050090	$-22.88^{+0.15}_{-0.25}$	$-3.62^{+0.09}_{-0.05}$	$-7.05 \pm 0.32$	0.98	$-22.63^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.67^{+0.04}_{-0.04}$	$-13.44 \pm 0.37$	11.11
ESO4880490	$-23.09^{+0.08}_{-0.09}$	$-3.40^{+0.03}_{-0.02}$	$-8.89 \pm 0.36$	2.8	$-22.92^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.42^{+0.02}_{-0.02}$	$-20.87 \pm 0.39$	24.7
UGC11557	$-23.45^{+0.25}_{-1.49}$	$-3.39^{+0.71}_{-0.10}$	$-6.61 \pm 0.33$	0.52	$-23.03^{+0.08}_{-0.22}$	$-3.53^{+0.05}_{-0.04}$	$-11.35 \pm 0.36$	7.61
UGC11616	$-23.31^{+0.03}_{-0.03}$	$-3.25^{+0.01}_{-0.01}$	$-21.02 \pm 0.41$	23.44	$-23.18^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.26^{+0.01}_{-0.01}$	$-62.66 \pm 0.417$	105.97
UGC4115	$-22.39^{+0.29}_{-1.60}$	$-3.67^{+0.76}_{-0.12}$	$-5.75 \pm 0.31$	0.04	$-21.95^{+0.11}_{-0.13}$	$-3.82^{+0.06}_{-0.05}$	$-9.97 \pm 0.36$	4.77
ESO0140040	$-24.05^{+0.04}_{-0.03}$	$-2.90^{+0.01}_{-0.01}$	$-15.62 \pm 0.39$	13.36	$-23.98^{+0.03}_{-0.03}$	$-2.90^{+0.01}_{-0.01}$	$-38.07 \pm 0.41$	57.27
ESO0840411	$-23.29^{+0.20}_{-2.20}$	$-3.54^{+1.04}_{-0.08}$	$-6.480 \pm 0.320$	0.45	$-23.00^{+0.06}_{-0.08}$	$-3.64^{+0.03}_{-0.03}$	$-13.47 \pm 0.36$	12.21
ESO1200211	$-22.12^{+0.17}_{-0.21}$	$-3.99^{+0.06}_{-0.05}$	$-7.57 \pm 0.34$	1.56	$-21.98^{+0.10}_{-0.11}$	$-4.01^{+0.04}_{-0.04}$	$-8.58 \pm 0.33$	4.51
ESO1870510	$-22.47^{+0.12}_{-0.16}$	$-3.77^{+0.06}_{-0.05}$	$-7.76 \pm 0.35$	0.82	$-22.30^{+0.09}_{-0.09}$	$-3.81^{+0.04}_{-0.04}$	$-11.66 \pm 0.36$	8.16
ESO2060140	$-23.30^{+0.04}_{-0.03}$	$-3.28^{+0.01}_{-0.01}$	$-21.31 \pm 0.42$	23.36	$-23.20^{+0.03}_{-0.02}$	$-3.28^{+0.01}_{-0.01}$	$-54.49 \pm 0.42$	89.96
ESO4250180	$-23.72^{+0.21}_{-0.41}$	$-3.23^{+0.15}_{-0.05}$	$-6.88 \pm 0.32$	1.25	$-23.53^{+0.12}_{-0.17}$	$-3.28^{+0.05}_{-0.03}$	$-9.58 \pm 0.35$	30.26
F730-V1	$-23.42^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.21^{+0.01}_{-0.01}$	$-21.79 \pm 0.28$	25.36	$-23.26^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.22^{+0.02}_{-0.02}$	$-54.97 \pm 0.4$	91.74
UGC11454	$-23.52^{+0.03}_{-0.03}$	$-3.19^{+0.01}_{-0.01}$	$-35.45 \pm 0.31$	49.97	$-23.28^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.21^{+0.01}_{-0.01}$	$-128.28 \pm 0.43$	236.57
UGC11583	$-22.16^{+0.18}_{-0.31}$	$-3.82^{+0.11}_{-0.06}$	$-6.57 \pm 0.32$	0.5	$-21.98^{+0.09}_{-0.10}$	$-3.86^{+0.04}_{-0.04}$	$-8.23 \pm 0.35$	2.19
UGC11648	$-23.53^{+0.02}_{-0.03}$	$-3.24^{+0.01}_{-0.01}$	$-113.35 \pm 0.43$	206.47	$-23.41^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.26^{+0.01}_{-0.01}$	$-315.56 \pm 0.44$	609.2
UGC11748	$-23.69^{+0.01}_{-0.01}$	$-2.92^{+0.01}_{-0.01}$	$-122.42 \pm 0.46$	465.26	$-23.63^{+0.01}_{-0.01}$	$-2.92^{+0.004}_{-0.004}$	$-244.21 \pm 0.46$	222.06

Tabla 4.1: Constricción de parámetros,  $\log(z)$  y  $-2 \ln \mathcal{L}$  para cada galaxia. Los casos  $\psi_{100}$  y  $\psi_{210}$  tienen los mismos parámetros libres,  $\log(m_a)$  [eV/c<sup>2</sup>] y  $\log(\epsilon)$ . Los errores están reportados con  $1\sigma$ .

Galaxia	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon_0)$	$\log(\epsilon_1)$	$\chi^2$
ESO3020120	-23.11	-3.46	-3.76	0.41
ESO3050090	-22.75	-3.68	-3.89	0.90
ESO48800490	-22.98	-3.44	-3.69	1.94
UGC11557	-23.32	-3.46	-3.63	0.49
UGC11616	-23.22	-3.28	-3.58	14.99
UGC4115	-23.32	-3.46	-3.634	0.49

Tabla 4.2: Constricción de parámetros con la mínima  $\chi^2$  para la superposición de los estados  $\psi_{100} + \psi_{210}$ . Los parámetros libres son  $\log(m_a)$  [eV/c<sup>2</sup>],  $\log(\epsilon_0)$  y  $\log(\epsilon_1)$ .

## 4.2. superposición

En las siguientes subsecciones mostraremos los resultados encontrados con la mínima  $\chi^2$  para la superposición de estados. Tomando en cuenta dos casos principales, el estado base más el primer estado excitado ( $\ell = 0 + \ell = 1$ , sección 4.2.1) y el estado base más los dos primeros estados excitados ( $\ell = 0 + \ell = 1 + \ell = 2$ , sección 4.2.2).

En estos casos los parámetros libres fueron la masa del campo escalar ( $m_a$ ) y un  $\epsilon$  por cada estado, es decir,  $\epsilon_0$  y  $\epsilon_1$  para el primer caso, y  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  para el segundo caso.

### 4.2.1. $\ell = 0 + \ell = 1$

En la Figura 4.3 se encuentran las curvas de rotación resultantes para este caso en particular, donde se está tomando una submuestra de la muestra del total de galaxias analizadas.

En ellas se puede notar la contribución de cada uno de los estados a la curva de rotación total (línea naranja), donde el estado base es el que mayormente contribuye a la curva de rotación de todas las galaxias (línea verde) y el primer estado excitado (línea roja) contribuye en su mayoría a la parte externa de la curva de rotación. Adicionalmente se puede notar que en la galaxia UGC11557, su curva de rotación únicamente tiene contribución del estado base. En la tabla se encuentra la inferencia de parámetros obtenida con la  $\chi^2$ .

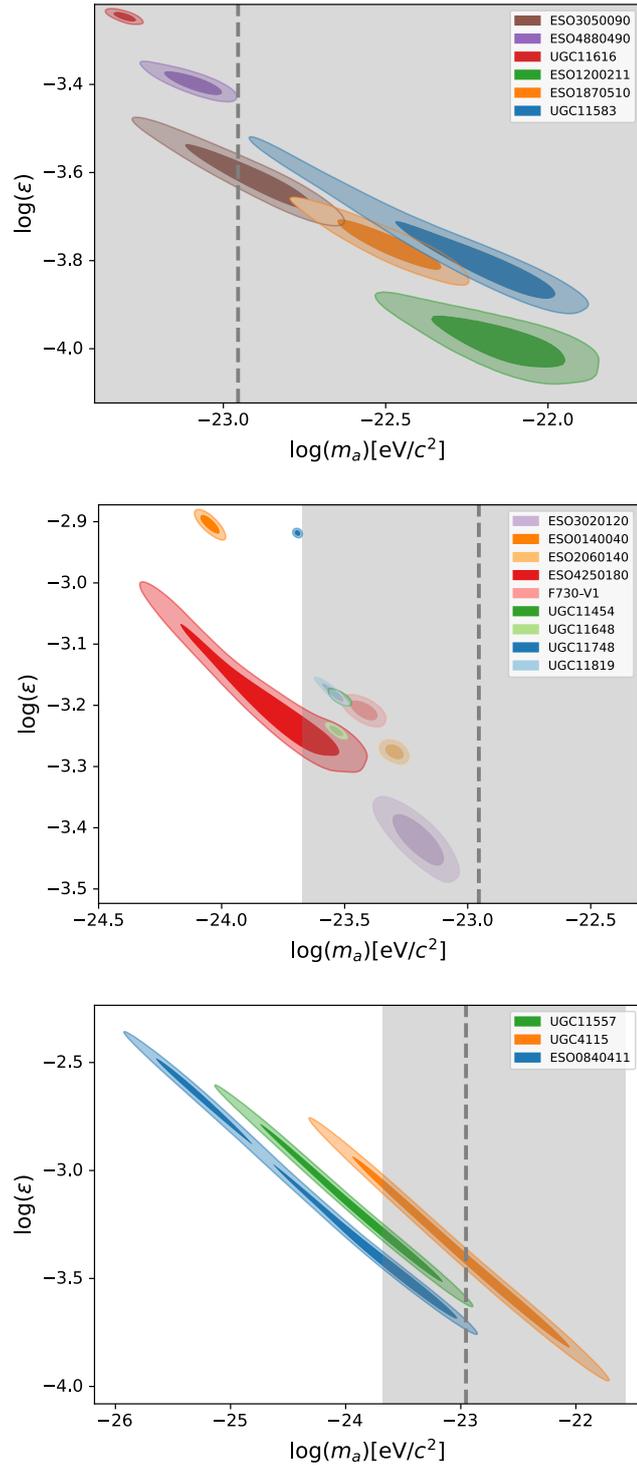


Figura 4.1: Distribuciones de *posteriors* en 2D, de los parámetros libres para el caso del estado base ( $\psi_{100}$ ). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar  $m_a = 1.11 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [32]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [46],  $0.212 \times 10^{-23} < m_a [\text{eV}/c^2] < 27.0 \times 10^{-23}$ . En la primera gráfica se encuentran las galaxias con  $r < 10 \text{ kpc}$ . En la gráfica de en medio aquellas galaxias con  $r > 10 \text{ kpc}$  y en la gráfica final se encuentran las galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen  $r < 10 \text{ kpc}$  y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

