



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRICCIONES PARAMÉTRICAS DE LA ECUACIÓN  
DE ESTADO DE LA ENERGÍA OSCURA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN FÍSICA

P R E S E N T A :

DAVID ASAEL VALDEZ ÁVILA

TUTOR

DR. JOSÉ ALBERTO VÁZQUEZ GONZÁLEZ



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2023



**CONSTANCIA DE  
PRESENTACIÓN DE  
EXAMEN PROFESIONAL**

En la Universidad Nacional Autónoma de México, en la SALA DE EXÁMENES PROFESIONALES de la FACULTAD DE CIENCIAS siendo las 11:00 horas del día 26 de octubre de 2023, el alumno:

**DAVID ASAEL VALDEZ AVILA**

de nacionalidad MEXICANA con número de cuenta 305174172 se presentó con el fin de sustentar el examen oral para obtener el título de:

**FÍSICO**

en su modalidad de titulación por TESIS con el trabajo titulado: Constricciones paramétricas de la ecuación de estado de la energía oscura. El alumno cursó sus estudios en el periodo 2012-1 a 2022-2 habiendo obtenido un promedio de 8.27 y cumpliendo con los requisitos académicos señalados en el plan de estudios 1081 aprobado por el H. Consejo Universitario.

El Jurado designado por el Comité Académico integrado por:

PRESIDENTE: DRA. IRENE ANTONIA CRUZ GONZALEZ ESPINOSA  
SECRETARIO: DR. JOSE ALBERTO VAZQUEZ GONZALEZ  
VOCAL: M. EN C. HECTOR JESUS DIAZ JIMENEZ  
SUPLENTE: DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR  
SUPLENTE: DR. JUAN MANUEL EUGENIO RAMIREZ DE ARELLANO NIÑO RINCON

Tras el interrogatorio y deliberación resolvió otorgarle la calificación de:

**Aprobado**

Procediendo a informarle el resultado, tomarle la Protesta Universitaria y dar por concluido el acto.



**PRESIDENTE DEL JURADO**



**SECRETARIO DEL JURADO**



**VOCAL DEL JURADO**

El Titular de la entidad académica hace constar que las firmas electrónicas que anteceden son válidas y corresponden a los miembros del jurado.



**"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR  
DIRECTOR DE LA ENTIDAD ACADÉMICA**





FACULTAD DE  
CIENCIAS

FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
COORDINACIÓN DE LA LICENCIATURA DE FÍSICA

Asunto: Registro de Director y Tema de tesis

**Dr. José Alberto Vázquez González**

**Instituto de Ciencias Físicas**

**Universidad Nacional Autónoma de México**

**Presente:**

Me permito comunicar a usted, que el Comité Académico de la Licenciatura de Física de esta Facultad ha dado su aprobación para que el alumno, “David Asael Valdez Ávila”, con número de cuenta “305174172”, de la Licenciatura de Física realice el trabajo de Tesis bajo su dirección, con el título: “Cosmología observacional y estadística de energía oscura”.

Sin más por el momento, me despido enviándole un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria, CD.MX., a 29 septiembre del 2021  
COORDINADOR DE LA LICENCIATURA EN FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS

DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
LIC. FÍSICA

**1. Datos del alumno**

Valdez

Ávila

David Asael

5513908692

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Licenciatura en Física

305174172

**2. Datos del tutor**

Dr.

José Alberto

Vázquez

González

**3. Datos del sinodal 1**

Dra.

Irene Antonia

Cruz-González

Espinosa

**4. Datos del sinodal 2**

M. en C.

Héctor Jesús

Díaz

Jiménez

**5. Datos del sinodal 3**

Dr.

Juan Manuel Eugenio

Ramírez de Arellano

Niño Rincón

**6. Datos del sinodal 4**

Dr.

Juan Carlos

Hidalgo

Cuéllar

**7. Datos del trabajo escrito**

Constricciones paramétricas de la ecuación de estado de la energía oscura

153p

2023



# Agradecimientos

A mi asesor el Dr. José Alberto Vázquez González por darme la oportunidad de trabajar en su equipo, por su guía, por su paciencia conmigo, por su ayuda, por las lecciones y el conocimiento compartidos, y por la valiosa labor que ha hecho durante años y continúa haciendo hasta ahora en ayudar a otros a encontrar el camino. Por todo, muchas gracias.

