



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

TRABAJO PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTORA EN FÍSICA.

ℓ -boson stars as a dark matter component

Presenta

Atalia Navarro Boullosa

Asesora

Dra. Argelia Bernal Bautista

Co-asesor

Dr. J. Alberto Vázquez González

Abril 2024



León, Guanajuato, a 27 de enero de 2020

Oficio No. SAC-015/20

Asunto: Asignación de Director de Tesis

Dra. Argelia Bernal Bautisa
División de Ciencias e Ingenierías, UG

Dr. José Alberto Vázquez González
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM
PRESENTES

El que suscribe, Director de la División de Ciencias e Ingenierías, en acuerdo al artículo 68 del Estatuto Académico de la Normatividad Vigente de la Universidad de Guanajuato y, en respuesta a la solicitud de aprobación de modalidad de titulación, vía tesis, que presenta el(la) **C. Atalia Navarro Boullosa**, me permito nombrar Directora a la Dra. Argelia Bernal Bautisa, y Codirector, al Dr. José Alberto Vázquez González, del trabajo titulado "Estudio de la materia oscura a partir de objetos compactos y observables cosmológicas", que el(la) estudiante desarrollará para obtener el grado de **Doctora en Física**. Así mismo, lo(s) invito a elaborar, a la brevedad posible, en conjunto con su asesorado(a) un plan de trabajo sobre la tesis que le dirigirán.

Sin más por el momento, aprovecho la ocasión para enviarles un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"LA VERDAD OS HARÁ LIBRES"




UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
CAMPUS LEÓN
DIVISIÓN DE CIENCIAS E INGENIERÍAS
DR. DAVID YVES GHISLAIN DELEPINE
DIRECTOR

C.P. Estudiante
Archivo Secretaría Académica

León, Guanajuato a 28 de febrero de 2024.

Asunto: Solicitud asignación de Jurado para defensa de tesis doctoral.

Dr. Delepine, David Yves-Ghislain.
Director de la División de Ciencias e Ingenierías.
Universidad de Guanajuato, Campus León.

Por medio del presente queremos solicitar de la manera más atenta la asignación de sinodales para la tesis de doctorado en Física titulada "I-estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación", la cual realizó nuestra alumna de doctorado M. En F. Atalia Navarro Boullosa con NUA: 426452.

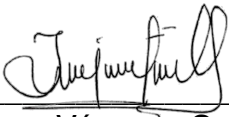
A continuación se menciona a los jurados para este trabajo:

- Dr. Luis Arturo Ureña López
- Dr. Carlos Alberto Vaquera Araujo
- Dra. Lorena Berenice Velázquez Ibarra
- Dra. Abril Suárez Ramírez
- Dr. Francisco Xavier Linares Cedeño

Sin más por el momento, reciba saludos cordiales.

ATENTAMENTE

Dra. Argelia Bernal Bautista
DCI-UGTO
Asesora



Dr. J Alberto Vázquez González
ICF-UNAM
Co-Asesor

A mi madre, Virginia

Resumen

Thesis Abstract

Índice general

Resumen	III
Acknowledgements	VIII
Declaration	IX
1 Introducción	1
1.1 Observables cosmológicas y galácticas	4
1.1.1 Curvas de Rotación	6
1.2 Modelos de materia oscura	7
2 Modelo de materia Oscura Escalar	10
2.1 ℓ -estrellas de bosones	13
2.1.1 Soluciones independientes	17
2.1.2 Soluciones acopladas	20
2.1.3 Características de las soluciones	21
3 Datos utilizados	24
4 Análisis	26
4.1 χ^2	28
4.2 Estadística Bayesiana	28
4.2.1 Muestreo anidado	29
4.2.2 Factor de Bayes	30
4.3 Criterios de información	31
4.3.1 Criterio de información de Akaike (AIC)	31
4.3.2 Criterio de Información Bayesiano (BIC)	31
5 Resultados	33

5.1	Casos independientes	33
5.2	superposición	36
5.2.1	$\ell = 0 + \ell = 1$	36
5.2.2	$\ell = 0 + \ell = 1 + \ell = 2$	36
5.3	Acoplados	36
6	Conclusiones y Discusión	45
	Appendices	48
A	Resultados de la χ^2 con los estados $\psi_{100}, \psi_{210}, \psi_{320}$ y ψ_{430}	48

Índice de tablas

Índice de figuras

Acknowledgements

In progress

Declaration

I declare that, except where explicit reference is made to the contribution of others, that this dissertation is the result of my own work and has not been submitted for any other degree at the University of Guanajuato or any other institution

Atalia Navarro Boullosa

Capítulo 1

Introducción

El término materia oscura se ha utilizado desde hace varios siglos, principalmente, con la invención de la fotografía astronómica en el siglo XIX, astrónomos de la época discutieron la existencia de la materia oscura en forma de nubes oscuras o “nebulosas” oscuras. Posteriormente, en 1894 el astrónomo Arthur Ranyard realizó la hipótesis de que existían estructuras oscuras o masas absorbentes. Por otro lado, Lord Kelvin fue uno de los primeros en intentar una estimación dinámica de la cantidad de materia oscura en la Vía Láctea. Argumentando que si las estrellas de la Vía Láctea se pueden describir como un gas de partículas que actúan bajo la influencia de la gravedad, entonces se puede establecer una relación entre el tamaño del sistema y la velocidad de dispersión de las estrellas. También obtuvo un límite superior en la densidad de la materia dentro de dicho volumen, argumentando que densidades mayores estarían en conflicto con las velocidades observadas de las estrellas. Henri Poincaré en 1906 mencionó explícitamente la “materia oscura”, y argumentó que dado que la dispersión de la velocidad predicha en la estimación de Kelvin es del mismo orden de magnitud que la observada, la cantidad de materia oscura era probablemente menor o similar al de la materia visible.

En 1915, el astrónomo estonio Ernst Öpik construyó un modelo del movimiento de las estrellas en la Galaxia, concluyendo también que la presencia de grandes cantidades de materia invisible era poco probable. El astrónomo holandés Jacobus Kapteyn, en 1922, publicó “a general theory of the distribution of masses, forces and velocities in the sidereal

system". Describiendo a la Vía Láctea como una distribución aplanada de estrellas, girando alrededor de un eje que apunta hacia el Polo Galáctico. Estableció una relación entre el movimiento de las estrellas y su dispersión de velocidad, similar a lo que había hecho Öpik unos años antes. Expresó la densidad local en términos de una masa estelar efectiva, dividiendo la masa gravitacional total por el número de estrellas observadas.

En 1932, el alumno de Kapteyn, Jan Oort, publicó un análisis de la cinemática vertical de las estrellas en la vecindad solar. En este trabajo, Oort agregó a la lista de estimaciones para la densidad de materia oscura local, incluidas las de James Jeans (1922) y Bertil Lindblad (1926).

En 1933 Fritz Zwicky, estudió los desplazamientos al rojo de varios cúmulos de galaxias, según lo publicado por Edwin Hubble y Milton Humason en 1931, y notó una gran dispersión en las velocidades aparentes de ocho galaxias dentro del Cúmulo de Coma, con diferencias que excedían los 2000 km/s . Aplicando el teorema de virial para estimar la masa del cúmulo. Encontró que 800 galaxias de $10^9 M_{\odot}$ (masas solares) en una esfera de 10^6 años luz deberían exhibir una dispersión de velocidad de 80 km/s . En contraste, la dispersión de velocidad promedio observada a lo largo de la línea de visión fue de aproximadamente 1000 km/s . En su artículo (cita) menciona que si esto fuera confirmado, obtendríamos el sorprendente resultado de que la materia oscura está presente en mayor cantidad que la materia luminosa.

Hasta ese momento la hipótesis de la materia oscura no fue comúnmente aceptada y se llegó al consenso de que se necesitaba más información para entender a los cúmulos de galaxias. Además, la necesidad de la materia oscura para explicar la dinámica de dichos cúmulos llevó a las y los astrónomos de la época a preguntarse cada vez más de qué podría estar hecha esta materia oscura.

En la década de 1960, Kent Ford desarrolló un espectrógrafo de tubo de imagen que Vera Rubin y él utilizaron para realizar observaciones espectroscópicas de la galaxia de Andrómeda. Las observaciones de la curva de rotación M31 que Rubin y Ford publicaron en 1970 representaron un paso adelante en términos de calidad. Sus datos ópticos se extendían a 110 minutos de arco del centro de la galaxia y eran compatibles con las mediciones de radio obtenidas previamente por Morton Roberts en 1966. Ken Freeman comparó el radio en el que se predijo el pico de la curva de rotación, bajo el supuesto de un disco exponencial con una longitud de escala ajustada a las observaciones fotométricas, con la curva de rotación de 21 cm observada.

En 1974, las curvas de rotación planas obtenidas por los radioastrónomos habían contribuido mucho a establecer la existencia de grandes cantidades de masa en las partes externas de las galaxias, al menos a los ojos de los autores influyentes. En 1978, Albert Bosma publicó los resultados de su tesis doctoral, incluida la observación por radio de los campos de velocidad y las correspondientes curvas de rotación de 25 galaxias. Unos meses más tarde, Rubin, Ford y Norbert Thonnard publicaron curvas de rotación óptica para diez galaxias espirales de alta luminosidad y descubrieron que estaban planas hasta el radio medido más externo. Este trabajo se ha convertido en uno de los más conocidos y citados en la literatura, a pesar de que las medidas ópticas no se extendieron a radios tan grandes como los sondeados por observaciones de radio, dejando así abierta la posibilidad de que las galaxias no tengan halos de materia, como lo señalaron, por ejemplo, Agris J. Kalnajs en 1983 y Stephen Kent en 1986.

En la siguiente sección 1.1 hablaremos de otras observables astronómicas y cosmológicas que nos dan evidencia de la existencia de la materia oscura, así como la forma en la que son obtenidas. Posteriormente, en la sección 1.2 explicaremos algunos modelos notables de materia oscura que intentan explicar qué es la materia oscura. Particularmente, en el capítulo 2 hablaremos del modelo de materia oscura escalar, modelo en el cual está centrado este trabajo.

1.1 Observables cosmológicas y galácticas

A partir de las observaciones se ha inferido la existencia de una materia invisible, materia oscura, necesaria para reproducir la dinámica observada. En la sección anterior se mencionaron cronológicamente las observaciones que dieron lugar a la propuesta y aceptación de la comunidad científica de la materia oscura.

En la escala cosmológica tenemos a las oscilaciones bariónicas acústicas, BAO por sus siglas en inglés y la radiación cósmica de fondo, CMB por sus siglas en inglés. BAO son fluctuaciones en la densidad de materia visible (bariónica) y proporcionan una regla estándar en la distancia en la que las galaxias se agrupan, aproximadamente 150 Mpc [19]. Esta regla estándar está dada por la máxima distancia a la que las ondas acústicas pudieron viajar en el plasma formado por el Universo temprano, antes de que éste se hiciera neutro, esta etapa es conocida por recombinación. Por lo que, si no existiera la materia oscura en el Universo, no tendríamos esta regla estándar. Para una revisión en extenso del tema, se recomienda [7, 18, 1].

Por otro lado, el CMB es una fotografía del momento en el que los fotones viajaron libremente en el Universo. Al igual que BAO, esta observable nos dice que durante la evolución del Universo es necesaria la presencia de la materia oscura, ya que de lo contrario esta observable sería distinta. Fue observada por primera vez en 1965 por Penzias y Wilson en los laboratorios Bell, obteniendo el premio Nobel en 1978. Después de la primera detección, hasta el momento se han construido tres misiones para obtener observaciones con mayor resolución, el Explorador del Fondo Cósmico COBE (Cosmic Background Explorer) operó de 1989 a 1993, Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observó de 2001 al 2010 y el satélite Planck operado por la Agencia Espacial Europea (ESA) (2009-2013) [41]. En la Figura 1.1 se observa el cambio en la resolución cronológicamente con cada satélite.

En la escala galáctica las observaciones que son evidencia de la existencia de la materia oscura son el lente gravitacional, particularmente el lente gravitacional débil y las curvas de rotación, a las cuales les dedicaremos la siguiente subsección debido a que son parte central de este trabajo.

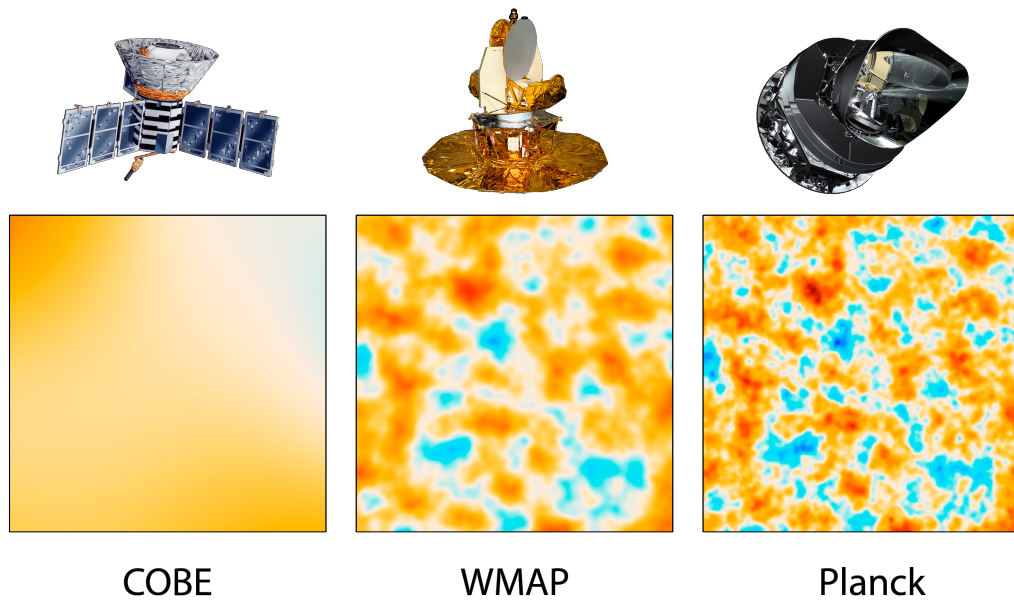


Figura 1.1: Resolución de las observaciones del CMB de cada generación de instrumentos. Cada panel muestra la misma región del cielo de 10 grados cuadrados, mostrando como cambiaría la resolución de las anisotropías con cada satélite, COBE/DMR (1989-1993), WMAP (2001-2010) y Planck (2009-2013) [43].

El lente gravitacional es una de las predicciones de la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, propuesta en 1911. Observado en 1919 por Arthur Eddington y Sir Frank Watson Dyson, en el bullet cluster. Este efecto consiste en la presencia de una fuente gravitacional muy grande, como lo puede ser una galaxia, la luz proveniente de una galaxia más pequeña que está atrás de esta fuente gravitacional, es distorsionada y por lo tanto, la luz que recibimos como observadores es diferente a la de la galaxia originaria. Si la fuente gravitacional es muy pesada, suelen formarse anillos de Einstein como se puede observar en la Figura 1.2.

Particularmente, existe un efecto llamado microlensing, o lente gravitacional débil, el cual consiste en que las estrellas individuales también actúan como lentes, lo que lleva a variaciones potencialmente observables en escalas de tiempo de meses. Dicho efecto fue demostrado por Kyongae Chang y Sjur Refsdal en 1979. Posteriormente en 1986, Bohdan Paczynski propuso que este fenómeno de lente gravitacional débil podría usarse para buscar objetos compactos en el halo oscuro de la Vía Láctea.