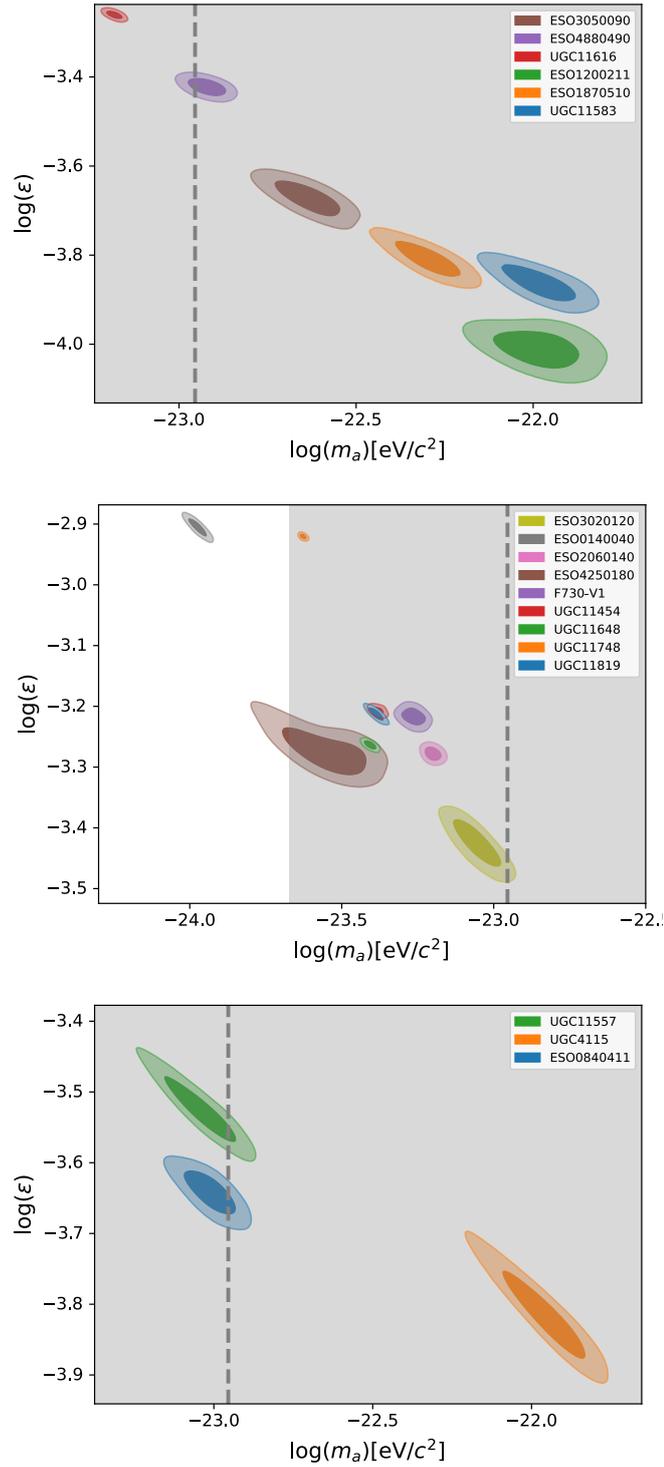


Figura 4.2: Distribuciones de *posteriors* en 2D, de los parámetros libres para el caso de un estado excitado ( $\psi_{210}$ ). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar  $m_a = 1.11 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [32]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [46],  $0.212 \times 10^{-23} < m_a [\text{eV}/c^2] < 27.0 \times 10^{-23}$ . En la primera gráfica se encuentran las galaxias con  $r < 10 \text{ kpc}$ . En la gráfica de en medio aquellas galaxias con  $r > 10 \text{ kpc}$  y en la última gráfica aquellas galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen  $r < 10 \text{ kpc}$  y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

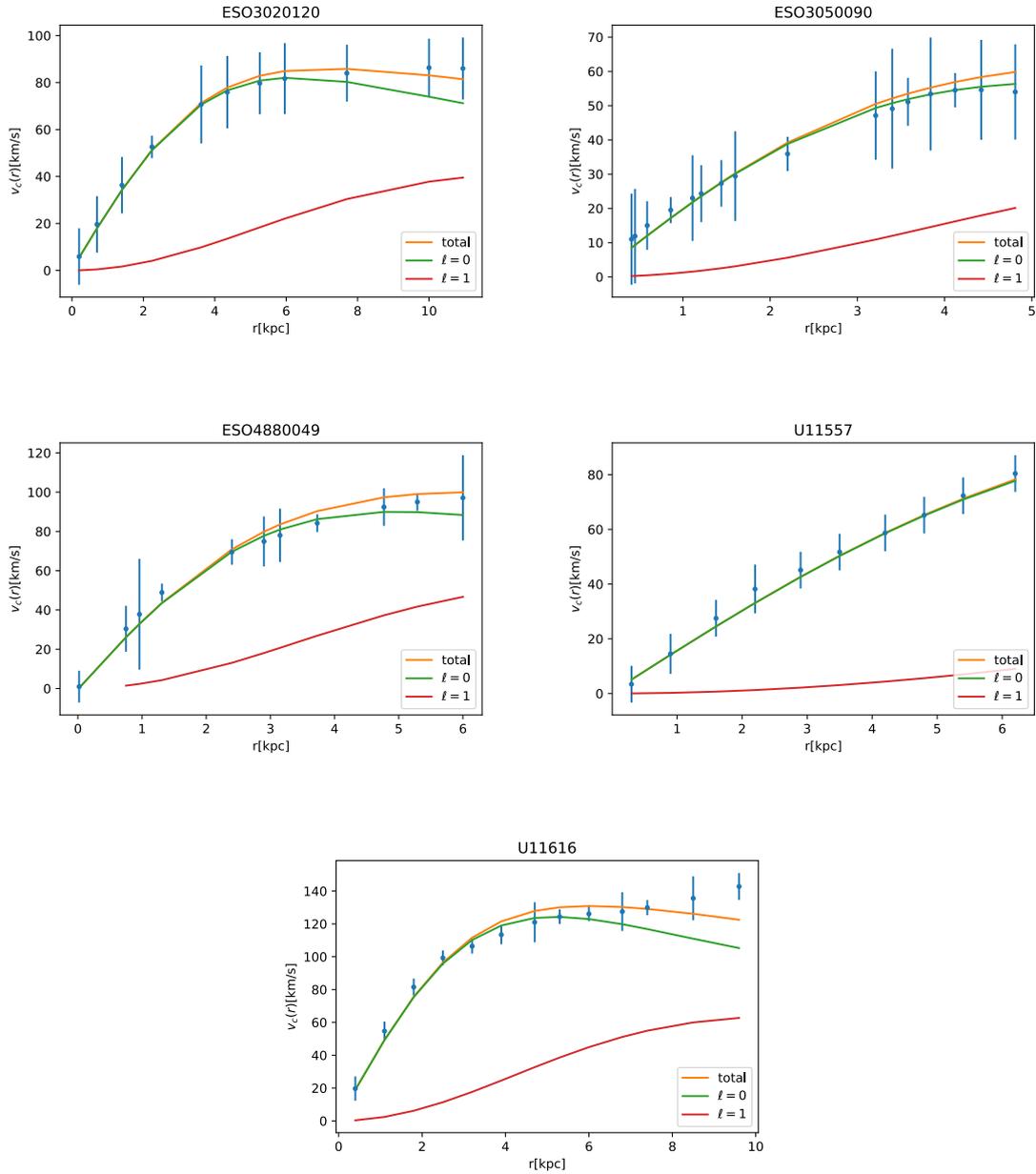


Figura 4.3: Curvas de rotación para la superposición de los estados  $\psi_{100}$  y  $\psi_{210}$ . La línea naranja representa la curva de rotación resultante, la línea verde corresponde al estado base ( $\psi_{100}$ ) y la línea roja al primer estado excitado ( $\psi_{210}$ ).

### 4.2.2. $\ell = 0 + \ell = 1 + \ell = 2$

La figura 4.4 muestra los resultados obtenidos con la mínima  $\chi^2$  para las 17 galaxias. Mientras que la Tabla 4.3 contiene la inferencia de los parámetros libres ( $m_a$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ ).

Algo importante que resaltar de este último caso de superposición de estados es que su masa es ligeramente más grande comparada con los casos anteriores, que la curva de rotación total resultante (línea naranja) tiene un mejor ajuste en comparación a los casos anteriores, lo cual también se puede observar en el valor de la  $\chi^2$ , a pesar del incremento en el número de parámetros libres. En cuanto a la contribución de cada estado, podemos notar que el estado base (línea verde) sigue contribuyendo en el centro de la galaxia, existiendo casos como las galaxias UGC11557, UGC4115 y ESO0840411 que presentan un comportamiento lineal, sugiriendo que únicamente necesitan la contribución de un estado base. Por otro lado, para el resto de las galaxias los demás estados excitados contribuyen mayormente a radios mayores, permitiendo un mejor ajuste a los datos.