Al Dr. Luis Osvaldo Téllez Tovar quien figuró como mi segundo asesor de forma no oficial. Su ayuda fue muy importante para realizar esta tesis.

A los miembros del jurado: Dra. Irene Cruz González Espinosa, M. en C. Héctor Jesús Díaz Jiménez, Dr. Juan Manuel Eugenio Ramírez de Arellano Niño Rincón, Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuéllar por su apoyo al aceptar ser parte de este trabajo, por el tiempo y esfuerzo dedicados a revisar mi tesis y por sus valiosas aportaciones.

A las personas que conocí, y que me acompañaron a lo largo o momentáneamente en el camino.

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad Nacional Autónoma de México por dejarme ser parte de ellas.

Y al FOSEC SEP-CONACYT Investigación Básica A1-S-21925, Ciencias de Frontera, CONACYT - PRONACES/304001/202, y al UNAM - DGAPA - PAPIIT IA104221 por el apoyo que me brindaron para poder realizar esta tesis.

A todos, infinitas gracias.

*Las personas tienen estrellas que no son las mismas,  
para algunos; para los que viajan, las estrellas son guías.  
Para otros, no son más que pequeñas luces. Para algunos otros;  
para los sabios, las estrellas son enigmas...*

***Antoine de Saint-Exupéry***



# Resumen

Con la finalidad de explicar la expansión acelerada del universo, se han propuesto varios modelos teóricos de energía oscura. El más simple y aceptado de ellos es una constante cosmológica  $\Lambda$  con densidad de energía oscura y ecuación de estado constantes, esta última con un valor de  $w = \frac{p}{\rho} = -1$ ; este es el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. El fin general de este trabajo es explorar alternativas para describir a la energía oscura más allá del modelo estándar. La vía que tomamos para ello, es partir de los llamados “modelos  $w$ CDM” como base para el desarrollo de nuestra exploración. Estos modelos se centran en la suposición del carácter dinámico de la ecuación de estado de la energía oscura, considerándola como una función del tiempo y no como una constante; es decir, que posee una evolución temporal. Actualmente existen varios modelos  $w$ CDM propuestos. La expectativa general es ampliar la variedad de modelos existentes, por ende, en este trabajo se propone un modelo  $w$ CDM para la descripción de la ecuación de estado de la energía oscura, el cual se basa en el desarrollo en serie de polinomios de Bessel. Consideramos además cuatro modelos  $w$ CDM que ya han sido propuestos: Chevallier-Polarski-Linder (CPL), Huterer-Turner (HT), Efstathiou, y el último de ellos es el modelo  $w$ CDM más simple que puede haber, el cual parte del modelo  $\Lambda$ CDM con una pequeña variación, tal que se toma su misma relación presión-densidad  $w = \frac{p}{\rho}$  solo que esta vez se considera a  $w$  como un parámetro libre de tomar cualquier valor que resulte adecuado para el modelo. Todos estos son modelos paramétricos; es decir, que se caracterizan mediante el uso de uno o más parámetros libres.

Como forma de evaluar la cualidad que poseen los modelos de describir los datos observacionales partimos de criterios de selección basados en estadística Bayesiana y

métodos Monte Carlo vía cadenas de Markov. De forma particular; mediante estos métodos buscamos obtener constricciones de los parámetros cosmológicos relativos a cada modelo. Así mismo, a partir de las constricciones, determinar el valor  $\chi^2$  de todos los modelos. Se tiene que el modelo que mejor describe los datos observacionales es el modelo que posee un valor de  $\chi^2$  menor.

El análisis y la estimación del valor de  $\chi^2$  de cada uno de los modelos se realizó bajo el marco de un universo con geometría plana; es decir, suponiendo un parámetro de curvatura igual a cero ( $\Omega_k = 0$ ) y con contribución de radiación despreciable. Se usaron datos de observaciones desde Cronómetros Cósmicos (HD), Oscilaciones Acústicas Bariónicas (BAO), y Supernovas tipo Ia (SNIa).