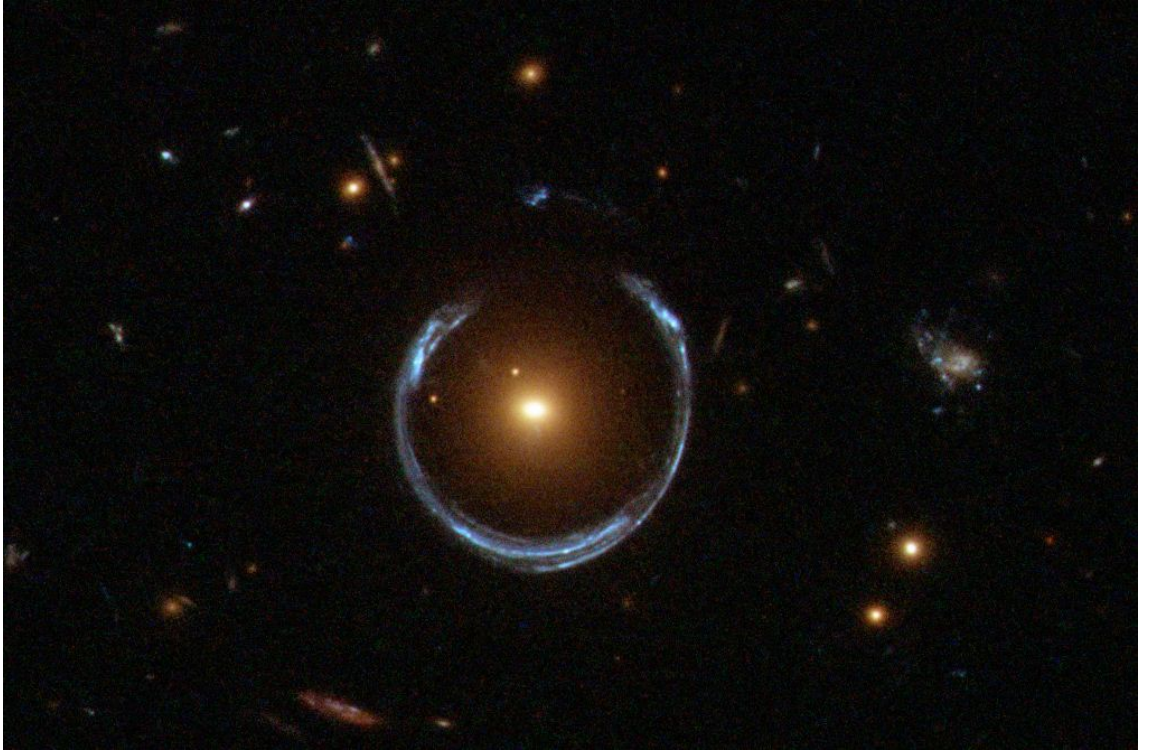


Figura 1.2: Anillo de Einstein observado por el telescopio espacial Hubble [42].

1.1.1 Curvas de Rotación

Las curvas de rotación fueron la observable que hizo que la comunidad científica le tomara importancia a la propuesta de la materia oscura, en particular con las observaciones de Vera Rubin y Kent Ford.

Se obtienen a partir de la rapidez a la que se mueven las estrellas en la órbita de la galaxia a la que pertenecen, es decir, la rapidez de una partícula de prueba en una órbita circular a un radio r ; a esto se le conoce como rapidez circular ($v_c(r)$). Para obtener una expresión para la rapidez circular partimos de la atracción gravitacional, la cual está definida por

$$\vec{F}_r(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{e}_r, \quad (1.1)$$

donde F es la constante gravitacional, $M(r)$ es la función de masa. Al igualarla con la aceleración centrípeta obtenemos

$$\frac{v_c^2}{r} = |\vec{F}_r| = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad (1.2)$$

donde hemos utilizado la expresión $\vec{F} = -\nabla\Phi$, con Φ el potencial gravitacional. Por lo tanto, podemos despegar y obtener que

$$v_c^2 = r \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{z=0}. \quad (1.3)$$

Particularmente, en el caso con simetría esférica, la expresión que utilizaremos en este trabajo para obtener la rapidez circular es

$$v_c^2 = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = \frac{GM(r)}{r}. \quad (1.4)$$

1.2 Modelos de materia oscura

Si bien el modelo Λ CDM, compuesto por una constante cosmológica (Λ) asociada a la energía oscura, materia oscura fría (CDM por sus siglas en inglés), radiación y materia ordinaria; ha prevalecido como el modelo estándar debido a su simplicidad y a su concordancia con observaciones [41], como la abundancia de hidrógeno y elementos ligeros, la estructura a gran escala y la expansión acelerada del universo. Dicho modelo presenta varias discrepancias con las observaciones de galaxias satélites al rededor de la Vía Láctea. Debido a que las simulaciones de materia oscura fría indican la existencia de más galaxias satélites que las que se observan, al rededor de galaxias con características similares a la Vía Láctea, a este problema se le denomina problema de satélites faltantes (MSP por sus siglas en inglés). Sin embargo, en los últimos años se ha discutido como las observaciones actuales podrían dar una solución plausible a este problema, por la alta resolución de las observaciones, para más detalles al respecto se recomienda consultar [33].

Otra discrepancia proveniente de las simulaciones de materia oscura fría es el problema “too big to fail”, consiste en que las galaxias satélites predichas por el modelo son muy masivas que es imposible que no tengan suficientes estrellas visibles, es decir, que los satélites observados de la Vía Láctea no son suficiente masivos para ser consistentes con las predicciones de Λ CDM [15]. Por otro lado, está el problema “cusp/core”, el cual consiste en que los perfiles de densidad predichos por simulaciones de Λ CDM, crecen abruptamente

y por lo tanto producen una distribución “cuspy” de la materia oscura a radios pequeños. Mientras que las observaciones de los perfiles de densidad de materia oscura de galaxias enanas muestran núcleos (“cores”) centrales planos, indicando lo contrario [16, 61].

Debido a las discrepancias mencionadas anteriormente, la comunidad científica ha propuesto distintos candidatos de materia oscura, desde agujeros negros primordiales, partículas elementales más allá del modelo estándar, materia oscura ultraligera, entre otras. Para un resumen general de distintos modelos de materia oscura, sobre todo enfocado en el área de partículas se recomienda consultar [12]. En [35] hacen una introducción a la detección indirecta y algunos modelos de materia oscura. Mencionan también, las distintas escalas de masa para candidatos de materia oscura, como podemos observar en la Figura 1.3, siendo éste uno de los mayores retos sobre su descubrimiento, ya que al no tener un rango de masa pequeño en el cual buscar, se convierte en una tarea más retadora.

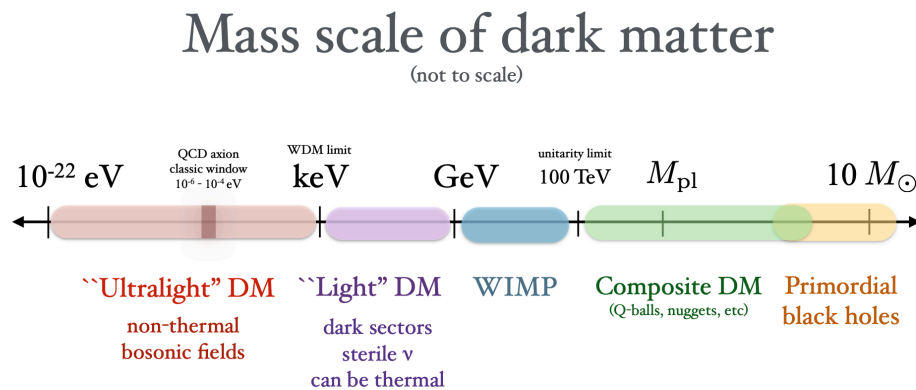


Figura 1.3: Rango de masa permitido para candidatos de materia oscura, desde partículas candidatas hasta agujeros negros primordiales. Los rangos de masa son solamente aproximados [35].

En este trabajo de tesis doctoral nos centraremos en el modelo de materia oscura escalar (también puede ser encontrado en la literatura como wavy DM, Axion-like), el cual corresponde a la escala ultra-ligera de la Figura 1.3 ya que suele tener una masa al rededor de $10^{-22}[\text{eV}/c^2]$.

En el siguiente capítulo explicaremos detalladamente este modelo, sus ventajas respecto al modelo estándar cosmológico y sus restricciones, centrándonos en las ℓ -estrellas de bosones y obtendremos soluciones a diferentes casos de éstas. En el capítulo 3 hablaremos sobre los datos usamos, mientras que en el capítulo 4 explicaremos los pasos seguidos para el análisis de datos con distintos casos de ℓ -estrellas de bosones. Los resultados obtenidos se presentan en el capítulo 5 y finalmente, la discusión y perspectivas del trabajo realizado se encuentran en el capítulo 6.

Capítulo 2

Modelo de materia Oscura Escalar

Un modelo de materia oscura tiene que ser consistente con las observaciones mencionadas en 1.1, desde la escala cosmológica hasta escala galáctica, además de resolver las discrepancias que se han observado con el modelo cosmológico estándar Λ Cold Dark Matter (Λ CDM). El modelo de materia oscura escalar (SFDM por sus siglas en inglés) ha mostrado ciertas ventajas respecto a Λ CDM. Comenzando por las escalas cosmológicas, donde el modelo ha reproducido el fondo y las perturbaciones lineales en la densidad, además de que da un corte natural a pequeñas escalas en el espectro de potencias de masa [39]. Este corte previene la sobreproducción de pequeñas estructuras y se debe a que el único parámetro libre del modelo es la masa del campo, poniendo la cota de que ésta debe ser mayor a $10^{-23}\text{eV}/c^2$ para ser compatible con las observaciones del espectro de potencias [59]. Lo anterior resuelve el problema de los satélites faltantes.

Simulaciones de SFDM realizadas por [51] muestran estructura a gran escala que es indistinguible de aquella proveniente de materia oscura fría y, proveen un perfil de densidad analítico para los halos de materia oscura con un núcleo solitónico y una parte exterior formada por el perfil Navarro-Frenk-White (NFW) [44]. Dicho perfil de densidad analítico para el campo escalar resuelve el problema cusp/core, al tener un núcleo solitónico, es decir, tipo core. Este perfil ha sido utilizado para restringir las características de la materia oscura, utilizando diferentes sistemas tales como galaxias esferoidales enanas [22, 48]. Este análisis ha mostrado que el tener un solo estado de SFDM restringe mucho la masa del campo escalar con las observaciones de Lyman- α , teniendo cotas al rededor de $(\log_{10}(m/\text{eV}) \sim [-23,-24])$ [62, 45].

Además, al usar una reconstrucción no paramétrica de curvas de rotación con distintos perfiles de densidad, se encontró que 44% de las galaxias utilizadas prefieren el modelo SFDM [20]. Lo anterior ha motivado a la comunidad científica a seguir trabajando con el modelo de SFDM, buscando extenderlo de distintas formas, como tener multiples estados acoplados entre sí [6], un campo escalar autogravitante con autointeracción [25, 26] o un estado base con un estado excitado inestable [58], por nombrar algunos ejemplos. Uno de los primeros trabajos a escalas galácticas de campo escalar autointeractuante con multiples estados es [49], el cuál fue utilizado en [37] para analizar las velocidades de dispersión de ocho de las galaxias enanas esferoidales satélites de la Vía Láctea. Posteriormente fue utilizado en [11] para compararlo con el caso de un estado base interno con una parte exterior NFW, esto con galaxias de bajo brillo superficial. A escalas cosmológicas se ha introducido la materia oscura multi campo escalar (MSFDM por sus siglas en inglés), esto significa que se consideran distintas combinaciones de potenciales, para mayores detalles sobre MSFDM consultar [56] y sus referencias.

Otra forma de explorar el modelo de campo escalar es a través de la teoría cuántica de campos, particularmente con las estrellas de bosones, las cuales fueron introducidas por [32] como soluciones regulares a las ecuaciones de Einstein Klein-Gordon para un campo escalar clásico complejo y minimamente acoplado. Posteriormente en [50] introdujeron las soluciones estáticas, autogravitantes de configuraciones con espín cero y con simetría esférica en el límite semiclásico. Dichas soluciones coinciden con las soluciones clásicas si todas las partículas estuvieran en un estado de energía específico. Lo anterior dio lugar al estudio de las estrellas de bosones como objetos astronómicos, obteniendo soluciones estables con todas las partículas en en el estado base [53].

Las estrellas de bosones han sido utilizadas para modelar halos de SFDM y así poner restricciones a la masa del campo con distintas observables como curvas de rotación [10] y dinámica estelar de clústers [36]. En el caso de las curvas de rotación se ha encontrado que al hacer el ajuste con el estado base se obtienen distintos valores de la masa del campo para distintas galaxias [10], mientras que al tomar estados excitados se puede ajustar con un solo valor de la masa pero las configuraciones no son estables [23].

Las configuraciones de los bosones en distintos estados están caracterizadas por sus números cuánticos n , ℓ y m . Lo cual permite explorar distintas combinaciones de valores de sus números cuánticos como por ejemplo el trabajo realizado por [38], donde toman $n \neq 0$, $\ell = m = 0$, para el cual n toma distintos valores, estas configuraciones son llamadas multi-estado y fueron propuestas para obtener curvas de rotación planas a grandes radios con SFDM. Por lo mismo es importante conocer la estabilidad de los multiestados y ésta fue probada en [58, 9].

En este trabajo nos centramos en las estrellas de bosones con multi-estados, es decir, ℓ -estrellas de bosones como halo de materia oscura escalar. Partiendo de las soluciones al estado base y estados excitados de forma independiente para después explorar las soluciones al sistema de ecuaciones acoplado, tomando la regla de selección de selección $n - 1 - \ell = 0$, indicando que tomaremos únicamente las soluciones que no tienen nodos para asegurar su estabilidad. La estabilidad para el caso de multiestados ha sido estudiada en [27], donde se menciona que tener un estado excitado permite tener un mayor rango radial para objetos astronómicos, es decir, que el tener más de un estado podría resolver las discrepancias creadas por este centro solitónico del campo escalar para las curvas de rotación. Por ello, decimos centrar nuestros esfuerzos en estudiar los multiestados con el estado base y dos estados excitados.

En la siguiente sección (2.1) describiremos de forma general de obtener los sistemas de ecuaciones que describen a las estrellas de bosones, sus condiciones iniciales y de frontera, y su transformación a un sistema de ecuaciones de primer orden que posteriormente es resuelto utilizando el método de shooting y un Runge Kutta. En la sección 2.1.1 se muestran explícitamente las ecuaciones resueltas de forma independiente para distintos valores de ℓ , su función de masa y su rapidez circular. Mientras que en la sección 2.1.2 se muestran las ecuaciones acopladas hasta $\ell = 2$. Finalmente, en la sección 2.1.3 se describen las características de las las ecuaciones para cada uno de los diferentes casos.

2.1 ℓ -estrellas de bosones

Para obtener el sistema de ecuaciones que describen a las ℓ -estrellas de bosones se obtuvo el límite no relativista de las ecuaciones de Einstein-Klein Gordon (EKG), siguiendo el procedimiento presentado en [8, 63], con el potencial de un campo escalar de espín 0

$$V(\Psi_{n\ell m}) = -\frac{1}{2}m_a^2\Psi_{n\ell m}^2, \quad (2.1)$$

donde m_a es la masa del campo escalar y $\Psi_{n\ell m} = \Psi_{n\ell m}(t, \vec{x}) = e^{-i\gamma_{n\ell m}t} r^\ell \psi_{n\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.