Debido a que en la mayoría de las galaxias el ajuste parece ser suficientemente bueno con un estado base y dos estados excitados, estos resultados nos dieron un indicio de que la mayoría de las galaxias deberían tener como mínimo dos estados excitados.

## 4.3. Acoplados

La Tabla 4.4 contiene la restricción de parámetros,  $\log(E)$  y  $-2 \ln \mathcal{L}$  para el caso de multi-estados (2.1.2). Los valores medios están reportados con una confianza de  $1\sigma$ . Las gráficas de contornos de estos resultados se encuentran en la Figura 4.5, donde se ha seguido la clasificación mencionada anteriormente. Las galaxias siguen la misma tendencia que en los casos independientes, aquellas con  $r < 10$  kpc tienden a tener masas más grandes mientras que las galaxias con  $r > 10$  kpc tienden a preferir masas más ligeras. Para las galaxias con comportamiento lineal la correlación entre los parámetros  $m_a$  y  $\epsilon$  parece desaparecer. Sin embargo, para todas las galaxias la correlación persiste entre  $m_a$  y la amplitud central del primer estado ( $\psi_{100}(0)$ ), como se puede observar en la Figura 4.7. Para ver las 17 gráficas triangulares para este caso y los casos indepen-

<b>Galaxia</b>	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon_0)$	$\log(\epsilon_1)$	$\log(\epsilon_2)$	$\chi^2$
ESO3020120	-23.0522	-3.48	-3.83	-3.81	0.04
ESO3050090	-22.59	-3.75	-4.00	-3.94	0.61
ESO48800490	-22.88	-3.48	-3.78	-3.74	0.72
UGC11557	-23.14	-3.53	-3.81	-3.68	0.34
UGC11616	-23.16	-3.30	-3.65	-3.63	7.17
UGC4115	-22.05	-3.83	-4.00	-4.00	0.03
ESO0140040	-23.84	-2.98	-3.33	-3.29	6.83
ESO0840411	-23.08	-3.68	-3.97	-3.83	0.23
ESO1200211	-21.99	-4.03	-4.41	-4.39	0.68
ESO1870510	-22.47	-3.77	-4.99	-4.99	0.82
ESO2060140	-23.14	-3.33	-3.70	-3.69	8.33
ESO4250180	-23.51	-3.31	-3.61	-3.57	0.73
F730-V1	-23.26	-3.26	-3.63	-3.62	9.11
UGC11454	-23.32	-3.26	-3.59	-3.56	18.45
UGC11583	-22.16	-3.82	-4.95	-4.99	0.50
UGC11648	-23.31	-3.32	-3.65	-3.61	142.71
UGC11748	-23.57	-2.95	-3.44	-3.44	74.25

Tabla 4.3: Inferencia de parámetros con la mínima  $\chi^2$  para la superposición de los estados  $\psi_{100} + \psi_{210} + \psi_{320}$ . Los parámetros libres son  $\log(m_a)$  [eV/c<sup>2</sup>],  $\log(\epsilon_0)$ ,  $\log(\epsilon_1)$  y  $\log(\epsilon_2)$ .

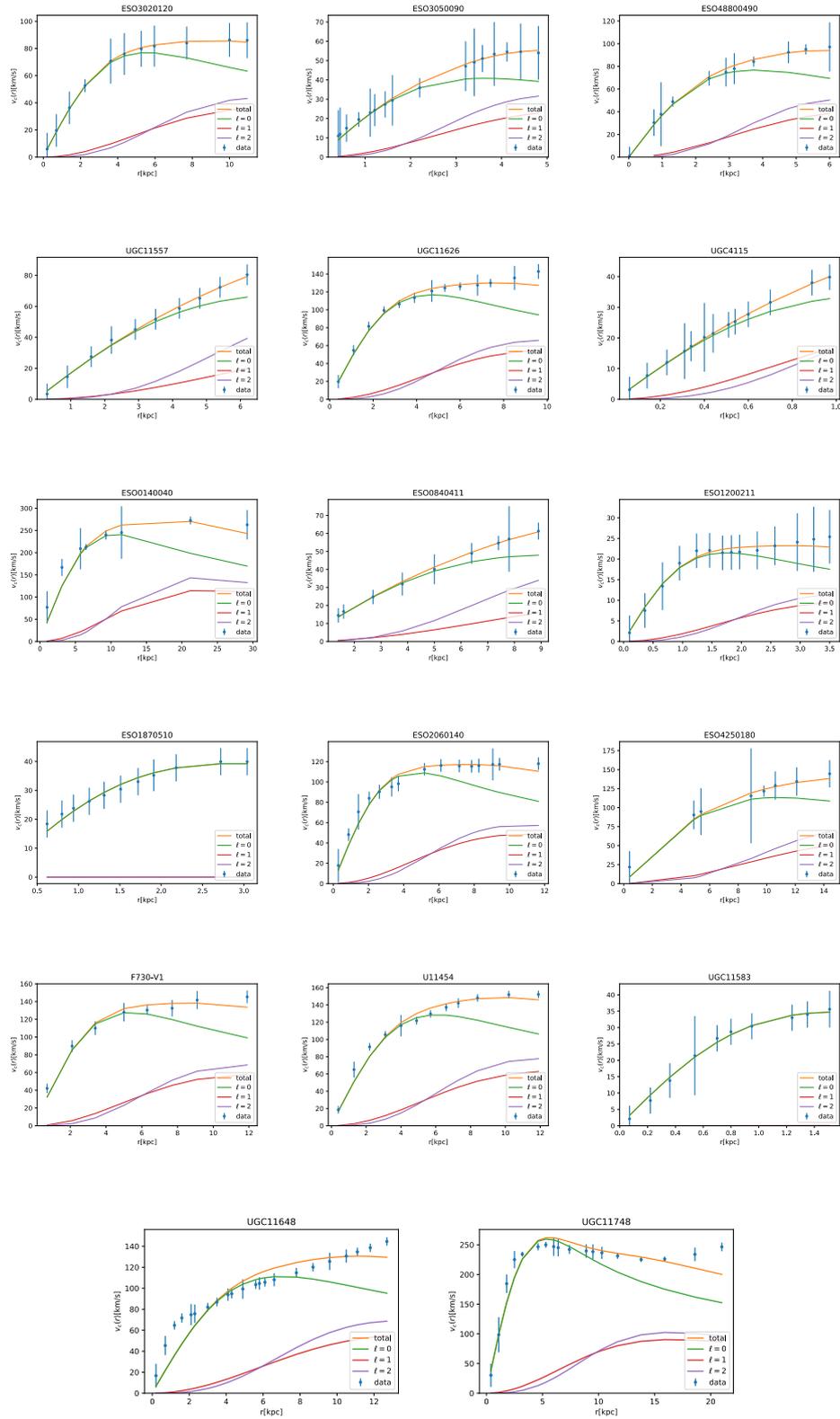


Figura 4.4: Curvas de Rotación para cada galaxia con la estimación de parámetros obtenida de la  $\chi^2$  para el caso de superposición de los estados  $\psi_{100}$ ,  $\psi_{210}$  y  $\psi_{320}$ . La línea azul representa los datos de cada galaxia, la línea naranja corresponde a la curva de rotación resultante, la línea verde indica la contribución del estado  $\psi_{100}$ , la línea roja la contribución del estado  $\psi_{210}$  y la línea morada la contribución del estado  $\psi_{320}$ .

dientes, vea el [repositorio](#)<sup>1</sup>. Las gráficas en la Figura 4.6 muestran los resultados de la estimación de parámetros reportados en la tabla 4.4 a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  como muestra la barra gris. Podemos observar que la mayoría de las galaxias tienen un comportamiento interesante, referente a la contribución de cada estado a la curva de rotación resultante (línea azul oscuro), donde la línea azul que corresponde al estado base ( $\psi_{100}$ ) muestra una contribución predominante, el estado excitado  $\psi_{210}$  representado por la línea verde contribuye menos que el segundo estado excitado  $\psi_{320}$  (línea naranja). Ambos estados contribuyen a radios mayores mientras que el estado base ( $\psi_{100}$ ) permanece en el centro, sugiriendo que la contribución del estado  $\psi_{210}$  es cercana a cero. Se puede notar que la galaxia UGC11583, la cual tiene una extensión radial de  $r = 1.5$  kpc siendo una de las más pequeñas, tiene una contribución distinta de cada estado, donde el estado  $\psi_{210}$  es el predominante y  $\psi_{320}$  tiene una amplitud más pequeña. A pesar de obtener una inferencia de parámetros aceptable para todas las galaxias en el conjunto de datos, de acuerdo a los contornos grises, se puede observar que las curvas de rotación para las galaxias UGC11648 y UGC11748, el caso de multi-estados no se ajusta muy bien a los datos. Es importante mencionar que a diferencia de los resultados del muestreo anidado para los casos independientes donde la convergencia es clara, en el caso de multi-estados, específicamente para las amplitudes centrales de cada estado la convergencia no es tan clara, particularmente en la amplitud central del estado base ( $\psi_{100}(0)$ ) parece haber una frontera que corresponde al límite superior del *prior*,  $\log \psi_{100}(0) = 0$ . Los resultados del muestreo anidado usados para obtener las gráficas y las gráficas mismas pueden ser consultadas en el [repositorio](#)<sup>2</sup>.

En la Tabla 4.5, los valores para el AIC, BIC,  $\log(B_{12})$  y  $-2 \ln \mathcal{L}$  están reportados para cada caso. Los valores del AIC y BIC para los tres casos son similares con un decremento notable en el estado base. En cuanto al valor de  $-2 \ln \mathcal{L}$ , se puede notar que para todas las galaxias el valor es mayor en el caso del estado excitado ( $\psi_{210}$ ) y en el caso de multi-estados es menor que en el estado base, excepto para la galaxia UGC11648, donde hay un pequeño incremento. Particularmente, el factor de Bayes de cada galaxia es representado en la Figura 4.8, donde las regiones sombreadas corresponden al valor de la escala de Jeffrey mencionada en la Tabla 3.2.