En total se obtuvieron constricciones y valores de  $\chi^2$  de seis modelos diferentes: De los cuatro modelos  $w$ CDM existentes antes mencionados, de la propuesta de modelo de polinomios de Bessel, y del modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. Se encontró que el modelo con menor valor de  $\chi^2$  y por tanto el que mejor describe a los datos observacionales usados, es la propuesta de modelo de Polinomios de Bessel con valor de  $\chi^2 = 29.736$ . Así mismo, de los modelos analizados, el que menos describe a los datos observacionales es el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM, con un valor de  $\chi^2 = 30.640$  referente a los datos observacionales que se usaron.

Además de evaluar los modelos, los criterios estadísticos nos premiaran estimar o desestimar la propuesta de modelo que se plantea. Se espera tener información suficiente para valorar si la propuesta de ecuación de estado puede ser un referente para futuros modelos  $w$ CDM que se basen en el uso de funciones de Bessel u otras funciones especiales.

Este trabajo se organiza de la siguiente forma: En el Capítulo 1 se narra brevemente la historia de la cosmología moderna desde sus comienzos: las ecuaciones de campo de Einstein, el descubrimiento de la expansión del universo; hasta el descubrimiento del CMB. El segundo capítulo contiene las bases teóricas sobre las que se fundamenta este trabajo: principio cosmológico, métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker FLRW, ecuaciones de continuidad y de estado, y algunos de los parámetros cosmológicos que se usan para describir el universo. En el Capítulo 3 se

desarrolla el concepto de energía oscura como la responsable de la expansión acelerada del universo. Se aborda la interpretación de la energía oscura como una constante cosmológica (la cual fue la primera interpretación que se le dio), y se analiza el modelo  $\Lambda$ CDM. Por último se proporcionan algunas evidencias que respaldan la existencia de la energía oscura. En el Capítulo 4 se plantean algunos de los problemas teóricos y observacionales que presenta la constante cosmológica y el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM, además algunas de sus alternativas teóricas, y se hace énfasis en los modelos  $w$ CDM que tratamos en este trabajo. Por último se presenta la propuesta de modelo de polinomios de Bessel. En el Capítulo 5 se incluye la teoría y los métodos sobre los cuales se obtienen e interpretan los resultados: Estadística Bayesiana, métodos Monte Carlo, cadenas de Markov, y algoritmo Metropolis-Hastings. En este capítulo también se muestran los resultados obtenidos. Por último, en el Capítulo 6 tenemos las conclusiones.

# Abstract

In order to explain the accelerating expansion of the universe, several theoretical models of dark energy have been proposed. The simplest and most accepted of them is a cosmological constant  $\Lambda$  with constant dark energy density and equation of state, the latter with a value of  $w = \frac{p}{\rho} = -1$ ; this is the standard cosmological model  $\Lambda$ CDM. The general purpose of this work is to explore alternatives to describe dark energy beyond the standard model. The path we take for this is to start from the so-called “ $w$ CDM models” as a basis for the development of our exploration. These models are centered on the assumption of the dynamic nature of the dark energy equation of state, considering it as a time function and not as a constant; that is, it has a temporal evolution. There are currently several proposed  $w$ CDM models. The general expectation is to expand the variety of existing models, therefore, in this work a  $w$ CDM model is proposed for the description of the dark energy equation of state, which is based on the series development of Bessel polynomials. We also consider four  $w$ CDM models that have already been proposed: Chevallier- Polarski- Linder (CPL), Huterer- Turner (HT), Efstathiou, and the last one is the simplest  $w$ CDM model there can be, which starts from the  $\Lambda$ CDM model with a small variation, such that the same pressure-density relationship  $w = \frac{p}{\rho}$  is taken, only this time  $w$  is considered as a free parameter to take any value that is suitable for the model. All of these are parametric models; that is, they are characterized by the use of one or more free parameters.

As a way of evaluating the quality of the models to describe the observational data, we start from selection criteria based on Bayesian statistics and Monte Carlo methods via Markov chains. In particular; Through these methods we seek to obtain

constraints on the cosmological parameters relative to each model. Likewise, from the constraints, determine the  $\chi^2$  value of all the models. It is found that the model that best describes the observational data is the model that has a lower  $\chi^2$  value.