Así, se obtuvo el sistema de ecuaciones de Schrödinger-Poisson (SP) [28], en particular para este trabajo se eligió el caso de multiestados con simetría esférica, siendo la ecuación análoga a la ecuación de Poisson

$$\nabla_{r\ell}^2 V_{\ell 0} = 4\pi G m_a^2 \frac{\delta_{\ell 0}}{r^\ell} \sum_{n_1, \ell_1} (2\ell_1 + 1) r^{2\ell_1} \psi_{n_1 \ell_1 0}^2, \quad (2.2)$$

donde podemos notar que el lado derecho de la ecuación se anula si $\ell \neq 0$, por la delta de Kronecker, implicando que el único término diferente de cero es el monopolar del potencial gravitacional, V_{00} . Por lo tanto la ecuación anterior se reduce a

$$\nabla_{r\ell}^2 V_{00} = 4\pi G m_a^2 \sum_{n, \ell} (2\ell + 1) r^{2\ell} \psi_{n\ell 0}^2. \quad (2.3a)$$

Además, la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{r\ell}^2 \psi_{n\ell 0} = (m_a V_{00} - \gamma_{n\ell 0}) \psi_{n\ell 0}. \quad (2.3b)$$

En ambas ecuaciones (2.3a) y (2.3b),

$$\nabla_{r\ell}^2 = \partial_r^2 + \left[\frac{2(\ell + 1)}{r} \right] \partial_r. \quad (2.4)$$

Para poder resolver el sistema de ecuaciones numéricamente es necesario introducir las siguientes cantidades y adimensionalizar el sistema SP

$$\psi = \bar{\psi} \frac{\varepsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}}, E = \bar{E} \varepsilon^2 m_a c^2, r = \frac{\bar{r}}{\varepsilon} \frac{\hbar}{m_a c}, V = \bar{V} \varepsilon^2 c^2, M = \bar{M} \varepsilon \frac{m_{pl}^2}{m_a}, \quad (2.5)$$

donde la barra en cada expresión representa la solución numérica, ε es una cantidad adimensional relacionada con que tan pequeño es nuestro sistema comparado con la velocidad de la luz, E es la energía, r es la coordenada radial, V es el potencial, c es la velocidad de la luz y m_{pl} es la masa de Planck.

Debido a la simetría esférica únicamente tenemos dependencia radial en las ecuaciones, lo cual nos permite escribir las derivadas parciales como derivadas totales respecto a r en el sistema de ecuaciones. Al sustituir las expresiones (2.5) para adimensionalizar la ecuación análoga a la ecuación de Poisson (2.3a), tenemos

$$\left(\left(\frac{\varepsilon m_a c}{\hbar} \right)^2 \frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \left[\frac{2(\ell+1)\varepsilon m_a c}{\bar{r}\hbar} \right] \frac{\varepsilon m_a c}{\hbar} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \bar{V}_{00} \varepsilon^2 c^2 = 4\pi G m_a^2 \sum_{n,\ell} (2\ell+1) \left(\frac{\bar{r}}{\varepsilon} \frac{\hbar}{m_a c} \right)^{2\ell} \bar{\psi}_{n\ell 0}^2 \frac{\varepsilon^4 c^4}{\hbar^2 4\pi G}, \quad (2.6)$$

simplificando tenemos

$$\left(\frac{\varepsilon^4 m_a^2 c^4}{\hbar^2} \right) \left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \left[\frac{2(\ell+1)}{\bar{r}} \right] \frac{d}{d\bar{r}} \right) \bar{V}_{00} = \frac{\varepsilon^4 m_a^2 c^4}{\hbar^2} \sum_{n,\ell} (2\ell+1) \left(\frac{\bar{r}}{\varepsilon} \frac{\hbar}{m_a c} \right)^{2\ell} \bar{\psi}_{n\ell 0}^2, \quad (2.7)$$

por simplicidad a partir de aquí omitiremos la notación de barras. Eliminando términos semejantes obtenemos que la ecuación análoga a la ecuación de Poisson es

$$\frac{d^2 V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + \sum_{n,\ell} (2\ell+1) r^{2\ell} \psi_{n\ell 0}^2, \quad (2.8a)$$

y al repetir el mismo procedimiento con la ecuación de Schrödinger (2.3b) se obtiene

$$\frac{d^2 \psi_{n\ell 0}}{dr^2} = -\frac{2(\ell+1)}{r} \frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr} + 2(V_{00} - \gamma_{n\ell 0}) \psi_{n\ell 0}, \quad (2.8b)$$

donde para llegar a ella es importante tomar en cuenta que $\gamma_{n\ell 0}$ tiene la mismas unidades de adimensionalización que E . Además, se decidió añadir al sistema de ecuaciones SP la siguiente ecuación para el número de partículas en cada estado [58]

$$\frac{dN_\ell}{dr} = \psi_{n\ell 0}^2 r^{2+2\ell}. \quad (2.9)$$

Para obtener las soluciones numéricas al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones anteriores, es importante conocer las condiciones iniciales y de frontera del sistema. Las condiciones de frontera deben de garantizar que las soluciones sean regulares y asintóticamente planas. Lo cual implica que la expresión (2.8b) se convierta en un problema de eigenvalores de las frecuencias $\gamma_{n\ell 0}$.

El que las soluciones sean regulares en el origen implica las siguientes condiciones iniciales obtenidas al realizar una expansión en serie de Taylor, para el potencial

$$V'_{00}(0) = 0, \quad V''_{00}(0) = 0, \quad V'''_{00}(0) = 0, \quad V_{00}(r=0) = v_1, \quad (2.10)$$

mientras que para el campo y para la frecuencia

$$\psi'_{n\ell 0}(0) = 0, \quad \psi''_{n\ell 0}(0) = \frac{2V_{00}(0)\psi_{n\ell 0}(0)}{3+2\ell}, \quad \psi'''_{n\ell 0}(0) = 0, \quad \gamma(r)(r=0) = v_2, \quad (2.11)$$

donde se han asignado las variables v_1 y v_2 a aquellas condiciones iniciales desconocidas. Además, para el campo se debe cumplir $\psi_{n\ell 0}(r=0) = C_i$, donde C_i es el valor de una constante que indica el valor de la amplitud central del estado.

Adicionalmente, es importante notar que el hecho de que $\frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr}(r=0) = 0 = \frac{dV_{00}}{dr}(r=0)$ hace que el sistema de ecuaciones formado por (2.8a) y (2.8b) no diverja al tener términos de la forma $1/r$.

Por otro lado, que las soluciones sean asintóticamente planas implica las siguientes condiciones de frontera cuando $r \rightarrow \infty$

$$\psi_{n\ell 0} = 0, \quad V_{00} = -\frac{M}{r}, \quad \frac{V_{00}}{r}(r \rightarrow \infty) + \frac{dV_{00}}{dr}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.12)$$

donde la segunda condición implica la tercera, es decir, la tercera condición es impuesta.

Debido a que desconocemos algunas de las condiciones de frontera de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, implementamos el método de shooting, el cual consiste en encontrar soluciones al problema de condiciones de frontera para diferentes condiciones iniciales hasta encontrar una solución que también cumpla con las condiciones de frontera, lo cual permite encontrar las raíces, es decir, los valores de v_i , v_1 y v_2 para los cuales el sistema de ecuaciones cumple las condiciones. Para implementar el shooting se realizó el siguiente cambio de variable

$$y_1 = \psi_{n\ell 0}, \quad y_2 = \frac{d\psi_{n\ell 0}}{dr} = \frac{dy_1}{dr}, \quad y_3 = V_{00}, \quad y_4 = \frac{dV_{00}}{dr} = \frac{dy_3}{dr}, \quad y_5 = \gamma_{n\ell 0}, \quad y_6 = N_\ell, \quad (2.13)$$

lo cual permitió pasar de un sistema de ecuaciones de segundo grado a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \\ y_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{-2(\ell+1)}{r}y_2 + 2y_1(y_3 - y_5) \\ y_4 \\ -\frac{2(\ell+1)}{r}y_4 + \sum_{n,\ell}(2\ell+1)r^{2\ell}y_1^2 \\ 0 \\ y_1^2 r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

y con un Runge Kutta de cuarto orden se resolvió el sistema de ecuaciones.

Posteriormente se utilizaron estas soluciones para obtener la rapidez circular (V_c), para ello se utilizó la expresión

$$V_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}, \quad (2.15)$$

ya que las soluciones únicamente dependen de la coordenada radial. Donde $M(r)$ es la función de masa dada por

$$M(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr. \quad (2.16)$$

Al utilizar los cambios de variable (2.5) con las soluciones numéricas obtenidas le regresamos las unidades físicas a las soluciones, por lo que en este caso la densidad está dada por

$$\rho(r) = \frac{m_a^2 \varepsilon^4}{4\pi(1.95 \times 10^{-69})} \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) r^{2\ell} \psi_{n\ell 0}^2 \frac{M_\odot}{\text{kpc}^3}, \quad (2.17)$$

donde M_\odot indica que son masas solares y kpc kiloparsec. Por lo tanto, la rapidez circular es

$$V_c^2 = 8.95 \times 10^{10} \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^R r^2 \sum_{n,\ell} (2\ell + 1) r^{2\ell} \psi_{n\ell 0}^2 dr \left(\frac{\text{km}}{\text{s}} \right)^2. \quad (2.18)$$

En las siguientes secciones tomaremos dos casos del sistema de ecuaciones SP, a los que dividiremos en soluciones independientes (sección 2.1.1) y soluciones acopladas (sección 2.1.2). Donde en cada caso, después de obtener sus soluciones se continúa con el análisis para obtener su rapidez circular, es decir, su curva de rotación.

2.1.1 Soluciones independientes

Como primer paso para obtener las soluciones a las ℓ -estrellas de bosones se obtuvieron soluciones a cada uno de los estados por separado, es decir, soluciones con $\ell = 0$, $\ell = 1$ y $\ell = 2$. El obtener las soluciones nos permitió explorar y conocer las características de ellas, las cuales se encuentran descritas detalladamente en la sección 2.1.3 en conjunto con las características correspondientes a la solución de las ecuaciones acopladas, subsección 2.1.2. Para los casos independientes, dichas características de reescalamiento nos permitieron fijar la amplitud central del estado, es decir, $\psi_{n\ell 0}(r=0) = 1$ y el hecho de que forman una familia nos permitió utilizar el parámetro ε como factor de reescalamiento en la amplitud central. A continuación se presentará explícitamente el sistema de ecuaciones resuelto de cada uno de los casos independientes y su rapidez circular.

2.1.1.1 Estrella de bosones ($\ell = 0$)

Al tomar el sistema de ecuaciones (2.8b) y (2.8a), con $\ell = 0$ y $n = 1$, se obtienen las soluciones conocidas como una estrella de bosones simple, estas soluciones han sido estudiadas a profundidad en [13, 23]. Explicitamente, el sistema de ecuaciones es

$$\frac{d^2\psi_{100}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{100})\psi_{100} - \frac{2}{r} \frac{d\psi_{100}}{dr} \quad (2.19a)$$

y

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + \psi_{100}^2. \quad (2.19b)$$

Donde las condiciones iniciales que serán encontradas utilizando el método de shooting son: $\gamma_{100}(r=0)$ y $V_{00}(r=0)$. La función de masa está dada por

$$M(r) = 1.33 \times 10^{-10} \frac{\varepsilon}{m_a} \int_0^R r^2 \psi_{100}^2 dr M_\odot, \quad (2.20)$$

y por lo tanto, la rapidez circular para el estado base es

$$V_{c,\ell=0}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^R r^2 \psi_{100}^2 dr \left(\frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.21)$$

Así, los parámetros libres a ser estimados son ε y m_a . Además, podemos notar que la rapidez circular únicamente depende de ε como parámetro libre.

2.1.1.2 Estrella de bosones con estado excitado ($\ell = 1$)

Consideramos el caso en el que el halo de materia oscura únicamente está formado por un estado excitado, el cuál está relacionado con la simetría cuadrupolar. Resolvimos el sistema de ecuaciones de SP con el término $\ell = 1$ y $n = 2$ distinto de cero, dado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2\psi_{210}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{210})\psi_{210} - \frac{4}{r} \frac{d\psi_{210}}{dr} \quad (2.22a)$$

y

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + 3r^2 \psi_{210}^2. \quad (2.22b)$$

Las condiciones iniciales son las mismas que para el estado base 2.1.1.1, donde $\gamma_{210}(r=0)$ y $V_{00}(r=0)$ serán determinados al resolver el problema de eigenvalores. Por otro lado, la función de masa está dada por

$$M(r) = 1.33 \times 10^{-10} \frac{\varepsilon}{m_a} \int_0^R 3r^4 \psi_{210}^2 dr M_\odot, \quad (2.23)$$

y la rapidez circular

$$V_{c,\ell=1}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\varepsilon^2}{R} \int_0^R r^4 \psi_{210}^2 dr \left(\frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.24)$$

Podemos notar que al igual que en el estado base, los parámetros libres son ε y m_a .

2.1.1.3 Superposición

El caso de superposición es una primera aproximación al caso de soluciones acopladas, donde se añadieron las soluciones sistemáticamente, es decir, se comenzó con las soluciones independientes para $\ell=0$ y $\ell=1$, mencionadas en las secciones anteriores y posteriormente se añadieron las soluciones correspondientes a $\ell=2$, las cuales corresponden al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2\psi_{320}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{320})\psi_{320} - \frac{6}{r} \frac{d\psi_{320}}{dr}, \quad (2.25a)$$

y

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{dV_{00}}{dr} + 5r^4 \psi_{320}^2, \quad (2.25b)$$

donde $\gamma_{320}(r=0)$ y $V_{00}(r=0)$, también son determinados al utilizar el método de shooting. Una vez resueltos los sistemas de ecuaciones de forma independiente, se hizo la suposición de que la función de masa es una superposición de estas soluciones, por lo que la expresión para $M(r)$ total es

$$M_{\text{TOT}}(r) = M_{\ell=0}(r) + M_{\ell=1}(r) + M_{\ell=2}(r). \quad (2.26)$$

Esta expresión nos permite escribir a la rapidez circular total de la siguiente forma

$$V_{c,\text{TOT}} = \sqrt{V_{c,\ell=0}^2 + V_{c,\ell=1}^2 + V_{c,\ell=2}^2}, \quad (2.27)$$

donde $V_{c,\ell=0}$ es la ecuación (2.21), $V_{c,\ell=1}$ la ecuación y $V_{c,\ell=2}$ es

$$V_{c,\ell=2}^2(r) = 8.95 \times 10^{10} \frac{\varepsilon_2^2}{R} \int_0^R r^6 \psi_{320}^2 dr \left(\frac{km}{s} \right)^2. \quad (2.28)$$

Es importante notar que en la expresión anterior se cambió ε por ε_2 , comparando con la ecuación general (2.18). Esto se debe a que para el caso de superposición se tomaron como parámetros libres m_a y ε_ℓ para cada estado debido a su relación con la amplitud central de éste. Por lo que los parámetros libres son m_a , $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ y ε_2 .

2.1.2 Soluciones acopladas

Para resolver el sistema de ecuaciones acoplado formado por las ecuaciones (2.8b) y (2.8a), se decidió obtener las soluciones estables, es decir, aquellas que no tienen nodos y que siguen la regla de selección $n - 1 - \ell = 0$ [28]. Además, se tomaron las soluciones hasta $\ell = 2$ porque los resultados del caso de superposición nos indicaban que $\ell = 2$ tiene un buen alcance para grandes extensiones radiales, en el capítulo 5 se discute a detalle los resultados obtenidos. Por otro lado, en el apéndice encontrarán resultados preliminares al tomar hasta $\ell = 3$.

El sistema de ecuaciones de SP acoplado resuelto es

$$\frac{d^2 \psi_{100}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{100}) \psi_{100} - \frac{2}{r} \frac{d\psi_{100}}{dr}, \quad (2.29a)$$

$$\frac{d^2\psi_{210}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{210})\psi_{210} - \frac{4}{r}\frac{d\psi_{210}}{dr}, \quad (2.29b)$$

$$\frac{d^2\psi_{320}}{dr^2} = 2(V_{00} - \gamma_{320})\psi_{320} - \frac{6}{r}\frac{d\psi_{320}}{dr}, \quad (2.29c)$$

$$\frac{d^2V_{00}}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{dV_{00}}{dr} + \psi_{100}^2 + 3r^2\psi_{210}^2 + 5r^4\psi_{320}^2. \quad (2.29d)$$

Para encontrar las soluciones resolvimos el problema de eigenvalores de las frecuencias γ_{100} , γ_{210} y γ_{320} utilizando el método de shooting. Parte de las condiciones iniciales implican $\psi_{100}(r=0) = C_1$, $\psi_{210}(r=0) = C_2$ y $\psi_{320}(r=0) = C_3$. Por lo tanto, $\psi_{100}(0)$, $\psi_{210}(0)$ y $\psi_{320}(0)$ se convierten en parámetros libres, en conjunto con ε y m_a para este caso. Es importante mencionar que añadir las amplitudes centrales como parámetros libres implica resolver el problema de eigenvalores a cada paso del sampleo, haciendo al algoritmo más costoso computacionalmente. La expresión para el número de partículas en cada estado también es parte del sistema de ecuaciones, lo cual significa que también las soluciones para $N_{\ell=0}$, $N_{\ell=1}$ y $N_{\ell=2}$ están siendo encontradas.