Las galaxias con asterisco (\*) tienen un  $\log(B_{12})$  menor para el caso de un solo estado excitado ( $\psi_{210}$ ) y aquellas (UGC11748) con un mas (+) tienen un valor mayor

<sup>1</sup>[https://github.com/atalianb/Triangle\\_plots\\_ell\\_boson\\_stars](https://github.com/atalianb/Triangle_plots_ell_boson_stars)

<sup>2</sup>[https://github.com/atalianb/fgivenx\\_plots](https://github.com/atalianb/fgivenx_plots)

de  $\log(B_{12})$  para el caso de multi-estados, estas galaxias no aparecen en la figura pero pueden ser consultadas en la Tabla 4.5. La posición de los puntos azules indica que la mayoría de las galaxias prefieren el estado base en vez que el estado excitado  $\psi_{210}$ , excepto por las galaxias UGC11583 y ESO1200211 que parecen preferir ligeramente el estado excitado. Por otro lado, la posición de las estrellas verdes sugiere que los datos favorecen moderadamente el caso de multi-estados, a pesar de que el número de parámetros libres es mayor comparado con el estado base. Algunas galaxias son más notorias, UGC11616 con un  $\log(B_{12}) = -12.40$  que apoya al caso del estado base, y las galaxias UGC11648 y UGC11454 y apoyan fuertemente al caso de multi-estados.

Galaxia	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(\psi_{100}(0))$	$\log(\psi_{210}(0))$	$\log(\psi_{320}(0))$	$\log(z)$	$-2 \ln \mathcal{L}$
ESO3020120	$-23.16^{+0.14}_{-0.15}$	$-3.53^{+0.04}_{-0.05}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.78}$	$-3.41^{+3.37}_{-1.58}$	$-0.94^{+0.46}_{-1.06}$	$-7.28 \pm 0.22$	0.41
ESO3050090	$-22.74^{+0.17}_{-0.56}$	$-3.64^{+0.51}_{-0.11}$	$-0.09^{+0.09}_{-0.79}$	$-1.59^{+1.57}_{-0.41}$	$-0.54^{+0.48}_{-1.46}$	$-6.74 \pm 0.20$	0.55
ESO4880490	$-23.01^{+0.07}_{-0.53}$	$-3.46^{+1.02}_{-0.08}$	$0.07^{+0.10}_{-1.54}$	$-3.38^{+3.20}_{-1.61}$	$-0.53^{+0.49}_{-4.46}$	$-9.82 \pm 0.24$	1.58
UGC11557	$-23.29^{+0.25}_{-2.35}$	$-3.34^{+1.34}_{-0.32}$	$-0.23^{+0.53}_{-1.78}$	$-1.65^{+1.95}_{-2.35}$	$0.78^{+1.05}_{-3.22}$	$-7.69 \pm 0.11$	0.35
UGC11616	$-23.27^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.25^{+0.25}_{-0.02}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.51}$	$-1.73^{+1.19}_{-0.27}$	$-0.95^{+0.21}_{-1.05}$	$-18.80 \pm 0.27$	15.47
UGC4115	$-22.15^{+0.28}_{-1.75}$	$-3.39^{+0.39}_{-0.52}$	$-0.78^{+0.95}_{-0.60}$	$-3.95^{+2.05}_{-4.10}$	$-1.82^{+4.18}_{-1.98}$	$-7.13 \pm 0.11$	0.01
ESO0140040	$-23.98^{+0.04}_{-0.09}$	$-2.91^{+0.44}_{-0.02}$	$-0.03^{+0.03}_{-0.83}$	$-2.85^{+2.26}_{-0.15}$	$-0.83^{+0.23}_{-2.17}$	$-16.73 \pm 0.02$	10.47
ESO0840411	$-23.20^{+0.19}_{-2.80}$	$-3.64^{+2.64}_{-0.13}$	$0.03^{+0.14}_{-3.21}$	$-3.65^{+3.81}_{-2.35}$	$-0.26^{+0.43}_{-5.74}$	$-7.52 \pm 0.11$	0.21
ESO1200211	$-22.09^{+0.24}_{-1.42}$	$-3.92^{+1.84}_{-0.27}$	$-0.15^{+0.45}_{-3.78}$	$-2.96^{+3.25}_{-2.04}$	$-1.28^{+1.54}_{-3.72}$	$-8.51 \pm 0.16$	1.21
ESO1870510	$-22.38^{+0.13}_{-0.44}$	$-3.86^{+0.83}_{-0.09}$	$0.12^{+0.18}_{-1.40}$	$-2.98^{+3.27}_{-1.02}$	$-0.34^{+0.53}_{-3.66}$	$-8.75 \pm 0.17$	0.48
ESO2060140	$-23.26^{+0.07}_{-0.08}$	$-3.29^{+0.36}_{-0.02}$	$-0.001^{+0.001}_{-0.72}$	$-3.66^{+3.19}_{-2.34}$	$-1.02^{+0.38}_{-4.98}$	$-22.04 \pm 0.15$	17.53
ESO4250180	$-23.69^{+0.28}_{-1.01}$	$-3.18^{+1.18}_{-0.13}$	$-0.12^{+0.12}_{-4.59}$	$-4.91^{+4.89}_{-1.09}$	$-0.90^{+0.69}_{-5.09}$	$-8.90 \pm 0.02$	0.95
F730-V1	$-23.38^{+0.10}_{-0.09}$	$-3.22^{+0.37}_{-0.02}$	$-0.006^{+0.01}_{-0.70}$	$1.88^{+1.34}_{-3.12}$	$-0.96^{+0.27}_{-3.98}$	$-22.56 \pm 0.21$	18.82
UGC11454	$-23.46^{+0.04}_{-0.04}$	$-3.20^{+0.32}_{-0.02}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.63}$	$-1.69^{+1.00}_{-3.31}$	$-0.83^{+0.18}_{-1.24}$	$-32.10 \pm 0.23$	35.19
UGC11583	$-22.02^{+0.18}_{-1.48}$	$-3.66^{+1.65}_{-0.26}$	$-0.55^{+0.55}_{-4.39}$	$-0.74^{+0.73}_{-4.26}$	$-2.26^{+2.21}_{-2.74}$	$-7.93 \pm 0.16$	0.34
UGC11648	$-23.46^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.26^{+0.27}_{-0.02}$	$-2.02^{+0.02}_{-0.54}$	$-1.07^{+0.14}_{-3.93}$	$-0.77^{+0.09}_{-1.06}$	$-103.50 \pm 0.23$	176.88
UGC11748	$-23.71^{+0.19}_{-0.01}$	$-3.00^{+0.42}_{-0.07}$	$0.19^{+0.11}_{-3.96}$	$-5.48^{+5.39}_{-0.48}$	$-1.33^{+0.91}_{-4.66}$	$-124.61 \pm 74.57$	224.84

Tabla 4.4: Constricción de parámetros,  $\log(z)$  y  $-2 \ln \mathcal{L}$  para el caso de multi-estados para cada galaxia. Los parámetros libres son  $\log m_a$  [eV/c<sup>2</sup>],  $\log \epsilon$ ,  $\log \psi_{100}(0)$ ,  $\log \psi_{210}(0)$  y  $\log \psi_{320}(0)$ . Los errores están reportados con  $1\sigma$ .



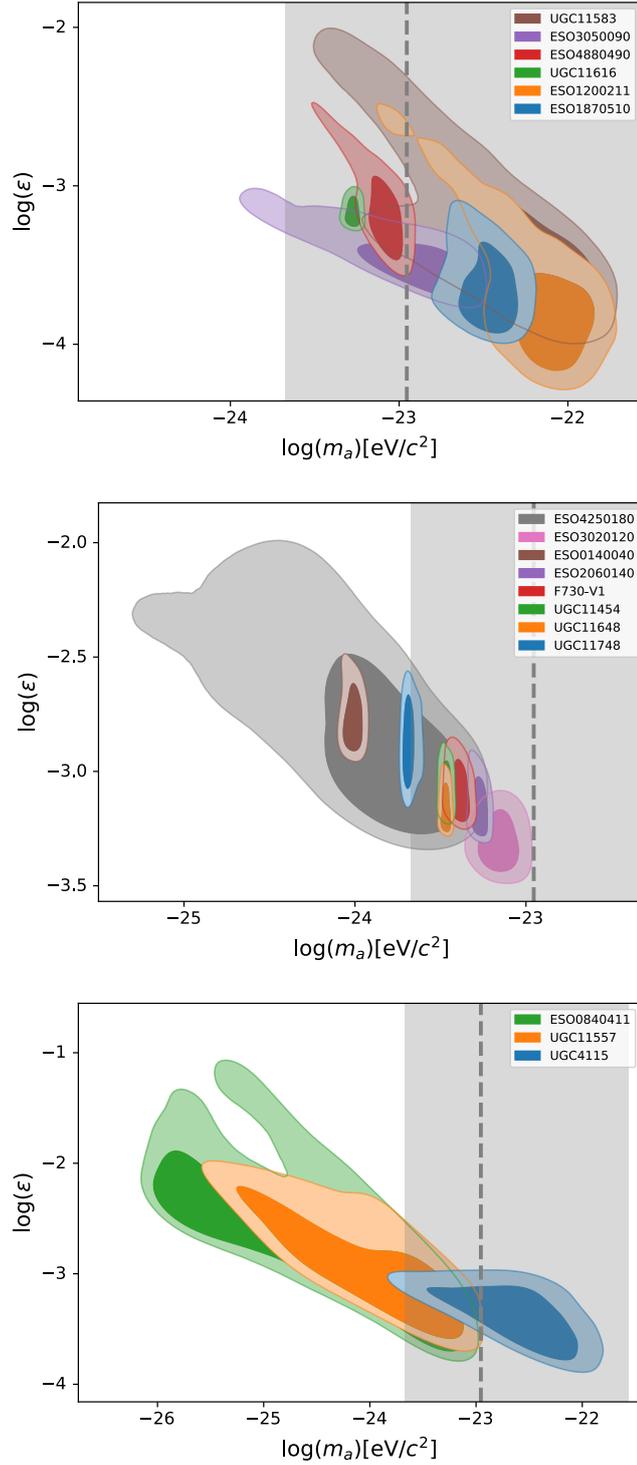


Figura 4.5: Distribuciones de *posteriors* en 2D, de los parámetros libres para el caso de multi-estados ( $\psi_{100}$ ,  $\psi_{210}$  y  $\psi_{320}$ ). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar  $m_a = 1.11 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$  necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [32]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [46],  $0.212 \times 10^{-23} < m_a [\text{eV}/c^2] < 27.0 \times 10^{-23}$ . En la primera gráfica se encuentran las galaxias con  $r < 10 \text{ kpc}$ . En la gráfica de en medio aquellas galaxias con  $r > 10 \text{ kpc}$  y en la última gráfica aquellas galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen  $r < 10 \text{ kpc}$  y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