The analysis and estimation of the value of  $\chi^2$  of each of the models was carried out under the framework of a flat geometry universe; that is, assuming a curvature parameter equal to zero ( $\Omega_k = 0$ ) and with negligible radiation contribution. Data from observations from Cosmic Chronometers (HD), Baryonic Acoustic Oscillations (BAO), and Type Ia Supernova (SNIa) were used. In total, constraints and  $\chi^2$  values were obtained from six different models: from the four existing  $w$ CDM models mentioned above, from the proposed Bessel polynomial model, and from the standard cosmological model  $\Lambda$ CDM. It was found that the model with the lowest value of  $\chi^2$  and therefore the one that best describes the observational data used, is the proposal Bessel Polynomial model with a value of  $\chi^2 = 29.736$ . Likewise, of the models analyzed, the one that least describes the observational data is the standard cosmological model  $\Lambda$ CDM, with a value of  $\chi^2 = 30.640$  referring to the observational data that were used.

In addition to evaluating the models, the statistical criteria will reward us to estimate or reject the proposed model. It is expected to have enough information to assess whether the proposed equation of state can be a reference for future  $w$ CDM models that are based on the use of Bessel functions or other type of special functions.

This work is organized as follows: Chapter 1 briefly narrates the history of modern cosmology from its beginnings: Einstein's field equations, the discovery of the expansion of the universe; until the discovery of the CMB. The second chapter contains the theoretical bases on which this work is based: cosmological principle, Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrics FLRW, continuity and state equations, and some of the cosmological parameters used to describe the universe. In Chapter 3 it develops the concept of dark energy as responsible for the accelerated expansion of the universe. Plus the interpretation of dark energy as a cosmological constant (which was the first interpretation given to it) is addressed, and by last the  $\Lambda$ CDM model is analyzed. Finally, some evidence supporting the existence of dark energy is provi-

ded. In Chapter 4 some of the theoretical and observational problems presented by the cosmological constant and the standard cosmological model  $\Lambda$ CDM are raised, as well as some of its theoretical alternatives, and emphasis is made on the  $w$ CDM models that we deal with in this work. Finally, the proposal Bessel polynomial model is presented. Chapter 5 includes the theory and methods used to obtain and interpret the results: Bayesian statistics, Monte Carlo methods, Markov chains, and the Metropolis-Hastings algorithm. This chapter also shows the results obtained. Finally, in Chapter 6 we have the conclusions.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	III
<b>Resumen</b>	VI
<b>Abstract</b>	IX
<b>Introducción</b>	XX
<b>1. Preludio. Breve historia de la cosmología.</b>	<b>1</b>
1.1. Comienzos . . . . .	2
1.2. Periodo intermedio . . . . .	7
1.3. Resurgimiento . . . . .	10
<b>2. Cosmología.</b>	<b>15</b>
2.1. Espacios de máxima simetría y Principio cosmológico. . . . .	15
2.2. Métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. . . . .	17
2.2.1. Tensor métrico . . . . .	22
2.3. Ecuación de Friedmann. . . . .	23
2.4. Parámetros cosmológicos . . . . .	31
<b>3. Energía oscura.</b>	<b>35</b>
3.1. Expansión acelerada del universo. Constante cosmológica ( $\Lambda$ ). . . . .	35
3.2. Modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	38
3.2.1. Ecuación de estado para la constante cosmológica $w_\Lambda$ . . . . .	38
3.3. Evidencias de energía oscura . . . . .	40

<b>4. Modelos.</b>	<b>47</b>
4.1. Problemas de la constante cosmológica . . . . .	47
4.2. Alternativas a la constante cosmológica . . . . .	52
4.2.1. Modelos $w$ CDM . . . . .	54
4.2.2. Algunos modelos $w$ CDM propuestos. . . . .	61
4.3. Propuesta de ecuación paramétrica de estado con los polinomios de	
Bessel . . . . .	68
4.3.1. Propuesta de ecuación . . . . .	72
<b>5. Estadística Bayesiana, Análisis y Resultados</b>	<b>80</b>
5.1. Fundamentos para la interpretación de los resultados. . . . .	80
5.1.1. Estadística Bayesiana . . . . .	81
5.1.2. Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) . . . . .	86
5.1.3. Covarianza entre variables aleatorias . . . . .	91
5.1.4. Chi-cuadrada; ajuste y prueba de hipótesis . . . . .	95
5.2. Análisis y Resultados . . . . .	101
5.2.1. Ejemplo de MCMC con $\Lambda$ CDM . . . . .	101
5.3. Figuras de contorno de los modelos. . . . .	104
5.3.1. Propuesta final de ecuación de estado de Polinomios de Bessel. . . . .	110
5.4. Tabla de resultados . . . . .	112
5.5. Mejores ajustes . . . . .	114
<b>6. Conclusiones</b>	<b>120</b>