2.1.3 Características de las soluciones

Al resolver numéricamente el sistema de ecuaciones de SP se observaron características interesantes. En el caso de las soluciones independientes (ψ_{100} , ψ_{210} y ψ_{320}) se pudo observar que forman una familia, es decir, que al tomar la solución para cierta amplitud central $\psi_{n\ell 0}(0)$ podemos utilizar la expresión

$$\lambda = \left(\frac{1}{\psi_{n\ell 0}(0)} \right)^{(1/(\ell+2))}, \quad (2.30)$$

para obtener la solución correspondiente a una amplitud central $\psi_{n\ell 0}(0)$ diferente sin necesidad de volver a resolver el sistema de ecuaciones, ver Figura 2.1. Esto se debe a las propiedades de reescalamiento del sistema de ecuaciones, las cuales pueden ser encontradas al utilizar la transformación $(r, \psi_{n\ell 0, V_{00}}) \rightarrow (r\lambda, \psi_{n\ell 0}/\lambda^{\ell+2}, V_{00}/\lambda^2)$. Por lo tanto, para las soluciones independientes el parámetro λ es análogo al parámetro ε , esta equivalencia

se deja de cumplir en el caso de las soluciones de multiestados, esto se puede ver en la ecuación (2.17), donde el parámetro ε está multiplicando la suma sobre n y ℓ , por lo tanto si el parámetro ε cambia, cambiaría todos los estados en la suma por igual.

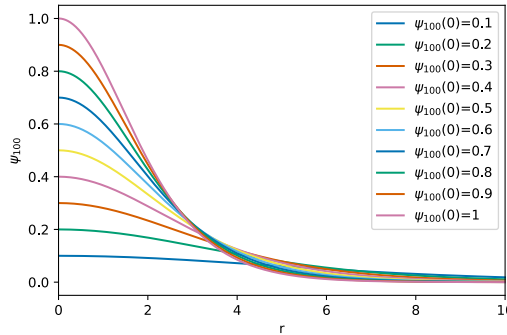


Figura 2.1: Soluciones numéricas para el sistema de ecuaciones del estado base, descrito en la sección 2.1.1.1. Cada solución fue obtenida utilizando la expresión (2.30) con $\Psi_{100} = 1$ como principal.

En la Figura 2.2 y Figura 2.3, se muestran los perfiles de densidad numéricos para los sistemas de ecuaciones descritos en las secciones 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente. Al comparar estas gráficas se puede observar que en la Figura 2.2 cada densidad numérica tiene una mayor amplitud y extensión radial que las densidades numéricas de la Figura 2.3, dichas discrepancias pueden ser atribuidas a la interacción gravitacional entre los estados y al sistema de ecuaciones acoplado que las ecuaciones (2.29a - 2.29d) representan. Además, es notoria la diferencia entre una contribución independiente, i.e. resolver independientemente cada estado y tomar la superposición de ellos; y la contribución acoplada de cada estado a la curva de rotación total. Debido a que estas soluciones están relacionadas con los armónicos esféricos, se puede ver que para las soluciones de multiestados, cada uno de ellos tiene una contribución multipolar. Para más detalles acerca de las características de las ℓ -estrellas y en otro contexto se recomienda consultar [3, 5, 4].

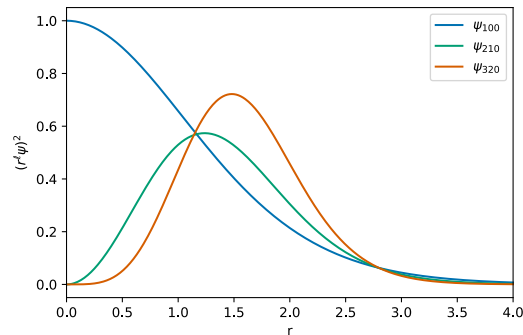


Figura 2.2: Perfiles de densidad numérica para cada estado, resolviendo el sistema de ecuaciones descrito en la sección 2.1.1.1 para el estado base (ψ_{100}), descrito en la sección 2.1.1.2 para el estado excitado (ψ_{210}) y el sistema de ecuaciones (2.25a)-(2.25b) para el estado ψ_{320} . La línea azul corresponde al estado ψ_{100} , la línea verde al estado ψ_{210} y la línea naranja corresponde al estado ψ_{320} .

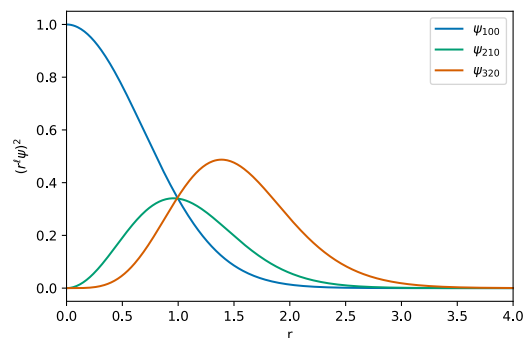


Figura 2.3: Perfiles de densidad numérica para cada estado, resolviendo el sistema de ecuaciones (2.29a - 2.29d). La línea azul corresponde al estado ψ_{100} , la línea verde al estado ψ_{210} y la línea naranja corresponde al estado ψ_{320} .

Capítulo 3

Datos utilizados

Se ha mencionado en el capítulo 1 la importancia de las observaciones de las curvas de rotación para la inferencia de la existencia de materia oscura a escala galáctica y como las observaciones de M31 realizadas por Vera Rubin y Kent Ford en 1970 fueron importantes para que la comunidad científica comenzara a atacar el problema de la materia oscura desde distintos ángulos.

Actualmente, se sabe que las galaxias de bajo brillo superficial (LSBG, por sus siglas en inglés) son galaxias propicias para probar modelos de materia oscura [47, 14], debido a su baja visibilidad en el espectro óptico y su fotometría en HI, lo cual puede indicar que la dinámica de su curva de rotación principalmente depende de la contribución de la materia oscura.

Por lo anterior, decidimos utilizar un conjunto de 17 LSBG, basándonos en la buena calidad de los datos que fue clasificada por [40] y en su modelo de masa [17, 24, 11].

En la tabla 3.1 se muestra la morfología de cada galaxia del conjunto seleccionado, para mayores detalles sobre las características de los datos consultar [40]. La morfología de cada galaxia nos puede dar información de su historia de formación, sin embargo, al no encontrar ninguna relación entre su morfología y los parámetros libres del modelo,

se decidió mostrar los resultados basándonos en la extensión radial de las galaxias y su comportamiento lineal. Es decir, se dividieron en aquellas con $r < 10$ kpc y $r > 10$ kpc, añadiendo una categoría extra para 3 galaxias con $r < 10$ kpc, ya que los datos parecen indicar que son una línea recta.

Galaxia	Morfología
ESO3020120	Espiral, indicio de barra?
ESO3050090	Espiral barrada
ESO4880490	Barra de Magallanes inclinada
UGC11557	Espiral difusa, núcleo pequeño
UGC11616	Difusa, irregular
UGC4115	Nudosa y difusa
ESO0140040	Bulbo, brazos espirales justos
ESO0840411	Edge-on
ESO1200211	barra de Magallanes difusa
ESO1870510	Espiral irregular, floculante
ESO2060140	Espiral
ESO4250180	Espiral barrada abierta
F730-V1	Espiral
UGC11454	Espiral difusa, núcleo pequeño
UGC11583	Barra de Magallanes tenue
UGC11648	Irregular
UGC11748	Irregular, núcleo/barra brillante?

Tabla 3.1: Morfología de cada galaxia en el conjunto de datos seleccionado, para más detalles consultar [40].

Capítulo 4

Análisis

En este capítulo explicaremos los métodos estadísticos utilizados para el análisis de los datos de las LSBG explicadas en el capítulo 3 y el procedimiento que se siguió en él.

Como primer paso en nuestro análisis calculamos la χ^2 mínima, la cual está descrita en la sección 4.1. Comenzando por el estado base y la superposición, añadiendo sistemáticamente estados, es decir, $\psi_{100} + \psi_{210}$ y $\psi_{100} + \psi_{210} + \psi_{320}$, éstos últimos resultados nos dieron información de como contribuye cada uno de los estados a la curva de rotación total. Concluyendo que para la mayoría de las galaxias en la muestra deberían incluir al menos tres estados (un estado base y dos estados excitados).

Debido a los resultados mencionados anteriormente, se decidió centrar el trabajo en el modelo descrito en la sección 2.1.2, ya que sirvieron como una primera aproximación al sistema acoplado, y utilizar como la información a priori en el algoritmo de muestreo anidado, los resultados de la χ^2 de la superposición de estados. Como es un sistema de ecuaciones acoplado, no se puede utilizar el parámetro ϵ para cada estado como se hizo en el caso de superposición. En la ecuación (2.18) se puede observar que ϵ se convierte en un parámetro global para este caso. Por lo tanto, se eligió la amplitud central de cada estado ($\psi_{nl}(0)$) como parámetro libre, la cual es parte de las condiciones iniciales necesarias para resolver el sistema de ecuaciones numéricamente. Este cambio hizo que la estimación de parámetros fuera más costosa computacionalmente debido a que la integración con el método de shooting se tenía que hacer a cada paso del algoritmo de muestreo anidado.

Los parámetros libres para el caso de multiestados son: m_a , ϵ , $\psi_{100}(0)$, $\psi_{210}(0)$ and $\psi_{320}(0)$. Elegimos los siguientes priors planos $-26 \leq \log(m_a[\text{eV}/c^2]) \leq -20$, $-6 \leq \log(\epsilon) \leq -2$,

$-5 \leq \log(\psi_{100}(0)) \leq 0$, $-6 \leq \log(\psi_{210}(0)) \leq 0$ y $-6 \leq \log(\psi_{320}(0)) \leq 0$. Para los casos independientes, estado base (ψ_{100}) y primer estado excitado (ψ_{210}) elegimos los mismos priors para los parámetros libres m_a y ϵ , respectivamente. Para el número de “live points” necesarios para el algoritmo de muestreo anidado se siguió la regla $50 \times k$, donde k corresponde a la dimensionalidad del vector de parámetros libres, como un número mínimo. Se modificó SimpleMC, un código que utiliza dynesty [34], este método de muestreo nos permitió obtener la evidencia bayesiana, la cuál utilizamos para obtener el factor de Bayes. Este algoritmo es descrito en la sección 4.2.1.

Adicionalmente, se utilizó la librería fgivex [29] para la visualización del análisis obtenido con el muestreo anidado. Los contornos a 2σ obtenidos al utilizar esta librería pueden ser observados en las figuras.

Para conocer cual de los tres casos considerados en este trabajo es favorecido por los datos como componente de materia oscura, calculamos los criterios de información de Akaike y bayesiano, en conjunto con el factor de Bayes. Para este último tomamos al estado base (ψ_{100} , section 2.1.1.1) como el modelo base, debido a su simplicidad y a su correspondencia con el perfil solitónico obtenido de las simulaciones de campo escalar [51], que usualmente es utilizado en la literatura con un perfil NFW en la parte exterior [22, 48]. Adicionalmente, tomamos las cotas para la masa del campo escalar encontradas en [11] para este caso, $0.212 \times 10^{-23} < m_a[\text{eV}/c^2] < 27.0 \times 10^{-23}$.

En las siguientes secciones, adicional a la explicación de las métricas utilizadas en el análisis, se dará una breve introducción a estadística bayesiana, la cual es clave en el muestreo anidado utilizado en este trabajo.

4.1 χ^2

Como se mencionó anteriormente, en la primera parte del análisis se minimizó el error a través de la siguiente expresión

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(V_{\text{obs}} - V(x_i, \boldsymbol{\theta}))^2}{\sigma_{V_{\text{obs}}}^2}, \quad (4.1)$$

donde V_{obs} es la rapidez circular observada, $\sigma_{V_{\text{obs}}}^2$ es la varianza de V_{obs} , $\boldsymbol{\theta}$ son los parámetros libres y $V(x_i, \boldsymbol{\theta})$ es el modelo evaluado en los puntos observados.

4.2 Estadística Bayesiana

A diferencia de la estadística frecuentista, la estadística Bayesiana define la probabilidad como una medida de que tan posible es que un evento o la posición de una partícula sea cierta, dado otro evento que sabemos que es cierto, $P(A|B)$. A esta cantidad se le conoce como la probabilidad condicional, debido a que depende de que el observador tenga información del evento y puede actualizarse al tener más información. La estadística Bayesiana se basa en el teorema de Bayes, definido de la siguiente forma

$$P(\Theta) = \frac{\mathcal{L}(\Theta)\pi(\Theta)}{z}, \quad (4.2)$$

donde

- $P(\Theta)$ es el posterior y nos da la probabilidad de una hipótesis dada la evidencia observada.
- $\mathcal{L}(\Theta)$ es el likelihood o verosimilitud, es la probabilidad de observar los datos bajo la suposición de un modelo. Se forma a partir de la distribución de probabilidad conjunta de la muestra.

- $\pi(\Theta)$ es el prior, es decir, el grado de nuestra creencia a priori de la hipótesis basada en nuestro conocimiento previo.
- z es la evidencia, la probabilidad de los datos en todas sus posibilidades y está dada por la siguiente integral sobre todo el espacio de parámetros

$$z = \int_{\Omega_{\Theta}} \mathcal{L}(\Theta)\pi(\Theta)d\Theta. \quad (4.3)$$

4.2.1 Muestreo anidado

El muestreo anidado (nested sampler en inglés) es un algoritmo introducido por [54] en el 2004, dicho algoritmo es muy útil para lidiar con espacios de parámetros grandes o en casos en el que el calculo del likelihood es más costoso computacionalmente. A continuación se presenta una brebe explicación de como funciona

- Inicialización: Comienza con un conjunto de puntos de la distribución de los parámetros del modelo. Estos puntos son conocidos como live points y pueden ser vistos como un conjunto de partículas en el espacio de parámetros.
- Iteración: Posteriormente, a cada iteración el algoritmo identifica el punto con el menor valor del likelihood, lo elimina y lo reemplaza con un punto muestreado del prior, con la restricción de que su probabilidad sea mayor que la del punto eliminado. Este proceso continua hasta alcanzar cierto umbral de probabilidad.
- Muestreo del Prior dentro de las constricciones del likelihood: Al explorar gradualmente el espacio de parámetros eligiendo muestreos del prior dentro de la región donde likelihood, la cual es definida por aquel punto con el menor likelihood, se permite que el algoritmo se centre únicamente en las regiones con mayor plikelihood.
- A cada iteración el área del likelihood va disminuyendo y los live points continuan explorando el espacio de parámetros en aquellas regiones con mayor likelihood. Este proceso continua hasta que el humbral del likelihood es muy cercano al del máximo likelihood del modelo.

- Estimación de evidencia y posteriors: Los live points nos ayudan a estimar el valor de la evidencia y también pueden ser utilizados para aproximar las distribuciones posterior del modelo.

Para mayor detalle sobre como funciona el muestreo anidado, se recomienda consultar [21].

4.2.2 Factor de Bayes

El factor de Bayes, B_{12} , es razón entre el posterior de un modelo (M_1) comparado con otro modelo (M_2), dado cierto conjunto de datos (D), permitiéndonos compararlos entre sí. En escala logarítmica

$$\log B_{12} \equiv \log \left(\frac{z_1(D|M_1)}{z_2(D|M_2)} \right) \quad (4.4)$$

$$= \log [z_1(D|M_1)] - \log [z_2(D|M_2)], \quad (4.5)$$

donde $z(D|M)$ es la evidencia bayesiana, la cual está definida como

$$z(D|M) = \int P(\theta|M) \mathcal{L}(D|\theta, M) d\theta. \quad (4.6)$$

Se recomienda la revisión [46, 57] acerca de estadística bayesiana y selección de modelos.