Galaxia	$\psi_{100}$			$\psi_{210}$				Multi-estados			
	AIC	BIC	$-2 \ln \mathcal{L}$	AIC	BIC	$\log(B_{12})$	$-2 \ln \mathcal{L}$	AIC	BIC	$\log(B_{12})$	$-2 \ln \mathcal{L}$
ESO3020120	6.46	5.76	0.96	14.11	13.40	-3.94	8.61	22.41	12.40	0.65	0.41
ESO3050090	5.91	6.53	0.98	16.04	16.66	-6.39	11.11	16.64	14.50	0.31	0.55
ESO4880490	8.30	7.59	2.80	30.20	29.50	-11.98	24.70	23.75	13.74	-0.93	1.58
UGC11557	6.23	5.12	0.52	13.33	12.22	-4.95	7.61	25.33	11.84	-1.29	0.35
UGC11616	28.64	28.57	23.44	111.17	111.1	-56.26	105.97	35.21	29.46	-12.40	15.47
UGC4115	5.24	5.17	0.04	9.97	9.90	-4.22	4.77	18.58	12.84	-1.38	0.01
ESO0140040	19.76	17.52	13.36	63.67	61.43	-22.45	57.27	50.57	20.97	-1.11	10.47
ESO0840411	6.45	4.84	0.45	18.21	16.6	-6.99	12.21	30.21	11.19	-1.04	0.21
ESO1200211	6.65	6.84	1.56	9.6	9.78	-1.01	4.51	18.71	14.41	-0.94	1.21
ESO1870510	6.32	5.61	0.82	13.66	12.95	-3.90	8.16	22.48	12.47	-0.99	0.48
ESO2060140	28.36	28.77	23.36	94.96	95.37	-33.18	89.96	34.20	31.07	-0.73	17.53
ESO4250180	7.65	5.41	1.25	36.66	34.42	-2.70	30.26	40.95	11.35	-2.02	0.95
F730-V1	31.76	29.52	25.36	98.14	95.90	-33.18	91.74	59.14	29.53	-0.77	18.82
UGC11454	55.31	54.94	49.97	241.90	241.54	-92.83	236.57	55.19	47.61	3.35	35.19
UGC11583	6.21	5.10	0.50	7.91	6.79	-1.66	2.19	25.34	11.85	-1.36	0.34
UGC11648	211.1	212.65	206.47	614.55	616.2	-202.21	609.92	241.01	242.71	9.85	176.88
UGC11748	226.86	227.84	222.06	470.06	471.04	-121.79	465.26	199.08	198.53	18.92	224.84

Tabla 4.5: Resultados para la comparación entre los modelos  $\psi_{100}$ ,  $\psi_{210}$  y multi-estados para cada galaxia.

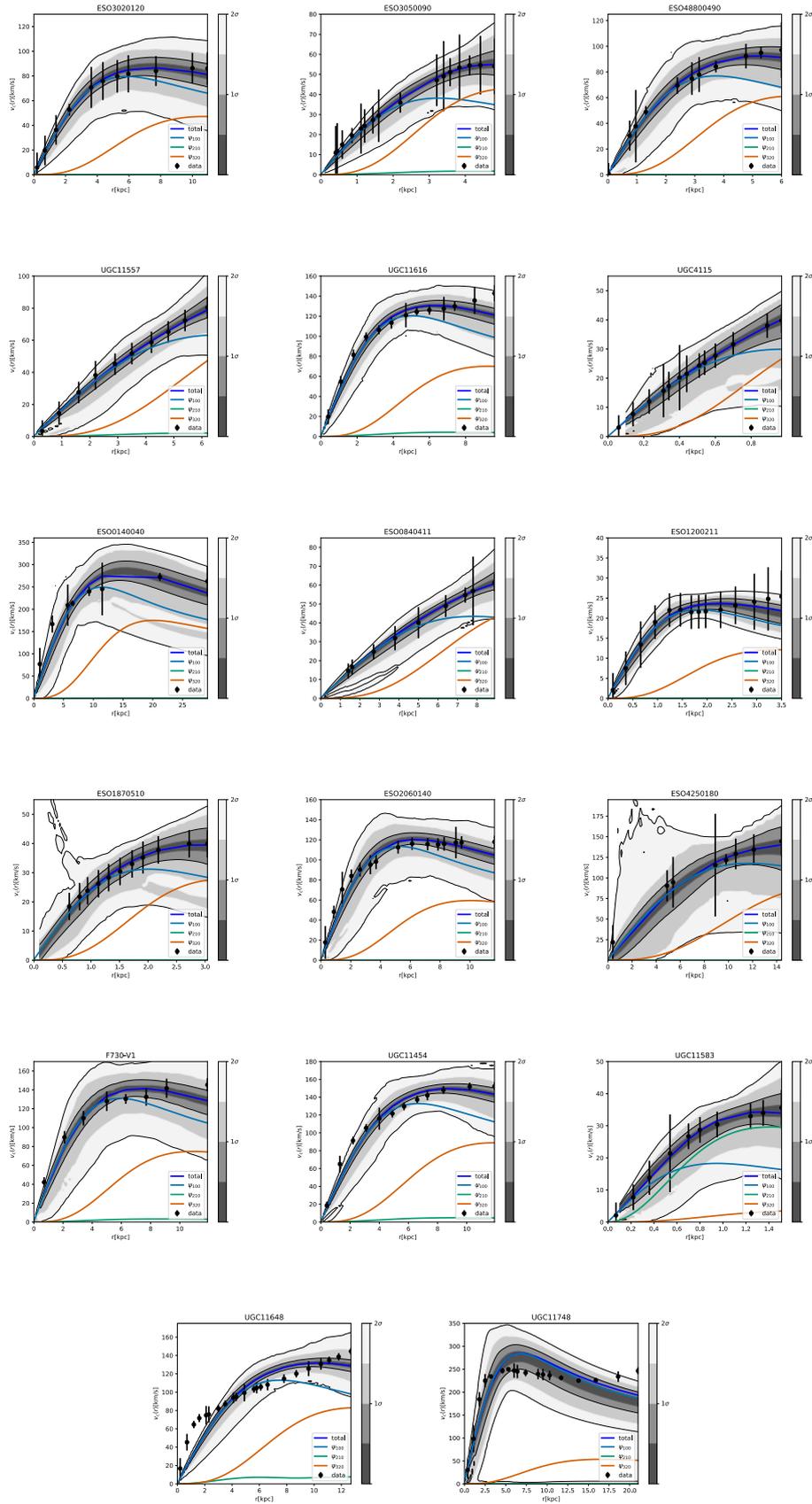


Figura 4.6: Curvas de rotación para cada galaxia con la estimación de parámetros obtenida del muestreo anidado. Los contornos indican la exactitud de la estimación a  $1\sigma$  y  $2\sigma$ , como lo indica la barra gris.