# Índice de figuras

1.1. Fragmento del artículo original de Hubble <i>A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae</i> publicado en 1929. Se aprecia la relación lineal velocidad-distancia encontrada para diferentes galaxias. (15) . . . . .	6
1.2. Mapa de fluctuación de temperatura en el CMB obtenido por el COBE después de cuatro años de operación (16). . . . .	13
1.3. Espectro del CMB obtenido por el instrumento FIRAS del COBE, donde se confirma un comportamiento que asemeja al de una curva de densidad de radiación emitida por un cuerpo negro perfecto (16). . . . .	14
2.1. Se muestra de forma ilustrativa, ejemplos de cómo las propiedades de homogeneidad e isotropía, no son propiedades equivalentes. En el inciso (a) en dos dimensiones, y en el inciso (b) en tres dimensiones. . . . .	16
2.2. Se muestran las tres posibles geometrías cosmológicas de los modelos FLRW homogéneos e isótropos del Universo. . . . .	22
4.1. Parámetros de densidad de radiación $\Omega_r$ (línea punteada azul), materia $\Omega_m$ (línea verde) y energía oscura $\Omega_\Lambda$ (línea roja) como función del factor de escala $a$ . La zona en color gris muestra la época en donde la materia y la energía oscura son comparables. Fuente (78). . . . .	50
4.2. Datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos HD, tomados de la referencia (69) . . . . .	60

4.3. Gráfica del comportamiento teórico para el modelo CPL del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69). . . . . 65

4.4. Gráfica del comportamiento teórico para el modelo Huterer-Turner del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69). . . . . 66

4.5. Gráfica del comportamiento teórico para el modelo Efstathiou del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69). . . . . 67

4.6. Gráfica de los primeros quince polinomios  $J_n$  de Bessel . . . . . 71

4.7. Se muestran algunos puntos sintéticos generados a partir de una reconstrucción propuesta en la referencia (29). Las barras verticales en cada punto representan su error asociado. . . . . 74

4.8. Las líneas: naranja, verde, y violeta muestran el comportamiento teórico del modelo de polinomios de Bessel de acuerdo a la elección de parámetros (naranja para la **prueba 1**, verde para la **prueba 2** y violeta para la **prueba 3**), cuando se sustituyen en la ecuación (4.47). La línea azul muestra una interpolación de los datos sintéticos de la reconstrucción de  $w(z)$ . Las líneas verticales representan las barras de error de estos puntos. . . . . 75

4.9. Se muestra el comportamiento teórico del parámetro de Hubble según la ecuación (4.34), usando el modelo de polinomios de Bessel tomando como ecuación de estado  $w(z)$  la ecuación (4.48) que corresponde a los valores de los parámetros de la prueba 3, y a su vez como función  $f(z)$  la ecuación (4.49). También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69) véase Figura 4.2. . . . . 77

4.10. Se muestra la comparación de los modelos vistos hasta ahora; CPL, HT, Efstathiou, y la propuesta de polinomios de Bessel en contraste con los datos observacionales del parámetro de Hubble. . . . . 78

5.1. Distribución de probabilidad para el parámetro  $\theta_i$  a partir de los datos de la Tabla 5.2. Fuente: (62). . . . . 86

5.2. Se muestra un ejemplo de cómo se vería una representación gráfica de una posible caminata a partir de un valor inicial en el espacio de parámetros obtenida mediante MCMC para el parámetro  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  del modelo supuesto. Cada punto en la figura representa un paso en la cadena de Markov. . . . . 90

5.3. Se muestra el histograma de los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  del muestreo de la Figura 5.2 generado por MCMC de un supuesto modelo. También se muestran, los valores que aparecieron con mayor frecuencia dentro del muestreo, así como las zonas donde se concentró la mayor cantidad de puntos. A mayor cantidad de puntos dentro de esa zona, se aprecia un color más oscuro. . . . . 91