Si $\log(B_{12})$ es mayor que la unidad, los datos favorecen ligeramente el modelo M_1 , de lo contrario ($\log(B_{12})$ es más pequeño que la unidad), los datos favorecen al modelo M_2 . La tabla 4.1 contiene la información que nos da la evidencia según la escala de Jeffrey [31], la cual cuantifica qué tan bueno es un modelo respecto de otro.

$\log B_{12}$	Información
<1.0	Inconcluso (apoya al M_2)
1.0	Débil
2.5	Moderado
5.0	Fuerte
>5	Muy fuerte

Tabla 4.1: Escala de Jeffrey para cuantificar que tan bueno es un modelo respecto a otro.

4.3 Criterios de información

4.3.1 Criterio de información de Akaike (AIC)

El Criterio de información de Akaike (AIC, por sus siglas en inglés) está basado en la teoría de la información y nos da una forma de comparar modelos dado un conjunto de datos [2]

$$\text{AIC} = -2\ln \mathcal{L} + 2k + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}, \quad (4.7)$$

donde k es el número de parámetros libres en nuestro modelo, n es el número de datos de cada galaxia y \mathcal{L} es el valor máximo del likelihood, el cuál es calculado previamente para cada modelo. El primer término apremia el ajuste, mientras que el segundo penaliza al modelo al incluir el número de parametros libres, lo cual hace que incremente el valor de la función, Así, el AIC desalienta el sobreajuste. Además, al añadir el último término penaliza el trabajar con una muestra pequeña de datos [55], lo cual es nuestro caso debido a que las galaxias de bajo brillo tienen pocos puntos observables.

4.3.2 Criterio de Información Bayesiano (BIC)

Similar al AIC, el BIC es un criterio de selección de modelos y está definido de la siguiente forma [52]

$$\text{BIC} = -2\ln \mathcal{L} + k \ln n, \quad (4.8)$$

donde el primer término contiene información de qué tan bueno es el ajuste del modelo, mientras que el segundo término lo penaliza al incluir los parámetros libres (k) y el número de datos utilizados en el ajuste (n).

Capítulo 5

Resultados

5.1 Casos independientes

La Tabla 5.1 muestra la estimación de parámetros obtenida con el muestreo anidado, el valor de la evidencia ($\log(E)$) y $-2\ln\mathcal{L}$, para los casos 2.1.1.1 y 2.1.1.2; el valor medio está reportado con una confianza de 1σ . Los valores de $-2\ln\mathcal{L}$ y $\log(E)$ en la Tabla 5.1, muestran que para el conjunto de galaxias los casos en los que solamente la contribución del estado base (ψ_{100}) está presente se tiene un mejor ajuste comparado con los casos en los que solamente se tiene un estado excitado (ψ_{210}). Además, se puede notar que para todas las galaxias el valor de la masa del campo escalar (m_a) es mayor para los casos con el estado excitado que para aquellas con solamente el estado base.

Como se mencionó en el capítulo 3, presentamos los resultados basándonos en la extensión radial de las galaxias, las cuales están divididas en dos secciones: $r < 10\text{kpc}$ y $r > 10\text{kpc}$; añadiendo una restricción extra para los datos con un comportamiento lineal, es decir, aquellas galaxias con curva de rotación similar a una línea recta. Las regiones sombreadas corresponden a las cotas para la masa del campo escalar encontradas en [11], como se mencionó anteriormente. Esta clasificación se encuentra en la Figura 5.1 y 5.2, para los casos independientes, ψ_{100} y ψ_{210} , respectivamente. Se puede notar que la mayoría de las galaxias con $r < 10\text{kpc}$ tienden a tener una masa más grande mientras que aquellas galaxias con $r > 10\text{kpc}$ tienden a tener masas más ligeras. En las gráficas de contornos se puede notar un caso particular, la galaxia UGC11616 tiene una extensión radial de

$r = 9.6$ kpc, debido a la cercanía al valor $r = 10$ kpc, se puede asumir que esta galaxia tiene un comportamiento similar a aquellas con $r > 10$ kpc.// Por otro lado, las galaxias con comportamiento lineal y $r < 10$ kpc están altamente correlacionadas entre sus parámetros libres en el estado base (ψ_{100}), esta correlación parece romperse en el caso de un solo estado excitado (ψ_{210}).

Galaxy	Ψ_{100}				Ψ_{210}			
	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(E)$	$-2\log\mathcal{L}$	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(E)$	$-2\ln\mathcal{L}$
ESO3020120	$-23.20^{+0.08}_{-0.10}$	$-3.42^{+0.03}_{-0.04}$	-7.93 ± 0.36	0.96	$-23.05^{+0.07}_{-0.07}$	$-3.42^{+0.03}_{-0.04}$	-11.87 ± 0.36	8.61
ESO3050090	$-22.88^{+0.15}_{-0.25}$	$-3.62^{+0.09}_{-0.05}$	-7.05 ± 0.32	0.98	$-22.63^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.67^{+0.04}_{-0.04}$	-13.44 ± 0.37	11.11
ESO4880490	$-23.09^{+0.08}_{-0.09}$	$-3.40^{+0.03}_{-0.02}$	-8.89 ± 0.36	2.8	$-22.92^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.42^{+0.02}_{-0.02}$	-20.87 ± 0.39	24.7
UGC11557	$-23.45^{+0.25}_{-1.49}$	$-3.39^{+0.71}_{-0.10}$	-6.61 ± 0.33	0.52	$-23.03^{+0.08}_{-0.22}$	$-3.53^{+0.05}_{-0.04}$	-11.35 ± 0.36	7.61
UGC11616	$-23.31^{+0.03}_{-0.03}$	$-3.25^{+0.01}_{-0.01}$	-21.02 ± 0.41	23.44	$-23.18^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.26^{+0.01}_{-0.01}$	-62.66 ± 0.417	105.97
UGC4115	$-22.39^{+0.29}_{-1.60}$	$-3.67^{+0.76}_{-0.12}$	-5.75 ± 0.31	0.04	$-21.95^{+0.11}_{-0.13}$	$-3.82^{+0.06}_{-0.05}$	-9.97 ± 0.36	4.77
ESO0140040	$-24.05^{+0.04}_{-0.03}$	$-2.90^{+0.01}_{-0.01}$	-15.62 ± 0.39	13.36	$-23.98^{+0.03}_{-0.03}$	$-2.90^{+0.01}_{-0.01}$	-38.07 ± 0.41	57.27
ESO0840411	$-23.29^{+0.20}_{-2.20}$	$-3.54^{+1.04}_{-0.08}$	-6.480 ± 0.320	0.45	$-23.00^{+0.06}_{-0.08}$	$-3.64^{+0.03}_{-0.03}$	-13.47 ± 0.36	12.21
ESO1200211	$-22.12^{+0.17}_{-0.21}$	$-3.99^{+0.06}_{-0.05}$	-7.57 ± 0.34	1.56	$-21.98^{+0.10}_{-0.11}$	$-4.01^{+0.04}_{-0.04}$	-8.58 ± 0.33	4.51
ESO1870510	$-22.47^{+0.12}_{-0.16}$	$-3.77^{+0.06}_{-0.05}$	-7.76 ± 0.35	0.82	$-22.30^{+0.09}_{-0.09}$	$-3.81^{+0.04}_{-0.04}$	-11.66 ± 0.36	8.16
ESO2060140	$-23.30^{+0.04}_{-0.03}$	$-3.28^{+0.01}_{-0.01}$	-21.31 ± 0.42	23.36	$-23.20^{+0.03}_{-0.02}$	$-3.28^{+0.01}_{-0.01}$	-54.49 ± 0.42	89.96
ESO4250180	$-23.72^{+0.21}_{-0.41}$	$-3.23^{+0.15}_{-0.05}$	-6.88 ± 0.32	1.25	$-23.53^{+0.12}_{-0.17}$	$-3.28^{+0.05}_{-0.03}$	-9.58 ± 0.35	30.26
F730-V1	$-23.42^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.21^{+0.01}_{-0.01}$	-21.79 ± 0.28	25.36	$-23.26^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.22^{+0.02}_{-0.02}$	-54.97 ± 0.4	91.74
UGC11454	$-23.52^{+0.03}_{-0.03}$	$-3.19^{+0.01}_{-0.01}$	-35.45 ± 0.31	49.97	$-23.28^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.21^{+0.01}_{-0.01}$	-128.28 ± 0.43	236.57
UGC11583	$-22.16^{+0.18}_{-0.31}$	$-3.82^{+0.11}_{-0.06}$	-6.57 ± 0.32	0.5	$-21.98^{+0.09}_{-0.10}$	$-3.86^{+0.04}_{-0.04}$	-8.23 ± 0.35	2.19
UGC11648	$-23.53^{+0.02}_{-0.03}$	$-3.24^{+0.01}_{-0.01}$	-113.35 ± 0.43	206.47	$-23.41^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.26^{+0.01}_{-0.01}$	-315.56 ± 0.44	609.2
UGC11748	$-23.69^{+0.01}_{-0.01}$	$-2.92^{+0.01}_{-0.01}$	-122.42 ± 0.46	465.26	$-23.63^{+0.01}_{-0.01}$	$-2.92^{+0.004}_{-0.004}$	-244.21 ± 0.46	222.06

Tabla 5.1: Constricción de parámetros, $\log(E)$ y $-2\ln\mathcal{L}$ para cada galaxia. Los casos Ψ_{100} y Ψ_{210} tienen los mismos parámetros libres, $\log(m_a)$ [eV/c²] y $\log(\epsilon)$. Los errores están reportados con 1σ .

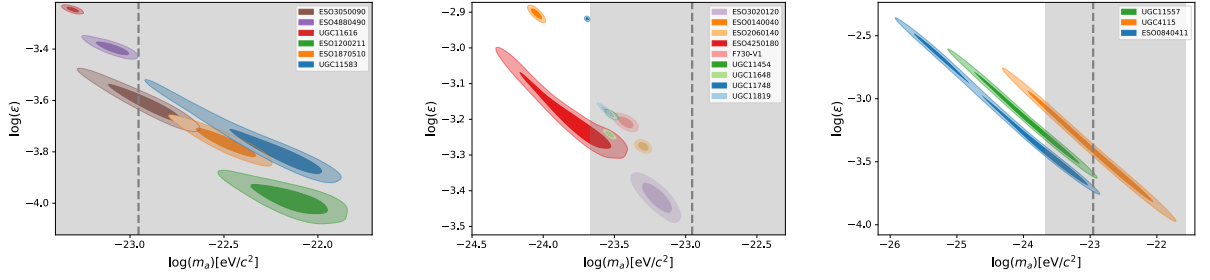


Figura 5.1: Distribuciones de posteriors en 2D, de los parámetros libres para el caso del estado base (ψ_{100}). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar $m_a = 1.11 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$ necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [39]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [11]. En la gráfica de la izquierda se encuentran las galaxias con $r < 10 \text{ kpc}$. La gráfica de en medio aquellas galaxias con $r > 10 \text{ kpc}$ y la gráfica de la derecha contiene a las galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen $r < 10 \text{ kpc}$ y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

5.2 superposición

En la Figura 5.3 se encuentran las curvas de rotación resultantes para una submuestra de la muestra de galaxias analizadas

$$5.2.1 \quad \ell = 0 + \ell = 1$$

$$5.2.2 \quad \ell = 0 + \ell = 1 + \ell = 2$$

5.3 Acoplados

La Tabla 5.2 contiene la constricción de parámetros, $\log(E)$ y $-2\ln\mathcal{L}$ para el caso de multi-estados (2.1.2). Los valores medios están reportados con una confianza de 1σ . Las gráficas de contornos de estos resultados se encuentran en la Figura 5.4, donde se ha seguido la clasificación mencionada anteriormente. Las galaxias siguen la misma tendencia que en los casos independientes, aquellas con $r < 10 \text{ kpc}$ tienden a tener masas más grandes mientras que las galaxias con $r > 10 \text{ kpc}$ tienden a preferir masas más ligeras.

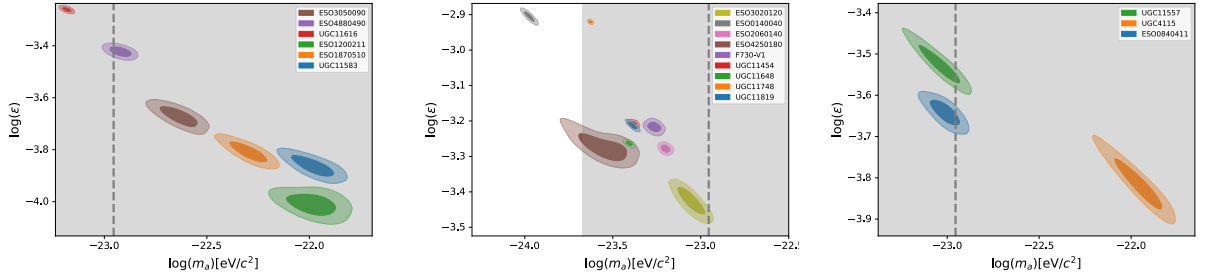


Figura 5.2: Distribuciones de posteriors en 2D, de los parámetros libres para el caso de un estado excitado (ψ_{210}). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar $m_a = 1.11 \times 10^{-23}$ eV/ c^2 necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [39]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [11]. En la gráfica de la izquierda se encuentran las galaxias con $r < 10$ kpc. La gráfica de en medio aquellas galaxias con $r > 10$ kpc y la gráfica de la derecha contiene a las galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen $r < 10$ kpc y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

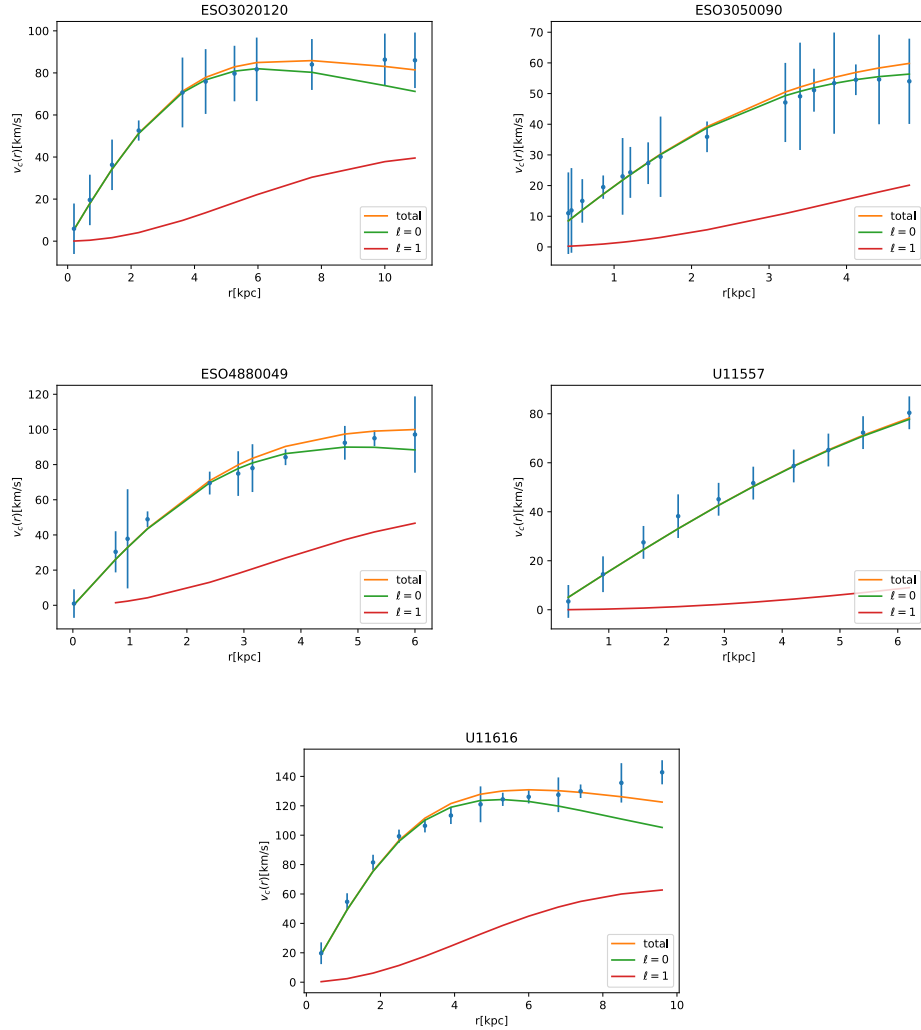


Figura 5.3: Curvas de rotación para la superposición de los estados ψ_{100} y ψ_{210} . La línea naranja representa la curva de rotación resultante, la línea verde corresponde al estado base (ψ_{100}) y la línea roja al primer estado excitado (ψ_{210}).