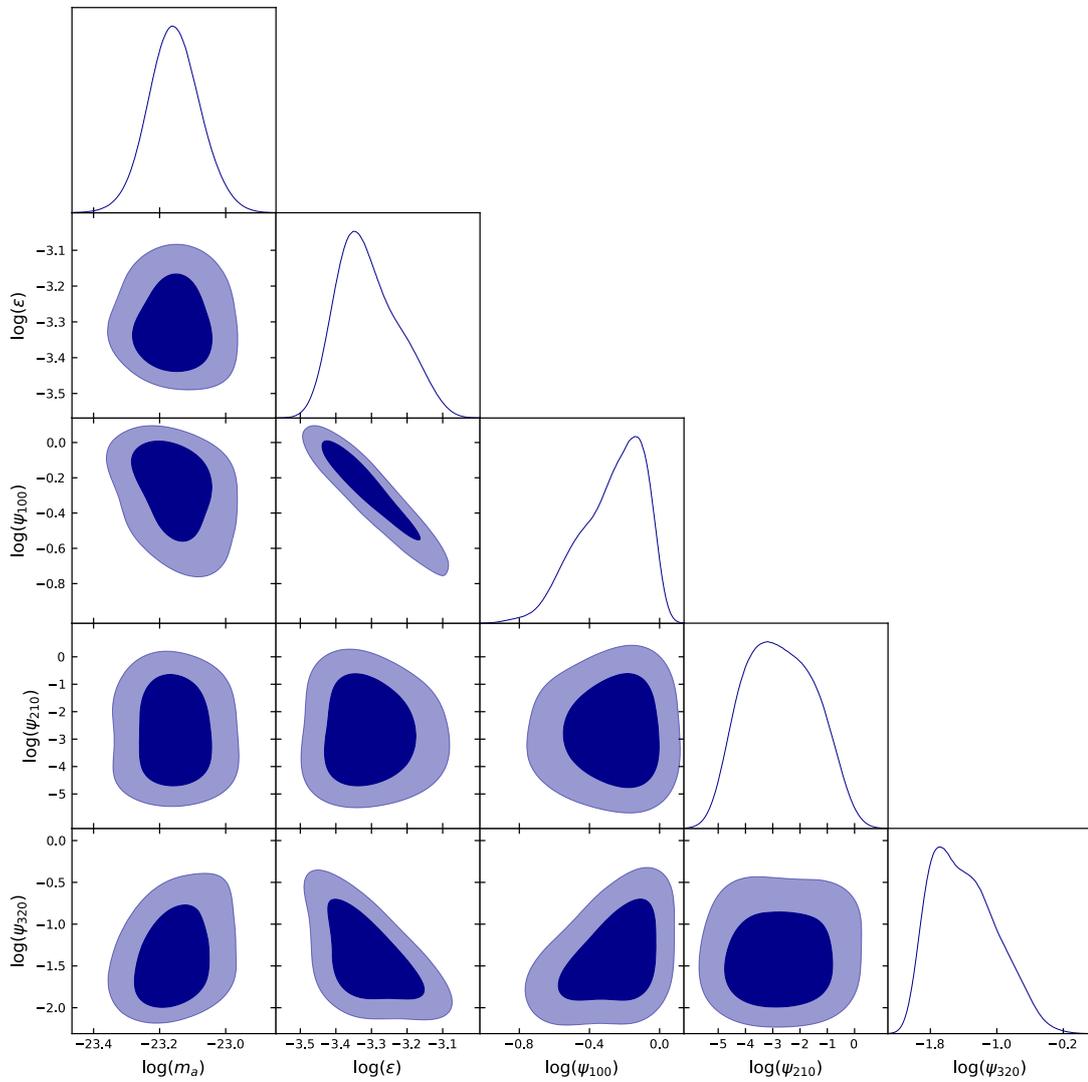


Figura 4.7: Gráfica triangular para la galaxia ESO3020120. En ella se muestran las distribuciones de probabilidad de cada uno de los parámetros libres en el caso de multi-estados. Los posteriors nos indican una correlación entre los parámetros  $\log \psi_{100}(0)$  y  $\log \epsilon$ .

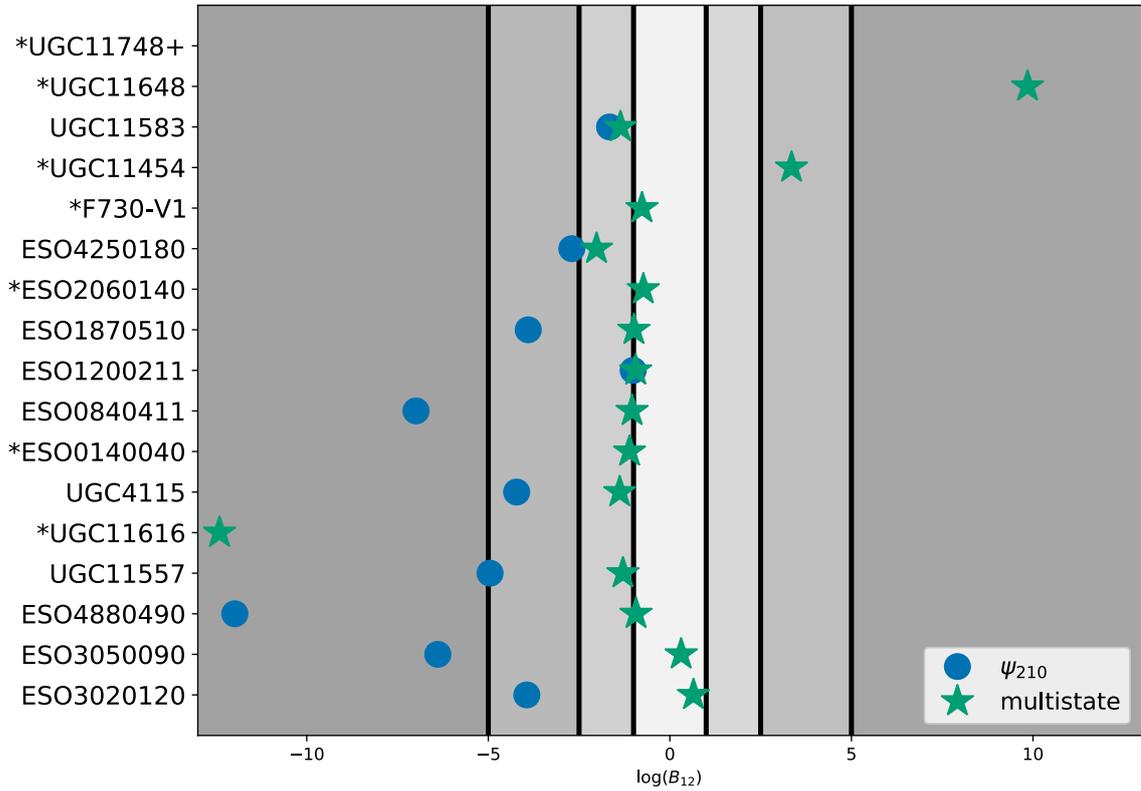


Figura 4.8: Factor de Bayes ( $\log(B_{12})$ ) para la comparación entre el estado base ( $\psi_{100}$ ) como el modelo base y los otros dos casos. Los círculos azules corresponden al caso del estado excitado ( $\psi_{320}$ ) y las estrellas verdes al caso de multi-estados. Las regiones sombreadas indican la información de la escala de Jeffrey y las líneas sólidas representan los valores mencionados en la tabla 3.2. Las galaxias marcadas con un \* tienen un valor menor a  $-15$  del factor de Bayes y las galaxias con un + tienen un mayor valor a  $+15$  de éste, los cuales pueden ser consultados en la Tabla 4.5.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Discusión

Este trabajo analiza la viabilidad de las  $\ell$ -estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación, utilizando herramientas de estadística bayesiana tales como el muestreo anidado (NS), el factor de Bayes, al igual que criterios de información para conocer el caso que es favorecido por los datos, siendo el caso de multi-estados. Se analizaron diecisiete galaxias de bajo brillo, tomando en cuenta tres casos principales, el estado base, el cual se toma como modelo base en el factor de Bayes; un solo estado excitado y los multi-estados. Donde todas las galaxias indican que su componente de materia oscura es preferible que esté hecha de multi-estados como la Figura 4.8 muestra.

Los contornos de las Figuras 4.6 nos confirman la información obtenida del factor de Bayes sobre los datos, obteniendo una inferencia de parámetros bastante buena para el caso de multi-estados. Hay algunas galaxias en la muestra como UGC11648 y UGC11748, que tienen un ajuste pobre y que claramente no siguen el comportamiento del modelo. Además, es importante notar que para la mayoría de las galaxias la mayor contribución para la curva de rotación total (línea azul oscura) es por parte del estado base ( $\psi_{100}$ , línea azul) y el segundo estado excitado ( $\psi_{210}$ , línea naranja), esto se puede deber a que estamos asumiendo simetría esférica, lo que implica que es importante realizar un análisis más exhaustivo en esta dirección, para ello se tendría que resolver el sistema de ecuaciones axial para multi-estados mencionado en [58]. Además, es importante mencionar que al añadir más estados y por lo tanto, incrementar el número de parámetros libres, la masa del campo a escalar tiende a volverse un poco más grande comparada con solamente el estado base, esto se puede observar en las primeras co-

lumnas de las tablas 4.1 y 4.4. Desafortunadamente, esto no satisface las constricciones de Lyman- $\alpha$  [38, 39].

A pesar de que el muestreo anidado converge para el caso de multi-estados, la convergencia no es tan clara como en el caso de los estados independientes, especialmente para la amplitud central del estado base ( $\psi_{100}(0)$ ), la cual presenta un límite superior en  $\log(\psi_{100}(0)) = 0$ , esto puede ser interpretado como una necesidad para extender el valor del *prior* para este parámetro, sin embargo, en general es posible encontrar una forma de reparametrizarlo. Uno de los resultados más importantes de este trabajo se puede observar en las Figuras 4.1, 4.2 y 4.5, donde la correlación entre los parámetros  $m_a$  y  $\epsilon$  parece desaparecer para el caso de un estado excitado ( $\psi_{210}$ ) y también para los multi-estados. Sin embargo, al observar los *posteriors* de los demás parámetros libres (Figuras 4.7, las cuales también pueden ser encontradas en el [repositorio](#)<sup>1</sup>), se puede observar que la correlación entre parámetros sigue preservándose, en este caso con los parámetros  $m_a$  y la amplitud central del estado base,  $\psi_{100}(0)$ .

Estas correlaciones entre parámetros para los perfiles de densidad de materia oscura ha sido estudiada en [78], donde basándose en la relación de discrepancia de masa aceleración (MDAR por sus siglas en inglés) y en que cualquier halo de materia oscura tendrá una aceleración máxima, pudieron eliminar la correlación entre parámetros mediante una reparametrización, tendiendo un sólo parámetro libre. Otra forma en la que se podría eliminar la correlación entre parámetros para este caso, es una reparametrización con el número de partículas en cada estado, fijando el número de partículas total y añadiendo a las condiciones de frontera en el método de shooting las tasas del número de partículas en diferentes estados con respecto al estado base [43]. Sin embargo, al intentar lo anterior observamos que las funciones de distribución de los *posteriors* de las tasas del número de partículas, eran prácticamente planos. Por lo tanto, sería necesario realizar más análisis en esta dirección, tomando en cuenta el procedimiento seguido en [78].

Es importante mencionar que al observar los *posteriors* (Figuras 4.1, 4.2 y 4.5) de cada uno de los casos estudiados se puede observar una tendencia en cuanto a la dispersión de las masas del campo escalar, donde para el estado base existe una mayor dispersión en los valores de ésta y en el caso de multiestados la dispersión es menor para la masa del campo. Lo anterior podría indicar que al tener mayor cantidad de estados en algún

<sup>1</sup>[https://github.com/atalianb/Triangle\\_plots\\_ell\\_boson\\_stars](https://github.com/atalianb/Triangle_plots_ell_boson_stars)

momento se podría llegar a una convergencia en el valor de la masa del campo escalar.