5.4. Se muestra el comportamiento de la dispersión de puntos de acuerdo a la correlación que existe entre las variables  $x$  y y determinadas por el valor de su covarianza. . . . . 93

5.5. Se muestra cómo se dispersan los puntos a diferentes valores de la covarianza entre las variables  $x$  y  $y$ . Se puede observar que cuando este valor se aproxima a cero, la acumulación de puntos se concentra en una región circular, mientras que conforme la covarianza se aleje del cero, éstas regiones se vuelven elipses cada vez más delgadas. . . . 95

5.6. Se muestran las regiones donde se localizan las  $x$  tales que cumplen con la condición (5.11); estas se indican en color azul. . . . . 96

5.7. Se muestran las distribuciones de probabilidad  $P(\chi^2; n)$  considerando diferentes valores de grados de libertad  $n$ . Se observa como al aumentar el valor de  $n$  las  $P(\chi^2; n)$  se parecen cada vez mas a una distribución Gaussiana. . . . . 100

5.8. Cadena de Markov generada mediante MCMC (SimpleMC) para el parámetro  $\Omega_m$  referente al modelo  $\Lambda$ CDM desde HD+BAO+SN. . . . . 102

5.9. Cadena de Markov generada mediante MCMC (SimpleMC) para el parámetro  $h$  referente al modelo  $\Lambda$ CDM desde HD+BAO+SN. . . . . 103

5.10. Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2 \sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $\Omega_m, h$  correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM que se obtuvieron a partir de las cadenas de Markov que se generaron desde HD+BAO+SN. . . . . 104

5.11. Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2 \sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $\Omega_m, h, w_0$ , correspondiente al "modelo simple" que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN. . . . . 105

5.12. Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2 \sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $h, \Omega_m, h, w_0, w_a$  correspondiente al modelo CPL que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN. . . . . 106

<p>5.13. Figuras de contorno con regiones de confianza <math>1, 2\sigma</math> y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros: <math>h, \Omega_m, w_0, w_a</math> correspondiente al modelo Huterer-Turner que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN. . . . .</p>	<p>107</p>
<p>5.14. Figuras de contorno con regiones de confianza <math>1, 2\sigma</math> y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros: <math>h, \Omega_m, w_0, w_a</math> correspondiente al modelo Efstathiou que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN. . . . .</p>	<p>108</p>
<p>5.15. Figuras de contorno con regiones de confianza <math>1, 2\sigma</math> y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros: <math>h, \Omega_m, w_1, w_2, w_0, J_n, J_m</math> correspondiente al modelo de Polinomios de Bessel que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN. . . . .</p>	<p>109</p>
<p>5.16. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo <math>\Lambda</math>CDM. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . .</p>	<p>115</p>
<p>5.17. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo simple. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase figura 4.2. . . . .</p>	<p>115</p>
<p>5.18. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo CPL. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . .</p>	<p>116</p>

5.19. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo HT. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . . 117

5.20. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo Efstathiou. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . . 118

5.21. Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo de Polinomios de Bessel. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . . 118

5.22. Comparación de los modelos con su parámetros de mejor ajuste encontrados mediante MCMC desde datos observacionales de HD+BAO+SN. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2. . . . . 119

# Introducción

La expansión acelerada del universo fue descubierta por primera vez en los estudios de supernovas del tipo Ia (Riess et al. 1998 (27) ; Perlmutter et al. 1999 (28)); posteriormente confirmada por las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB) (Spergel et al. 2003 (33)) y por las oscilaciones acústicas bariónicas (BAOs) en las muestras de galaxias luminosas del Sloan Digital Sky Survey (Eisenstein et al. 2005 (66)). Varios modelos teóricos se han propuesto para explicar esta expansión acelerada del universo, de entre los cuales se encuentran: los modelos de Campos Escalares (quintaesencia, K-essence, phantom, quintom, campos escalares no mínimamente acoplados, etc.), los modelos de gravedad modificada ( $f(R)$ , los cuales contemplan diferentes modificaciones a la teoría de la Relatividad General), el modelo de Gas de Chaplygin, o algunas otras alternativas basadas en universos anisótropos (25; 30).