Para las galaxias con comportamiento lineal la correlación entre los parámetros m_a y ε parece desaparecer. Sin embargo, para todas las galaxias la correlación persiste entre m_a y la amplitud central del primer estado ($\psi_{100}(0)$), como se puede observar en la Figura 5.6. Para ver las diecisiete gráficas triangulares para este caso y los casos independientes, vea el repositorio¹. Las gráficas en la Figura 5.5 muestran los resultados de la estimación de parámetros reportados en la tabla 5.2 a 1σ y 2σ como muestra la barra gris. Podemos observar que la mayoría de las galaxias tienen un comportamiento interesante, referente a la contribución de cada estado a la curva de rotación resultante (línea azul oscuro), donde la línea azul que corresponde al estado base (ψ_{100}) muestra una contribución predominante, el estado excitado ψ_{210} representado por la línea verde contribuye menos que el segundo estado excitado ψ_{320} (línea naranja). Ambos estados contribuyen a radios mayores mientras que el estado base (ψ_{100}) permanece en el centro, sugiriendo que la contribución del estado ψ_{210} es cercana a cero. Se puede notar que la galaxia UGC11583, la cual tiene una extensión radial de $r = 1.5$ kpc siendo una de las más pequeñas, tiene una contribución distinta de cada estado, donde el estado ψ_{210} es el predominante y ψ_{320} tiene una amplitud más pequeña. A pesar de obtener una inferencia de parámetros aceptable para todas las galaxias en el conjunto de datos, de acuerdo a los contornos grises, se puede observar que las curvas de rotación para las galaxias UGC11648 y UGC11748, el caso de multi-estados no se ajusta muy bien a los datos. Es importante mencionar que a diferencia de los resultados del muestreo anidado para los casos independientes donde la convergencia es clara, en el caso de multi-estados, específicamente para las amplitudes centrales de cada estado la convergencia no es tan clara, particularmente en la amplitud central del estado base ($\psi_{100}(0)$) parece haber una frontera que corresponde al límite superior del prior, $\log \psi_{100}(0) = 0$. Los resultados del muestreo anidado usados para obtener las gráficas y las gráficas mismas pueden ser consultadas en el repositorio².

En la Tabla 5.3, los valores para el AIC, BIC, $\log(B_{12})$ y $-2\ln\mathcal{L}$ están reportados para cada caso. Los valores del AIC y BIC para los tres casos son similares con un decremento notable en el estado base. En cuanto al valor de $-2\ln\mathcal{L}$, se puede notar que para todas las galaxias el valor es mayor en el caso del estado excitado (ψ_{210}) y en el caso de multi-

1. https://github.com/atalianb/Triangle_plots_ell_boson_stars
2. https://github.com/atalianb/fgivenx_plots

estados es menor que en el estado base, excepto para la galaxia UGC11648, donde hay un pequeño incremento. Particularmente, el factor de Bayes de cada galaxia es representado en la Figura ??, donde las regiones sombreadas corresponden al valor de la escala de Jeffrey mencionada en la Tabla 4.1.

Las galaxias con asterisco (*) tienen un $\log(B_{12})$ menor para el caso de un solo estado excitado (ψ_{210}) y aquellas (UGC11748) con un mas (+) tienen un valor mayor de $\log(B_{12})$ para el caso de multi-estados, estas galaxias no aparecen en la figura pero pueden ser consultadas en la Tabla 5.3. La posición de los puntos azules indica que la mayoría de las galaxias prefieren el estado base en vez que el estado excitado ψ_{210} , excepto por las galaxias UGC11583 y ESO1200211 que parecen preferir ligeramente el estado excitado. Por otro lado, la posición de las estrellas verdes sugiere que los datos favorecen moderadamente el caso de multi-estados, a pesar de que el número de parámetros libres es mayor comparado con el estado base. Algunas galaxias son más notorias, UGC11616 con un $\log(B_{12}) = -12.40$ que apoya al caso del estado base, y las galaxias UGC11648 y UGC11454 y apoyan fuertemente al caso de multi-estados.

Galaxia	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(\psi_{100}(0))$	$\log(\psi_{210}(0))$	$\log(\psi_{320}(0))$	$\log(E)$	$-2\ln\mathcal{L}$
ESO3020120	$-23.16^{+0.14}_{-0.15}$	$-3.53^{+0.04}_{-0.05}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.78}$	$-3.41^{+3.37}_{-1.58}$	$-0.94^{+0.46}_{-1.06}$	-7.28 ± 0.22	0.41
ESO3050090	$-22.74^{+0.17}_{-0.56}$	$-3.64^{+0.51}_{-0.11}$	$-0.09^{+0.09}_{-0.79}$	$-1.59^{+1.57}_{-0.41}$	$-0.54^{+0.48}_{-1.46}$	-6.74 ± 0.20	0.55
ESO4880490	$-23.01^{+0.07}_{-0.53}$	$-3.46^{+1.02}_{-0.08}$	$0.07^{+0.10}_{-1.54}$	$-3.38^{+3.20}_{-1.61}$	$-0.53^{+0.49}_{-4.46}$	-9.82 ± 0.24	1.58
UGC11557	$-23.29^{+0.25}_{-2.35}$	$-3.34^{+1.34}_{-0.32}$	$-0.23^{+0.53}_{-1.78}$	$-1.65^{+1.95}_{-2.35}$	$0.78^{+1.05}_{-3.22}$	-7.69 ± 0.11	0.35
UGC11616	$-23.27^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.25^{+0.25}_{-0.02}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.51}$	$-1.73^{+1.19}_{-0.27}$	$-0.95^{+0.21}_{-1.05}$	-18.80 ± 0.27	15.47
UGC4115	$-22.15^{+0.28}_{-1.75}$	$-3.39^{+0.39}_{-0.52}$	$-0.78^{+0.95}_{-0.60}$	$-3.95^{+2.05}_{-4.10}$	$-1.82^{+4.18}_{-1.98}$	-7.13 ± 0.11	0.01
ESO0140040	$-23.98^{+0.04}_{-0.09}$	$-2.91^{+0.44}_{-0.02}$	$-0.03^{+0.03}_{-0.83}$	$-2.85^{+2.26}_{-0.15}$	$-0.83^{+0.23}_{-2.17}$	-16.73 ± 0.02	10.47
ESO0840411	$-23.20^{+0.19}_{-2.80}$	$-3.64^{+2.64}_{-0.13}$	$0.03^{+0.14}_{-3.21}$	$-3.65^{+3.81}_{-2.35}$	$-0.26^{+0.43}_{-5.74}$	-7.52 ± 0.11	0.21
ESO1200211	$-22.09^{+0.24}_{-1.42}$	$-3.92^{+1.84}_{-0.27}$	$-0.15^{+0.45}_{-3.78}$	$-2.96^{+3.25}_{-2.04}$	$-1.28^{+1.54}_{-3.72}$	-8.51 ± 0.16	1.21
ESO1870510	$-22.38^{+0.13}_{-0.44}$	$-3.86^{+0.83}_{-0.09}$	$0.12^{+0.18}_{-1.40}$	$-2.98^{+3.27}_{-1.02}$	$-0.34^{+0.53}_{-3.66}$	-8.75 ± 0.17	0.48
ESO2060140	$-23.26^{+0.07}_{-0.08}$	$-3.29^{+0.36}_{-0.02}$	$-0.001^{+0.001}_{-0.72}$	$-3.66^{+3.19}_{-2.34}$	$-1.02^{+0.38}_{-4.98}$	-22.04 ± 0.15	17.53
ESO4250180	$-23.69^{+0.28}_{-1.01}$	$-3.18^{+1.18}_{-0.13}$	$-0.12^{+0.12}_{-4.59}$	$-4.91^{+4.89}_{-1.09}$	$-0.90^{+0.69}_{-5.09}$	-8.90 ± 0.02	0.95
F730-V1	$-23.38^{+0.10}_{-0.09}$	$-3.22^{+0.37}_{-0.02}$	$-0.006^{+0.01}_{-0.70}$	$1.88^{+1.34}_{-3.12}$	$-0.96^{+0.27}_{-3.98}$	-22.56 ± 0.21	18.82
UGC11454	$-23.46^{+0.04}_{-0.04}$	$-3.20^{+0.32}_{-0.02}$	$-0.01^{+0.01}_{-0.63}$	$-1.69^{+1.00}_{-3.31}$	$-0.83^{+0.18}_{-1.24}$	-32.10 ± 0.23	35.19
UGC11583	$-22.02^{+0.18}_{-1.48}$	$-3.66^{+1.65}_{-0.26}$	$-0.55^{+0.55}_{-4.39}$	$-0.74^{+0.73}_{-4.26}$	$-2.26^{+2.21}_{-2.74}$	-7.93 ± 0.16	0.34
UGC11648	$-23.46^{+0.03}_{-0.04}$	$-3.26^{+0.27}_{-0.02}$	$-2.02^{+0.02}_{-0.54}$	$-1.07^{+0.14}_{-3.93}$	$-0.77^{+0.09}_{-1.06}$	-103.50 ± 0.23	176.88
UGC11748	$-23.71^{+0.19}_{-0.01}$	$-3.00^{+0.42}_{-0.07}$	$0.19^{+0.11}_{-3.96}$	$-5.48^{+5.39}_{-0.48}$	$-1.33^{+0.91}_{-4.66}$	-124.61 ± 74.57	224.84

Tabla 5.2: Constricción de parámetros, $\log(E)$ y $-2\ln\mathcal{L}$ para el caso de multi-estados para cada galaxia. Los parámetros libres son $\log m_a$ [eV/c^2], $\log \epsilon$, $\log \psi_{100}(0)$, $\log \psi_{210}(0)$ y $\log \psi_{320}(0)$. Los errores están reportados con 1σ .

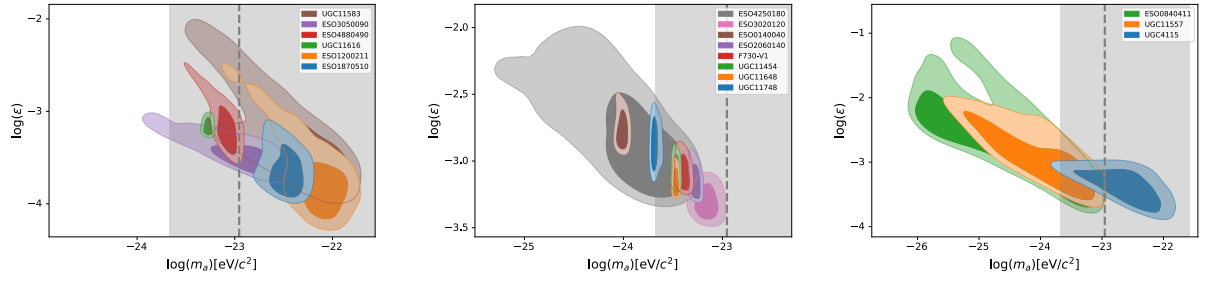


Figura 5.4: Distribuciones de posteriors en 2D, de los parámetros libres para el caso de multi-estados (ψ_{100} , ψ_{210} y ψ_{320}). La línea punteada vertical representa el valor de la masa del campo escalar $m_a = 1.11 \times 10^{-23}$ eV/c² necesaria para tener el corte en el espectro de potencias [39]. La banda gris representa las cotas a la masa encontradas en [11]. En la gráfica de la izquierda se encuentran las galaxias con $r < 10$ kpc. La gráfica de en medio aquellas galaxias con $r > 10$ kpc y la gráfica de la derecha contiene a las galaxias con comportamiento lineal, esas tres galaxias tienen $r < 10$ kpc y no están incluidas en la gráfica de la izquierda.

Galaxia	Ψ_{100}			Ψ_{210}				Multi-estados			
	AIC	BIC	$-2\ln\mathcal{L}$	AIC	BIC	$\log(B_{12})$	$-2\ln\mathcal{L}$	AIC	BIC	$\log(B_{12})$	$-2\ln\mathcal{L}$
ESO3020120	6.46	5.76	0.96	14.11	13.40	-3.94	8.61	22.41	12.40	0.65	0.41
ESO3050090	5.91	6.53	0.98	16.04	16.66	-6.39	11.11	16.64	14.50	0.31	0.55
ESO4880490	8.30	7.59	2.80	30.20	29.50	-11.98	24.70	23.75	13.74	-0.93	1.58
UGC11557	6.23	5.12	0.52	13.33	12.22	-4.95	7.61	25.33	11.84	-1.29	0.35
UGC11616	28.64	28.57	23.44	111.17	111.1	-56.26	105.97	35.21	29.46	-12.40	15.47
UGC4115	5.24	5.17	0.04	9.97	9.90	-4.22	4.77	18.58	12.84	-1.38	0.01
ESO0140040	19.76	17.52	13.36	63.67	61.43	-22.45	57.27	50.57	20.97	-1.11	10.47
ESO0840411	6.45	4.84	0.45	18.21	16.6	-6.99	12.21	30.21	11.19	-1.04	0.21
ESO1200211	6.65	6.84	1.56	9.6	9.78	-1.01	4.51	18.71	14.41	-0.94	1.21
ESO1870510	6.32	5.61	0.82	13.66	12.95	-3.90	8.16	22.48	12.47	-0.99	0.48
ESO2060140	28.36	28.77	23.36	94.96	95.37	-33.18	89.96	34.20	31.07	-0.73	17.53
ESO4250180	7.65	5.41	1.25	36.66	34.42	-2.70	30.26	40.95	11.35	-2.02	0.95
F730-V1	31.76	29.52	25.36	98.14	95.90	-33.18	91.74	59.14	29.53	-0.77	18.82
UGC11454	55.31	54.94	49.97	241.90	241.54	-92.83	236.57	55.19	47.61	3.35	35.19
UGC11583	6.21	5.10	0.50	7.91	6.79	-1.66	2.19	25.34	11.85	-1.36	0.34
UGC11648	211.1	212.65	206.47	614.55	616.2	-202.21	609.92	241.01	242.71	9.85	176.88
UGC11748	226.86	227.84	222.06	470.06	471.04	-121.79	465.26	199.08	198.53	18.92	224.84

Tabla 5.3: Resultados para la comparación entre los modelos Ψ_{100} , Ψ_{210} y multi-estados para cada galaxia.