Se ha mencionado en [79] y sus referencias, que al añadir más estados al modelo podría llevar a una mejor estimación de parámetros y también se convertiría más costo computacionalmente. Por lo que, tal vez al combinar las alternativas mencionadas anteriormente y añadiendo el término de auto-interacción en el potencial se obtendría un análisis más completo y a su vez, obtener una forma de restringir el número de estados.

# Appendices

## A. Resultados de la $\chi^2$ con los estados $\psi_{100}, \psi_{210}, \psi_{320}$ y $\psi_{430}$

En esta sección se muestran los resultados obtenidos con la mínima  $\chi^2$  con la expansión de los estados acoplados del sistema de ecuaciones SP (2.11b-2.11a) truncada en el cuarto término, es decir, estamos añadiendo el término y ecuaciones correspondientes al estado  $\psi_{430}$ , los parámetros libres son  $m_a, \epsilon, \psi_{100}(0), \psi_{210}(0), \psi_{320}(0)$  y  $\psi_{430}(0)$ .

Donde se han elegido las galaxias ESO3050090 y UGC11616 debido al valor obtenido del máximo *likelihood* en el caso de multi-estados, descrito anteriormente (i.e. un estado base y dos estados excitados) y su extensión radial de la galaxia.

La tabla 1 muestra la estimación de parámetros obtenida al minimizar la  $\chi^2$  para las galaxias ESO3050090 y UGC11616, la tabla 2 contiene los valores del AIC, BIC y  $\chi^2$ .

Galaxia	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(\psi_{100}(0))$	$\log(\psi_{210}(0))$	$\log(\psi_{320}(0))$	$\log(\psi_{430}(0))$
ESO3050090	-22.66	-3.71	$-6.30 \times 10^{-3}$	-1.46	-1.40	-0.60
UGC11616	-23.24	-3.40	0.27	-2.74	-1.30	-0.59

Tabla 1: Estimación de parámetros para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 con la  $\chi^2$  para el caso de multi-estados con tres estados excitados. Los parámetros libres son  $\log(m_a)$  [eV/c<sup>2</sup>],  $\log(\epsilon)$ ,  $\log(\psi_{100}(0))$ ,  $\log(\psi_{210}(0))$ ,  $\log(\psi_{320}(0))$  y  $\log(\psi_{430}(0))$ .

Galaxia	AIC	BIC	$\chi^2$
ESO3050090	21.64	16.95	0.31
UGC11616	36.79	26.18	10.79

Tabla 2: Resultados para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 para el caso de multi-estados con tres estados excitados. AIC, BIC y  $\chi^2$ .

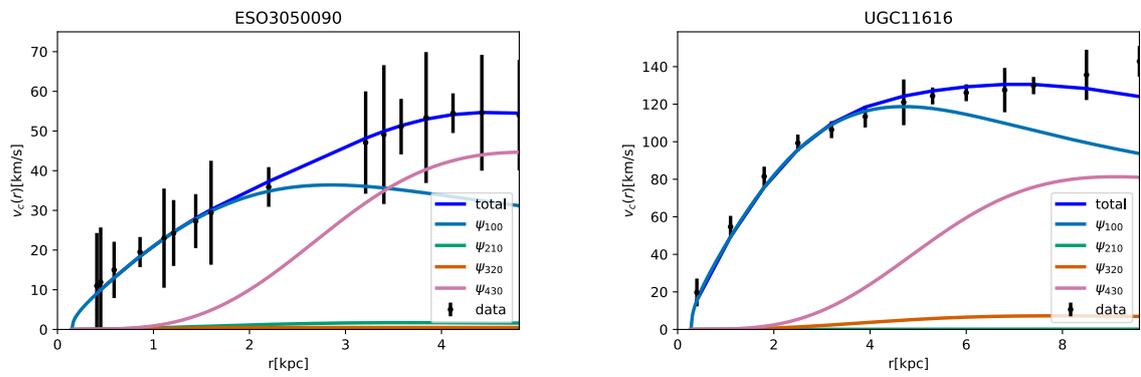


Figura 1: Curvas de rotación para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 con la estimación de parámetros obtenidos con la  $\chi^2$ . La línea azul oscura corresponde a la curva rotacional resultante, la línea azul indica la contribución del estado  $\psi_{100}$ , la línea verde a la contribución del estado  $\psi_{210}$ , la línea naranja a la contribución del estado  $\psi_{320}$  y la línea rosa a la contribución del estado  $\psi_{430}$ .

# Bibliografía

- [1] Atalia Navarro-Boullosa, Argelia Bernal, and J. Alberto Vazquez. Bayesian analysis for rotational curves with  $\ell$ -boson stars as a dark matter component. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2023(9):031, September 2023.
- [2] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Reviews of Modern Physics*, 90(4):045002, October 2018.
- [3] H. Poincare. The Milky Way and the Theory of Gases. *Popular Astronomy*, 14:475–488, October 1906.
- [4] J. Einasto. Ernst Öpik Centenary. *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft Hamburg*, 77:19–23, January 1994.
- [5] J. H. Oort. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Astronomical Journal*, 6:249, August 1932.
- [6] J. H. Jeans. The Motions of Stars in a Kapteyn-Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 82(3):122–132, 01 1922.
- [7] Per Olof Lindblad. Bertil Lindblad’s early work: the two-dimensional classification of stellar spectra at low dispersion. *Journal of Astronomical History and Heritage*, 4(2):163–170, December 2001.
- [8] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, January 1933.
- [9] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astronomical Journal*, 86:217, October 1937.
- [10] Vera C. Rubin and Jr. Ford, W. Kent. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astronomical Journal*, 159:379, February 1970.

- [11] K. C. Freeman. On the Disks of Spiral and S0 Galaxies. , 160:811, June 1970.
- [12] *Dynamics of stellar systems: proceedings from IAU Symposium no. 69 held in Besancon, France, September 9-13, 1974.*, volume 69, January 1975.
- [13] A. Bosma. *The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types*. PhD thesis, University of Groningen, Netherlands, March 1978.
- [14] V. C. Rubin, Jr. Ford, W. K., and N. Thonnard. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa -> Sc. , 225:L107–L111, November 1978.
- [15] Daniel J. Eisenstein, Idit Zehavi, David W. Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R. Blanton, Robert C. Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, Scott F. Anderson, Jim Annis, Neta Bahcall, Jon Brinkmann, Scott Burles, Francisco J. Castander, Andrew Connolly, Istvan Csabai, Mamoru Doi, Masataka Fukugita, Joshua A. Frieman, Karl Glazebrook, James E. Gunn, John S. Hendry, Gregory Hennessy, Zeljko Ivezić, Stephen Kent, Gillian R. Knapp, Huan Lin, Yeong-Shang Loh, Robert H. Lupton, Bruce Margon, Timothy A. McKay, Avery Meiksin, Jeffery A. Munn, Adrian Pope, Michael W. Richmond, David Schlegel, Donald P. Schneider, Kazuhiro Shimasaku, Christopher Stoughton, Michael A. Strauss, Mark SubbaRao, Alexander S. Szalay, István Szapudi, Douglas L. Tucker, Brian Yanny, and Donald G. York. Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies. , 633(2):560–574, November 2005.
- [16] Bruce A. Bassett and Renée Hlozek. Baryon acoustic oscillations, 2009.
- [17] Daniel J. Eisenstein, Hee-Jong Seo, and Martin White. On the robustness of the acoustic scale in the low-redshift clustering of matter. *The Astrophysical Journal*, 664(2):660–674, aug 2007. [arXiv:astro-ph/0604361](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0604361).
- [18] Nikhil Padmanabhan, David J. Schlegel, Uroš Seljak, Alexey Makarov, Neta A. Bahcall, Michael R. Blanton, Jonathan Brinkmann, Daniel J. Eisenstein, Douglas P. Finkbeiner, James E. Gunn, David W. Hogg, Željko Ivezić, Gillian R. Knapp, Jon Loveday, Robert H. Lupton, Robert C. Nichol, Donald P. Schneider, Michael A.

Strauss, Max Tegmark, and Donald G. York. The clustering of luminous red galaxies in the sloan digital sky survey imaging data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 378(3):852–872, jun 2007.

- [19] and N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, J. Carron, A. Challinor, H. C. Chiang, J. Chluba, L. P. L. Colombo, C. Combet, D. Contreras, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, E. Di Valentino, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, S. Dusini, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, Y. Fantaye, M. Farhang, J. Fergusson, R. Fernandez-Cobos, F. Finelli, F. Forastieri, M. Frai-lis, A. A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T. Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, J. Hamann, W. Handley, F. K. Hansen, D. Herranz, S. R. Hildebrandt, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. Karakci, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, T. S. Kisner, L. Knox, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. Le Jeune, P. Lemos, J. Lesgourgues, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Lilley, V. Lindholm, M. López-Caniego, P. M. Lubin, Y.-Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martin, M. Martinelli, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, D. Molinari, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Paganò, D. Paoletti, B. Partridge, G. Patanchon, H. V. Peiris, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J.-L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, E. P. S. Shellard, C. Sirignano, G. Sirri, L. D. Spencer, R. Sunyaev, A.-S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, L. Valenziano, J. Valiviita, B. Van Tent, L. Vibert, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M. White, A. Zacchei, and A. Zonca. iplanck/i2018 results. *Astro-*

*onomy & Astrophysics*, 641:A6, sep 2020.

- [20] NASA/JPL-Caltech/ESA. Cosmic microwave background (cmb).
- [21] A. Einstein. On the general theory of relativity. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin (Math. Phys.)*, pages 778–786, 1915.
- [22] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 220:291–333, January 1920.
- [23] ESA/Hubble NASA. Hubble captures a “lucky” galaxy alignment.
- [24] ESA/Hubble. MS Windows NT gravitational lensing in action. <https://esahubble.org/images/heic1106c/>. Aceso: 2024-05-05.
- [25] K. Chang and S. Refsdal. Flux variations of QSO 0957 + 561 A, B and image splitting by stars near the light path. , 282(5739):561–564, December 1979.
- [26] B. Paczynski. Gravitational Microlensing by the Galactic Halo. , 304:1, May 1986.
- [27] Stacy Y. Kim, Annika H. G. Peter, and Jonathan R. Hargis. Missing Satellites Problem: Completeness Corrections to the Number of Satellite Galaxies in the Milky Way are Consistent with Cold Dark Matter Predictions. , 121(21):211302, November 2018.
- [28] James S. Bullock and Michael Boylan-Kolchin. Small-Scale Challenges to the  $\Lambda$ CDM Paradigm. , 55(1):343–387, August 2017.
- [29] W. J. G. de Blok. The Core-Cusp Problem. *Advances in Astronomy*, 2010:789293, January 2010.
- [30] Frank C. van den Bosch and Rob A. Swaters. Dwarf galaxy rotation curves and the core problem of dark matter haloes. , 325(3):1017–1038, August 2001.
- [31] T. Lin. Dark matter models and direct detection. In *TASI 2018 - Theory in an Era of Data*, page 9, June 2018.
- [32] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña-López. Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter. *Physical Review D*, 63(6), feb 2001.

- [33] L. Arturo Ureña-López and Alma X. Gonzalez-Morales. Towards accurate cosmological predictions for rapidly oscillating scalar fields as dark matter. , 2016(7):048, July 2016. [arXiv:1511.08195](https://arxiv.org/abs/1511.08195).
- [34] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave. *Nature Physics*, 10(7):496–499, July 2014.
- [35] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Structure of Cold Dark Matter Halos. , 462:563, May 1996.
- [36] Alma X. González-Morales, David J. E. Marsh, Jorge Peñarrubia, and Luis A. Ureña-López. Unbiased constraints on ultralight axion mass from dwarf spheroidal galaxies. , 472(2):1346–1360, December 2017.
- [37] Alvaro Pozo, Tom Broadhurst, Ivan de Martino, Tzihong Chiueh, George F. Smoot, Silvia Bonoli, and Raul Angulo. Detection of a universal core-halo transition in dwarf galaxies as predicted by bose-einstein dark matter, 2021.
- [38] Vid Iršič, Matteo Viel, Martin G. Haehnelt, James S. Bolton, and George D. Becker. First constraints on fuzzy dark matter from lyman- $\alpha$  forest data and hydrodynamical simulations. *Phys. Rev. Lett.*, 119:031302, Jul 2017.
- [39] Matteo Nori, Riccardo Murgia, Vid Iršič, Marco Baldi, and Matteo Viel. Lyman  $\alpha$  forest and non-linear structure characterization in Fuzzy Dark Matter cosmologies. , 482(3):3227–3243, January 2019.
- [40] Lizbeth M. Fernández-Hernández, Mario A. Rodríguez-Meza, and Tonatiuh Matos. Comparison between two scalar field models using rotation curves of spiral galaxies. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 1010 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012005, April 2018.
- [41] Jayashree Balakrishna, Edward Seidel, and Wai-Mo Suen. Dynamical evolution of boson stars. II. Excited states and self-interacting fields. , 58(10):104004, November 1998.
- [42] F. Siddhartha Guzmán and L. Arturo Ureña-López. Gravitational Cooling of Self-gravitating Bose Condensates. , 645(2):814–819, July 2006.

- [43] L. Arturo Ureña-López and Argelia Bernal. Bosonic gas as a galactic dark matter halo. , 82(12):123535, December 2010.
- [44] Victor H. Robles and T. Matos. Exact Solution to Finite Temperature SFDM: Natural Cores without Feedback. , 763(1):19, January 2013.
- [45] L. A. Martínez-Medina, V. H. Robles, and T. Matos. Dwarf galaxies in multistate scalar field dark matter halos. , 91(2):023519, January 2015.
- [46] T. Bernal, L. M. Fernández-Hernández, T. Matos, and M. A. Rodríguez-Meza. Rotation curves of high-resolution LSB and SPARC galaxies with fuzzy and multistate (ultralight boson) scalar field dark matter. , 475(2):1447–1468, April 2018.
- [47] L. O. Téllez-Tovar, Tonatiuh Matos, and J. Alberto Vázquez. Cosmological constraints on the multiscalar field dark matter model. , 106(12):123501, December 2022.
- [48] David J. Kaup. Klein-gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, Aug 1968. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.172.1331>.
- [49] Remo Ruffini and Silvano Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, Nov 1969. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.187.1767>.
- [50] Argelia Bernal and C. Soto-Campos. Modeling Galactic Rotation Curves with ultra-light scalar field dark matter. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 640 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012056, September 2015. DOI: [10.1088/1742-6596/640/1/012056](https://doi.org/10.1088/1742-6596/640/1/012056).
- [51] V. Lora, Juan Magaña, Argelia Bernal, F. J. Sánchez-Salcedo, and E. K. Grebel. On the mass of ultra-light bosonic dark matter from galactic dynamics. , 2012(2):011, February 2012. [arXiv:1110.2684](https://arxiv.org/abs/1110.2684).
- [52] F. Guzmán and L. Ureña-López. Newtonian collapse of scalar field dark matter. , 68(2):024023, July 2003.
- [53] Tonatiuh Matos and L. Arturo Ureña-López. Flat rotation curves in scalar field galaxy halos. *General Relativity and Gravitation*, 39(8):1279–1286, August 2007.

- [54] A. Bernal, J. Barranco, D. Alic, and C. Palenzuela. Multistate boson stars. *Phys. Rev. D*, 81:044031, Feb 2010. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.044031>.
- [55] Francisco S. Guzmán. Stability of multistate configurations of fuzzy dark matter. *Astronomische Nachrichten*, 342(1-2):398–403, 2021.
- [56] Argelia Bernal Bautista. *Estudio Dinámico de Campos Escalares Autogravitantes*. PhD thesis, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2007.
- [57] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology*. John Wiley & Sons, Nashville, TN, January 1972.
- [58] F.S. Guzmán and L. Arturo Ureña-López. Gravitational atoms: General framework for the construction of multistate axially symmetric solutions of the schrödinger-poisson system. *Physical Review D*, 101(8), Apr 2020.
- [59] C. G. Böhrer and T. Harko. Can dark matter be a Bose Einstein condensate? , 2007(6):025, June 2007.
- [60] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach.  $\ell$ -boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 35(19):19LT01, Sep 2018.
- [61] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. On the linear stability of  $\ell$ -boson stars with respect to radial perturbations. *Classical and Quantum Gravity*, 38(17):174001, September 2021.
- [62] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. Dynamical evolutions of  $\ell$ -boson stars in spherical symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, 36(21):215013, November 2019.
- [63] Isha Pahwa and Kanak Saha. Structural properties of faint low-surface-brightness galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 478(4):4657–4668, may 2018. [arXiv:1805.00499](https://arxiv.org/abs/1805.00499).
- [64] G. Bothun, C. Impey, and S. McGaugh. Low-Surface-Brightness Galaxies: Hidden Galaxies Revealed. , 109:745–758, July 1997.

- [65] Stacy S. McGaugh, Vera C. Rubin, and W. J. G. de Blok. High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. I. Data. , 122(5):2381–2395, November 2001.
- [66] W. J. G. de Blok, Stacy S. McGaugh, and Vera C. Rubin. High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. II. Mass Models. , 122(5):2396–2427, November 2001.
- [67] F. S. Guzmán and F. D. Lora-Clavijo. Rotation curves of ultralight BEC dark matter halos with rotation. *General Relativity and Gravitation*, 47:21, March 2015.
- [68] Sergey Koposov, Josh Speagle, Kyle Barbary, Gregory Ashton, Johannes Buchner, Carl Scheffler, Ben Cook, Colm Talbot, James Guillochon, Patricio Cubillos, Andrés Asensio Ramos, Ben Johnson, Dustin Lang, Ilya, Matthieu Dartiailh, Alex Nitz, Andrew McCluskey, Anne Archibald, Christoph Deil, Dan Foreman-Mackey, Danny Goldstein, Erik Tollerud, Joel Leja, Matthew Kirk, Matt Pitkin, Patrick Sheehan, Phillip Cargile, ruskin23, Ruth Angus, and Tansu Daylan. joshspeagle/dynesty: v1.2.3, June 2022.
- [69] Will Handley. fgivenx: Functional posterior plotter. *The Journal of Open Source Software*, 3(28), Aug 2018.
- [70] John Skilling. Nested Sampling. In Rainer Fischer, Roland Preuss, and Udo Von Toussaint, editors, *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering: 24th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, volume 735 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 395–405, November 2004.
- [71] F. Feroz, M. P. Hobson, and M. Bridges. MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics. , 398(4):1601–1614, October 2009.
- [72] Luis E. Padilla, Luis O. Tellez, Luis A. Escamilla, and Jose Alberto Vazquez. Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. *Universe*, 7(7):213, 2021. [arXiv: 1903.11127](https://arxiv.org/abs/1903.11127).
- [73] Roberto Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49(2):71–104, March 2008.

- [74] H. Jeffreys. *Theory of Probability*. Oxford, Oxford, England, third edition, 1961.
- [75] Hirotogu Akaike. *Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle*. Springer Science+Business Media, New York, 1998.
- [76] Nariaki Sugiura. Further analysis of the data by akaike's information criterion and the finite corrections. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 7(1):13–26, 1978.
- [77] Gideon Schwarz. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6:461–464, 1978.
- [78] L. Arturo Ureña-López, Victor H. Robles, and T. Matos. Mass discrepancy-acceleration relation: A universal maximum dark matter acceleration and implications for the ultralight scalar dark matter model. , 96(4):043005, August 2017.
- [79] A. Hernández-Almada and Miguel A. García-Aspeitia. Multistate scalar field dark matter and its correlation with galactic properties. *International Journal of Modern Physics D*, 27(3):1850031, January 2018.