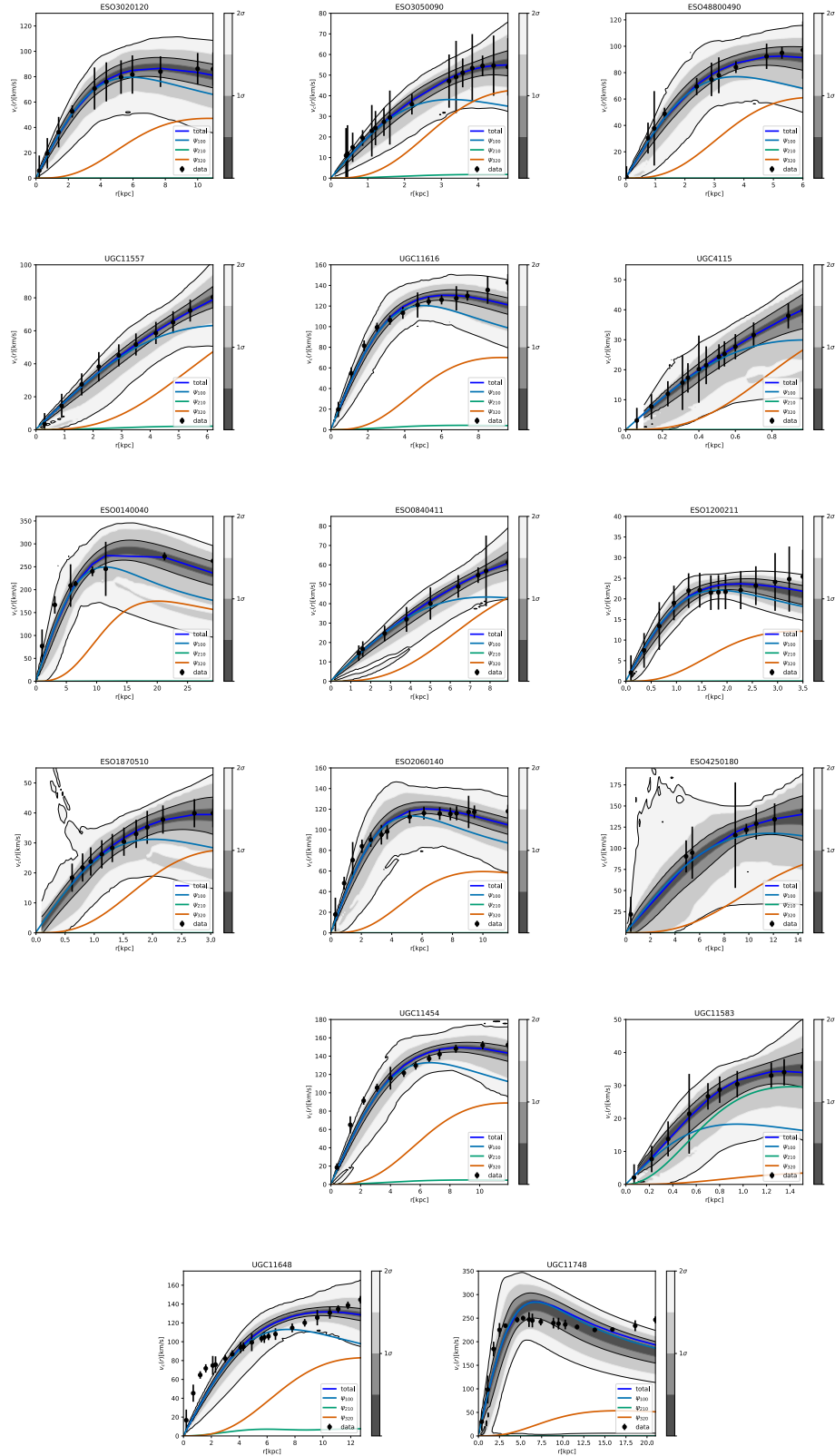


Figura 5.5: Curvas de rotación para cada galaxia con la estimación de parámetros obtenida del muestreo anidado. Los contornos indican la exactitud de la estimación a 1σ y 2σ como lo indica la barra gris. La línea azul oscura corresponde a la curva de rotación resultante, la línea azul clara indica la contribución del estado ψ_{100} , la verde indica la contribución del estado ψ_{210} y la línea naranja la contribución del estado ψ_{320} .

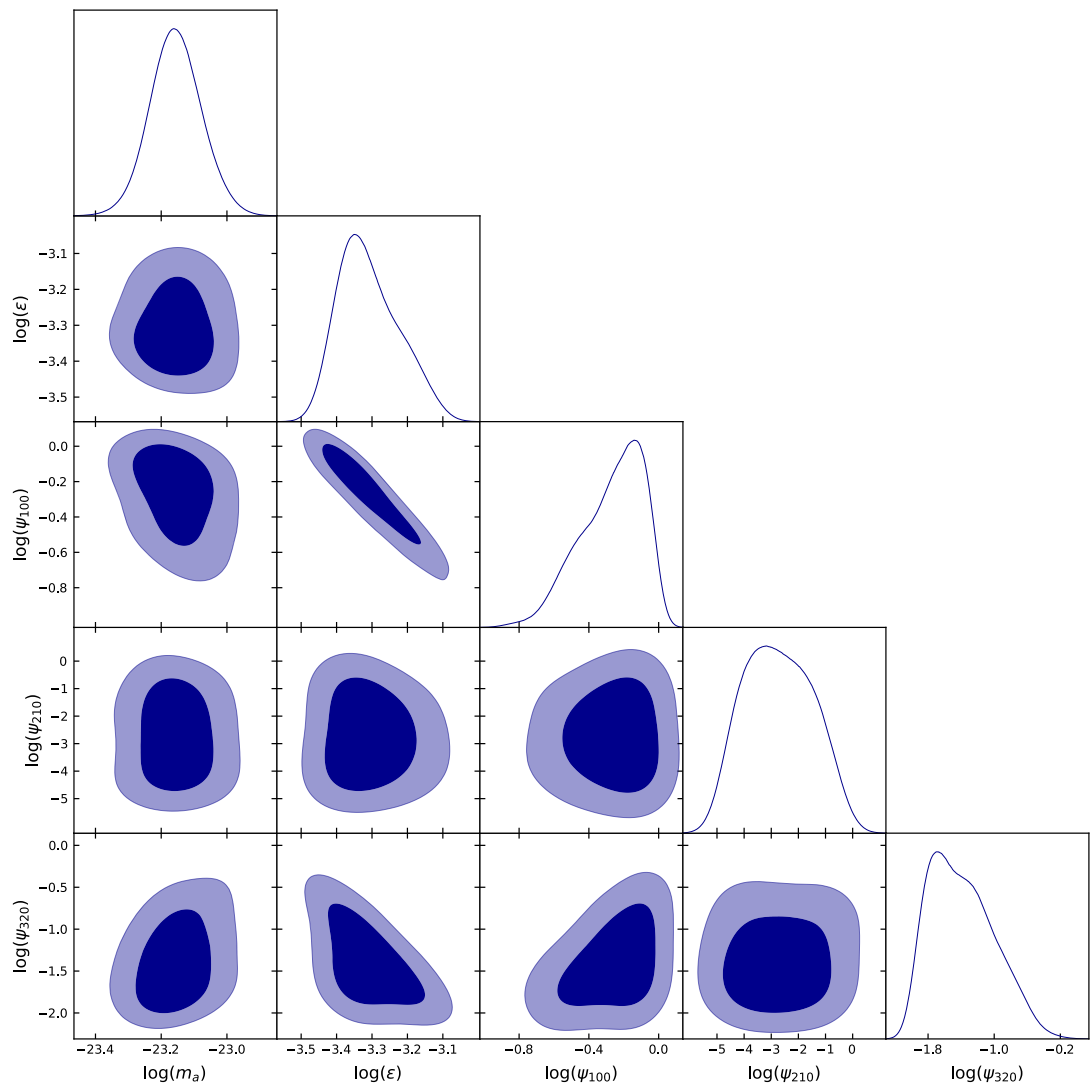


Figura 5.6: Gráfica triangular para la galaxia ESO3020120.

Capítulo 6

Conclusiones y Discusión

Este trabajo analiza la viabilidad de las ℓ -estrellas de bosones como componente de materia oscura en las curvas de rotación, utilizando herramientas de estadística bayesiana tales como el muestreo anidado (NS), el factor de Bayes, al igual que criterios de información para conocer el caso que es favorecido por los datos, siendo el caso de multi-estados. Se analizaron diecisiete galaxias de bajo brillo, tomando en cuenta tres casos principales, el estado base, el cual se toma como modelo base en el factor de Bayes; un solo estado excitado y los multi-estados. Donde todas las galaxias indican que su componente de materia oscura es preferible que esté hecha de multi-estados como la Figura ?? muestra.

Los contornos de las Figuras 5.5 nos confirman la información obtenida del factor de Bayes sobre los datos, obteniendo una inferencia de parámetros bastante buena para el caso de multi-estados. Hay algunas galaxias en la muestra como UGC11648 y UGC11748, que tienen un ajuste pobre y que claramente no siguen el comportamiento del modelo. Además, es importante notar que para la mayoría de las galaxias la mayor contribución para la curva de rotación total (línea azul oscura) es por parte del estado base (ψ_{100} , línea azul) y el segundo estado excitado (ψ_{210} , línea naranja), esto se puede deber a que estamos asumiendo simetría esférica, lo que implica que es importante realizar un análisis más exhaustivo en esta dirección, para ello se tendría que resolver el sistema de ecuaciones axial para multi-estados mencionado en [28]. Además, es importante mencionar que al añadir más estados y por lo tanto, incrementar el número de parámetros libres, la masa del campo a escalar tiende a volverse un poco más grande comparada con solamente el estado base, esto se puede observar en las primeras columnas de las tablas Furthermore,

it is important to mention that by adding more states and therefore, increasing the free parameters, the scalar field mass tends to become slightly bigger than the ground state, this could be seen in the first columns of the tables 5.1 y 5.2. Desafortunadamente, esto no satisface las constricciones de Lyman- α [62, 45].

A pesar de que el muestreo anidado converge para el caso de multi-estados, la convergencia no es tan clara como en el caso de los estados independientes, especialmente para la amplitud central del estado base ($\psi_{100}(0)$), la cual presenta un límite superior en $\log(\psi_{100}(0)) = 0$, esto puede ser interpretado como una necesidad para extender el valor del prior para este parámetro, sin embargo, en general es posible encontrar una forma de reparametrizarlo. Uno de los resultados más importantes de este trabajo se puede observar en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.4, donde la correlación entre los parámetros m_a y ε parece desaparecer para el caso de un estado excitado (ψ_{210}) y también para los multi-estados. Sin embargo, al observar los posteriors de los demás parámetros libres (Figuras 5.6, las cuales también pueden ser encontradas en el repositorio¹), se puede observar que la correlación entre parámetros sigue preservandose, en este caso con los parámetros m_a y la amplitud central del estado base, $\psi_{100}(0)$.

Estas correlaciones entre parámetros para los perfiles de densidad de materia oscura ha sido estudiada en [60], donde basándose en la relación de discrepancia de masa aceleración (MDAR por sus siglas en inglés) y en que cualquier halo de materia oscura tendrá una aceleración máxima, pudieron eliminar la correlación entre parámetros mediante una reparametrización, tendiendo un sólo parámetro libre. Otra forma en la que se podría eliminar la correlación entre parámetros para este caso, es una reparametrización con el número de partículas en cada estado, fijando el número de partículas total y añadiendo a las condiciones de frontera en el método de shooting las tasas del número de partículas en diferentes estados con respecto al estado base [58]. Sin embargo, al intentar lo anterior observamos que las funciones de distribución de los posteriors de las tasas del número de partículas, eran prácticamente planos. Por lo tanto, sería necesario realizar más análisis en esta dirección, tomando en cuenta el procedimiento seguido en [60].

Se ha mencionado en la literatura por [30] y sus referencias, que al añadir más estados al

1. https://github.com/atalianb/Triangle_plots_ell_boson_stars

modelo podría llevar a una mejor estimación de parámetros y también se convertiría más costo computacionalmente. Por lo que, tal vez al combinar las alternativas mencionadas anteriormente y añadiendo el término de auto-interacción en el potencial se obtendría un análisis más completo y a su vez, obtener una forma de restringir el número de estados.

Appendices

A Resultados de la χ^2 con los estados $\psi_{100}, \psi_{210}, \psi_{320}$ y ψ_{430}

En esta sección se muestran los resultados obtenidos con la mínima χ^2 con la expansión de los estados acoplados del sistema de ecuaciones SP (2.8b-2.8a) truncada en el cuarto término, es decir, estamos añadiendo el término y ecuaciones correspondientes al estado ψ_{430} , los parámetros libres son m_a , ϵ , $\psi_{100}(0)$, $\psi_{210}(0)$, $\psi_{320}(0)$ y $\psi_{430}(0)$.

Donde se han elegido las galaxias ESO3050090 y UGC11616 debido al valor obtenido del máximo likelihood en el caso de multi-estados, descrito anteriormente (i.e. un estado base y dos estados excitados) y su extensión radial de la galaxia.

La tabla 1 muestra la estimación de parámetros obtenida al minimizar la χ^2 para las galaxias ESO3050090 y UGC11616, la tabla 2 contiene los valores del AIC, BIC y χ^2 .

Galaxia	$\log(m_a)$	$\log(\epsilon)$	$\log(\psi_{100}(0))$	$\log(\psi_{210}(0))$	$\log(\psi_{320}(0))$	$\log(\psi_{430}(0))$
ESO3050090	-22.66	-3.71	-6.30×10^{-3}	-1.46	-1.40	-0.60
UGC11616	-23.24	-3.40	0.27	-2.74	-1.30	-0.59

Tabla 1: Estimación de parámetros para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 con la χ^2 para el caso de multi-estados con tres estados excitados. Los parámetros libres son $\log(m_a)$ [eV/c²], $\log(\epsilon)$, $\log(\psi_{100}(0))$, $\log(\psi_{210}(0))$, $\log(\psi_{320}(0))$ y $\log(\psi_{430}(0))$.

Galaxia	AIC	BIC	χ^2
ESO3050090	21.64	16.95	0.31
UGC11616	36.79	26.18	10.79

Tabla 2: Resultados para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 para el caso de multi-estados con tres estados excitados. AIC, BIC y χ^2 .

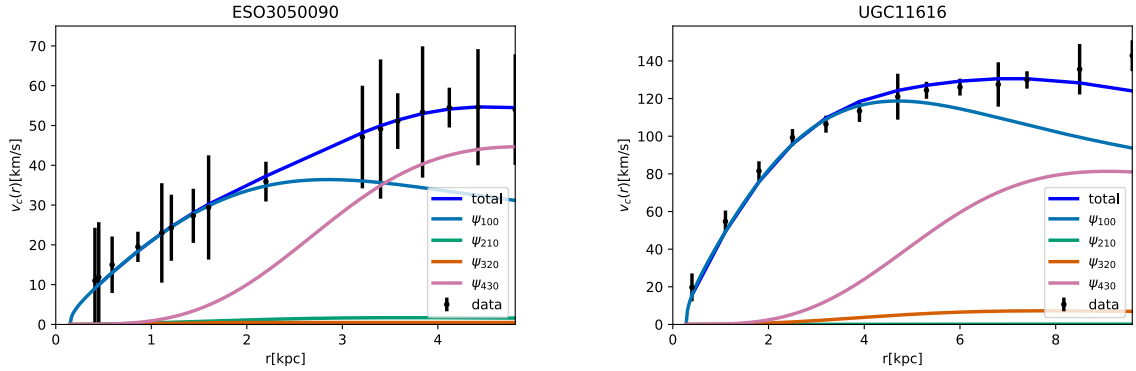


Figura 1: Curvas de rotación para las galaxias ESO3050090 y UGC11616 con la estimación de parámetros obtenidos con la χ^2 . La línea azul oscura corresponde a la curva rotacional resultante, la línea azul indica la contribución del estado ψ_{100} , la línea verde a la contribución del estado ψ_{210} , la línea naranja a la contribución del estado ψ_{320} y la línea rosa a la contribución del estado ψ_{430} .

Bibliografía

- [1] En: 378.3 (2007), págs. 852-872. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11593.x. arXiv: astro-ph/0605302. url: <https://doi.org/10.1111%2Fj.1365-2966.2007.11593.x>.
- [2] Hirotogu Akaike. «Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle». En: New York: Springer Science+Business Media, 1998. doi: 10.1007/978-1-4612-1694-0_15.
- [3] Miguel Alcubierre et al. « ℓ -boson stars». En: Classical and Quantum Gravity 35.19 (2018), 19LT01. issn: 1361-6382. doi: 10.1088/1361-6382/aadcb6. url: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aadcb6>.
- [4] Miguel Alcubierre et al. «Dynamical evolutions of $\{e\}$ -boson stars in spherical symmetry». En: Classical and Quantum Gravity 36.21, 215013 (nov. de 2019), pág. 215013. doi: 10.1088/1361-6382/ab4726. arXiv: 1906.08959 [gr-qc].
- [5] Miguel Alcubierre et al. «On the linear stability of ℓ -boson stars with respect to radial perturbations». En: Classical and Quantum Gravity 38.17, 174001 (sep. de 2021), pág. 174001. doi: 10.1088/1361-6382/ac0160. arXiv: 2103.15012 [gr-qc].
- [6] Jayashree Balakrishna, Edward Seidel y Wai-Mo Suen. «Dynamical evolution of boson stars. II. Excited states and self-interacting fields». En: 58.10, 104004 (nov. de 1998), pág. 104004. doi: 10.1103/PhysRevD.58.104004. arXiv: gr-qc/9712064 [gr-qc].
- [7] Bruce A. Bassett y Renée Hlozek. Baryon Acoustic Oscillations. 2009. arXiv: 0910.5224 [astro-ph.CO].

- [8] Argelia Bernal Bautista. «Estudio Dinámico de Campos Escalares Autogravitantes». Tesis doct. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, 2007. url: http://pelusa.fis.cinvestav.mx/tmatos/CV/3_RecursosH/Dr/Argelia_Bernal.pdf.
- [9] A. Bernal et al. «Multistate boson stars». En: Phys. Rev. D 81 (4 2010). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.044031>, pág. 044031. doi: 10.1103/PhysRevD.81.044031. url: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.044031>.
- [10] Argelia Bernal y C. Soto-Campos. «Modeling Galactic Rotation Curves with ultra-light scalar field dark matter». En: Journal of Physics Conference Series. Vol. 640. Journal of Physics Conference Series. DOI: 10.1088/1742-6596/640/1/012056. Sep. de 2015, 012056, pág. 012056. doi: 10.1088/1742-6596/640/1/012056.
- [11] T. Bernal et al. «Rotation curves of high-resolution LSB and SPARC galaxies with fuzzy and multistate (ultralight boson) scalar field dark matter». En: 475.2 (abr. de 2018), págs. 1447-1468. doi: 10.1093/mnras/stx3208. arXiv: 1701.00912 [astro-ph.GA].
- [12] Gianfranco Bertone y Dan Hooper. «History of dark matter». En: Reviews of Modern Physics 90.4, 045002 (oct. de 2018), pág. 045002. doi: 10.1103/RevModPhys.90.045002. arXiv: 1605.04909 [astro-ph.CO].
- [13] C. G. Böhrer y T. Harko. «Can dark matter be a Bose Einstein condensate?» En: 2007.6, 025 (jun. de 2007), pág. 025. doi: 10.1088/1475-7516/2007/06/025. arXiv: 0705.4158 [astro-ph].
- [14] G. Bothun, C. Impey y S. McGaugh. «Low-Surface-Brightness Galaxies: Hidden Galaxies Revealed». En: 109 (jul. de 1997), págs. 745-758. doi: 10.1086/133941.
- [15] James S. Bullock y Michael Boylan-Kolchin. «Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm». En: 55.1 (ago. de 2017), págs. 343-387. doi: 10.1146/annurev-astro-091916-055313. arXiv: 1707.04256 [astro-ph.CO].
- [16] W. J. G. de Blok. «The Core-Cusp Problem». En: Advances in Astronomy 2010, 789293 (ene. de 2010), pág. 789293. doi: 10.1155/2010/789293. arXiv: 0910.3538 [astro-ph.CO].
- [17] W. J. G. de Blok, Stacy S. McGaugh y Vera C. Rubin. «High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. II. Mass Models». En: 122.5 (nov. de 2001), págs. 2396-2427. doi: 10.1086/323450.

- [18] Daniel J. Eisenstein, Hee-Jong Seo y Martin White. «On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter». En: *The Astrophysical Journal* 664.2 (2007), págs. 660-674. doi: 10.1086/518755. url: <https://doi.org/10.1086/518755>.
- [19] Daniel J. Eisenstein et al. «Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies». En: 633.2 (nov. de 2005), págs. 560-574. doi: 10.1086/466512. arXiv: astro-ph/0501171 [astro-ph].
- [20] Lizbeth M. Fernández-Hernández, Mario A. Rodríguez-Meza y Tonatiuh Matos. «Comparison between two scalar field models using rotation curves of spiral galaxies». En: *Journal of Physics Conference Series*. Vol. 1010. *Journal of Physics Conference Series*. Abr. de 2018, 012005, pág. 012005. doi: 10.1088/1742-6596/1010/1/012005. arXiv: 1708.06681 [astro-ph.GA].
- [21] F. Feroz, M. P. Hobson y M. Bridges. «MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics». En: 398.4 (oct. de 2009), págs. 1601-1614. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.14548.x. arXiv: 0809.3437 [astro-ph].
- [22] Alma X. González-Morales et al. «Unbiased constraints on ultralight axion mass from dwarf spheroidal galaxies». En: 472.2 (dic. de 2017), págs. 1346-1360. doi: 10.1093/mnras/stx1941. arXiv: 1609.05856 [astro-ph.CO].
- [23] F. Guzmán y L. Ureña-López. «Newtonian collapse of scalar field dark matter». En: 68.2, 024023 (jul. de 2003), pág. 024023. doi: 10.1103/PhysRevD.68.024023. arXiv: astro-ph/0303440 [astro-ph].
- [24] F. S. Guzmán y F. D. Lora-Clavijo. «Rotation curves of ultralight BEC dark matter halos with rotation». En: *General Relativity and Gravitation* 47, 21 (mar. de 2015), pág. 21. doi: 10.1007/s10714-015-1865-9. arXiv: 1501.06553 [astro-ph.GA].
- [25] F. Siddhartha Guzmán y L. Arturo Ureña-López. «Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field». En: 69.12, 124033 (jun. de 2004), pág. 124033. doi: 10.1103/PhysRevD.69.124033. arXiv: gr-qc/0404014 [gr-qc].
- [26] F. Siddhartha Guzmán y L. Arturo Ureña-López. «Gravitational Cooling of Self-gravitating Bose Condensates». En: 645.2 (jul. de 2006), págs. 814-819. doi: 10.1086/504508. arXiv: astro-ph/0603613 [astro-ph].

- [27] Francisco S. Guzmán. «Stability of multistate configurations of fuzzy dark matter». En: *Astronomische Nachrichten* 342.1-2 (2021), págs. 398-403. doi: <https://doi.org/10.1002/asna.202113941>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/asna.202113941>. url: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/asna.202113941>.
- [28] F. S. Guzmán y L. Arturo Ureña-López. «Gravitational atoms: General framework for the construction of multistate axially symmetric solutions of the Schrödinger-Poisson system». En: *Physical Review D* 101.8 (2020). issn: 2470-0029. doi: 10.1103/physrevd.101.081302. url: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.081302>.
- [29] Will Handley. «fgivenx: Functional Posterior Plotter». En: *The Journal of Open Source Software* 3.28 (2018). doi: 10.21105/joss.00849. url: <http://dx.doi.org/10.21105/joss.00849>.
- [30] A. Hernández-Almada y Miguel A. García-Aspeitia. «Multistate scalar field dark matter and its correlation with galactic properties». En: *International Journal of Modern Physics D* 27.3, 1850031 (ene. de 2018), pág. 1850031. doi: 10.1142/S0218271818500311. arXiv: 1711.01388 [astro-ph.GA].
- [31] H. Jeffreys. *Theory of Probability*. Third. Oxford, England: Oxford, 1961.
- [32] David J. Kaup. «Klein-Gordon Geon». En: *Phys. Rev.* 172 (5 1968). DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.172.1331>. págs. 1331-1342. doi: 10.1103/PhysRev.172.1331. url: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.172.1331>.
- [33] Stacy Y. Kim, Annika H. G. Peter y Jonathan R. Hargis. «Missing Satellites Problem: Completeness Corrections to the Number of Satellite Galaxies in the Milky Way are Consistent with Cold Dark Matter Predictions». En: 121.21, 211302 (nov. de 2018), pág. 211302. doi: 10.1103/PhysRevLett.121.211302. arXiv: 1711.06267 [astro-ph.CO].
- [34] Sergey Koposov et al. *joshspeagle/dynesty: v1.2.3*. Ver. v1.2.3. Jun. de 2022. doi: 10.5281/zenodo.6609296. url: <https://doi.org/10.5281/zenodo.6609296>.
- [35] T. Lin. «Dark matter models and direct detection». En: *TASI 2018 - Theory in an Era of Data*. Jun. de 2018, 9, pág. 9. doi: 10.22323/1.333.0009.

- [36] V. Lora et al. «On the mass of ultra-light bosonic dark matter from galactic dynamics». En: 2012.2, 011 (feb. de 2012). arXiv:1110.2684, pág. 011. doi: 10.1088/1475-7516/2012/02/011. arXiv: 1110.2684 [astro-ph.GA].
- [37] L. A. Martínez-Medina, V. H. Robles y T. Matos. «Dwarf galaxies in multistate scalar field dark matter halos». En: 91.2, 023519 (ene. de 2015), pág. 023519. doi: 10.1103/PhysRevD.91.023519. arXiv: 1410.4163 [astro-ph.GA].
- [38] Tonatiuh Matos y L. Arturo Ureña-López. «Flat rotation curves in scalar field galaxy halos». En: General Relativity and Gravitation 39.8 (ago. de 2007), págs. 1279-1286. doi: 10.1007/s10714-007-0470-y.
- [39] Tonatiuh Matos y L. Arturo Ureña-López. «Further analysis of a cosmological model with quintessence and scalar dark matter». En: Physical Review D 63.6 (2001). doi: 10.1103/physrevd.63.063506. url: <https://doi.org/10.1103/physrevd.63.063506>.
- [40] Stacy S. McGaugh, Vera C. Rubin y W. J. G. de Blok. «High-Resolution Rotation Curves of Low Surface Brightness Galaxies. I. Data». En: 122.5 (nov. de 2001), págs. 2381-2395. doi: 10.1086/323448. arXiv: astro-ph/0107326 [astro-ph].
- [41] and N. Aghanim et al. «iPlanck/i2018 results». En: Astronomy & Astrophysics 641 (2020), A6. doi: 10.1051/0004-6361/201833910. url: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- [42] ESA/Hubble NASA. Hubble captures a “lucky” galaxy alignment. url: <https://esahubble.org/images/potw1151a/>.
- [43] NASA/JPL-Caltech/ESA. Cosmic Microwave Background (CMB). url: https://lambda.gsfc.nasa.gov/education/graphic_history/microwaves.html.
- [44] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk y Simon D. M. White. «The Structure of Cold Dark Matter Halos». En: 462 (mayo de 1996), pág. 563. doi: 10.1086/177173. arXiv: astro-ph/9508025 [astro-ph].
- [45] Matteo Nori et al. «Lyman α forest and non-linear structure characterization in Fuzzy Dark Matter cosmologies». En: 482.3 (ene. de 2019), págs. 3227-3243. doi: 10.1093/mnras/sty2888. arXiv: 1809.09619 [astro-ph.CO].
- [46] Luis E. Padilla et al. «Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics». En: Universe 7.7 (2021). arXiv: 1903.11127, pág. 213. doi: 10.3390/universe7070213. arXiv: 1903.11127 [astro-ph.CO].

- [47] Isha Pahwa y Kanak Saha. «Structural properties of faint low-surface-brightness galaxies». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 478.4 (2018). arXiv:1805.00499, págs. 4657-4668. doi: 10.1093/mnras/sty1139. arXiv: 1805.00499 [astro-ph.GA]. url: <https://doi.org/10.1093/mnras/sty1139>.
- [48] Alvaro Pozo et al. Detection of a universal core-halo transition in dwarf galaxies as predicted by Bose-Einstein dark matter. 2021. arXiv: 2010.10337 [astro-ph.GA].
- [49] Victor H. Robles y T. Matos. «Exact Solution to Finite Temperature SFDM: Natural Cores without Feedback». En: 763.1, 19 (ene. de 2013), pág. 19. doi: 10.1088/0004-637X/763/1/19. arXiv: 1207.5858 [astro-ph.CO].
- [50] Remo Ruffini y Silvano Bonazzola. «Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State». En: *Phys. Rev.* 187 (5 1969). DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.187.1767>, págs. 1767-1783. doi: 10.1103/PhysRev.187.1767. url: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.187.1767>.
- [51] Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh y Tom Broadhurst. «Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave». En: *Nature Physics* 10.7 (jul. de 2014), págs. 496-499. doi: 10.1038/nphys2996. arXiv: 1406.6586 [astro-ph.GA].
- [52] Gideon Schwarz. «Estimating the Dimension of a Model». En: *Annals of Statistics* 6 (1978), págs. 461-464.
- [53] Edward Seidel y Wai-Mo Suen. «Dynamical evolution of boson stars: Perturbing the ground state». En: *Phys. Rev. D* 42 (2 1990), págs. 384-403. doi: 10.1103/PhysRevD.42.384. url: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.384>.
- [54] John Skilling. «Nested Sampling». En: *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering: 24th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*. Ed. por Rainer Fischer, Roland Preuss y Udo Von Toussaint. Vol. 735. American Institute of Physics Conference Series. Nov. de 2004, págs. 395-405. doi: 10.1063/1.1835238.
- [55] Nariaki Sugiura. «Further analysis of the data by Akaike's information criterion and the finite corrections». En: *Communications in Statistics - Theory and Methods* 7.1 (1978), págs. 13-26. doi: 10.1080/03610927808827599. eprint: <https://doi.org/10.1080/03610927808827599>. url: <https://doi.org/10.1080/03610927808827599>.

- [56] L. O. Téllez-Tovar, Tonatiuh Matos y J. Alberto Vázquez. «Cosmological constraints on the multiscalar field dark matter model». En: 106.12, 123501 (dic. de 2022), pág. 123501. doi: 10.1103/PhysRevD.106.123501. arXiv: 2112.09337 [astro-ph.CO].
- [57] Roberto Trotta. «Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology». En: Contemporary Physics 49.2 (mar. de 2008), págs. 71-104. doi: 10.1080/00107510802066753. arXiv: 0803.4089 [astro-ph].
- [58] L. Arturo Ureña-López y Argelia Bernal. «Bosonic gas as a galactic dark matter halo». En: 82.12, 123535 (dic. de 2010), pág. 123535. doi: 10.1103/PhysRevD.82.123535. arXiv: 1008.1231 [gr-qc].
- [59] L. Arturo Ureña-López y Alma X. Gonzalez-Morales. «Towards accurate cosmological predictions for rapidly oscillating scalar fields as dark matter». En: 2016.7, 048 (jul. de 2016). arXiv:1511.08195, pág. 048. doi: 10.1088/1475-7516/2016/07/048. arXiv: 1511.08195 [astro-ph.CO].
- [60] L. Arturo Ureña-López, Victor H. Robles y T. Matos. «Mass discrepancy-acceleration relation: A universal maximum dark matter acceleration and implications for the ultralight scalar dark matter model». En: 96.4, 043005 (ago. de 2017), pág. 043005. doi: 10.1103/PhysRevD.96.043005. arXiv: 1702.05103 [astro-ph.CO].
- [61] Frank C. van den Bosch y Rob A. Swaters. «Dwarf galaxy rotation curves and the core problem of dark matter haloes». En: 325.3 (ago. de 2001), págs. 1017-1038. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04456.x. arXiv: astro-ph/0006048 [astro-ph].
- [62] , familyi=v., given=Vid, giveni=V., „, et al. «First Constraints on Fuzzy Dark Matter from Lyman- α Forest Data and Hydrodynamical Simulations». En: Phys. Rev. Lett. 119 (3 2017), pág. 031302. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.031302. url: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.031302>.
- [63] Steven Weinberg. Gravitation and cosmology. en. Nashville, TN: John Wiley & Sons, ene. de 1972.