El actual modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM ( $\Lambda$  por la constante cosmológica y CDM por Materia Oscura Fría) supone que parte de la energía del universo existe en forma de algo llamado “energía oscura” la cual ejerce una presión negativa responsable de tal expansión cósmica. El modelo  $\Lambda$ CDM considera una densidad de energía oscura constante con ecuación de estado  $w \equiv \frac{p}{\rho} = -1$  (1). Esta parametrización  $w$  de ecuación de estado se propuso por primera vez en 1997 por Michael Turner y Martin White en el artículo “*CDM Models with a Smooth Component*” (71). Aunque el modelo cosmológico estándar provee un excelente ajuste a una amplia gama de datos observacionales, existe sin embargo, un persistente interés en extender la cosmología más allá del modelo estándar.

pese a que, por un lado,  $\Lambda$ CDM ha resultado ser predictivo y observacionalmen-

te acertado, por otro lado, el modelo adolece de profundas dificultades teóricas. Un ejemplo de esto es el hecho de que la materia oscura fría CDM y la constante cosmológica  $\Lambda$ , tienen orígenes físicos completamente misteriosos. Además también parecen existir curiosas discrepancias en cuanto a las propiedades predichas para el agrupamiento de materia oscura fría CDM en las observaciones a pequeña escala. Una de estas discrepancias se debe a que los perfiles de densidad predichos tienen un aumento abrupto en la densidad central, en contraste con las curvas de rotación observadas en galaxias pequeñas. Otro problema que se presenta a pequeña escala se basa en simulaciones numéricas, las cuales predicen la existencia de un número muy elevado de halos pequeños orbitando alrededor de estructuras mayores contrariamente al número de galaxias satélites observadas localmente (2; 3).

La constante cosmológica  $\Lambda$  es aún más desconcertante, pues el problema más sustancial es que su valor observado es extremadamente pequeño comparado con las predicciones de la física de partículas. Otro de los problemas del modelo cosmológico estándar es el problema de coincidencia; esto es, que el parámetro de densidad de energía oscura ( $\Omega_\Lambda$ ) y el parámetro de densidad de materia ( $\Omega_m$ ) en la actualidad son del mismo orden de magnitud sin ninguna razón física aparente (1).

Por tal motivo, actualmente se buscan nuevas propuestas de modelos que puedan resolver o al menos ayudar a entender las inconsistencias sustanciales que surgen del modelo  $\Lambda$ CDM. Algunas de las propuestas que se han hecho están encaminadas a modificar el carácter constante del modelo cosmológico estándar, y proponer que la densidad y la ecuación de estado de la energía oscura pueden variar con el tiempo. Teniendo así modelos de energía oscura dinámicos.

Para desarrollar un modelo dinámico de la ecuación de estado de la energía oscura debemos valernos de la información que nos proporcionan los datos observacionales. Sin embargo, extraer información que nos ayude a desarrollar un modelo de ecuación de estado de la energía oscura  $w$  desde los datos observacionales es un gran desafío debido a la precisión actual de los datos y a nuestro desconocimiento de la naturaleza de la energía oscura. Bajo estas circunstancias, a modo de explorar la dinámica de la evolución de la energía oscura se tiende a parametrizar  $w$  empíricamente usando

dos o más parámetros libres que ayuden a caracterizarla. De este modo se tiene una “**ecuación paramétrica de estado de la energía oscura**”. Algunas propuestas que existen de ecuaciones paramétricas son: Chevallier-Polarski-Linder (CPL), Jassal-Bagla-Padmanabhan (JBP), Felice-Nesseris-Tsujikawa (FNT), Huterer-Turner (HT), Efstathiou, etcétera.

Como una forma de contribuir a esta línea de exploración, se propone en el presente trabajo un modelo de ecuación paramétrica de estado de la energía oscura que toma como base el desarrollo en serie de funciones especiales. Se sabe bien que las funciones especiales aparecen recurrentemente en un sinnúmero de los problemas que la física se plantea, y son una gran herramienta para encontrar soluciones o aproximaciones de soluciones. Mientras que, el uso de desarrollos en serie de funciones, se ha tratado ya previamente en cosmología. Algunos de los trabajos que incluyen desarrollos en serie de funciones para tratar problemas cosmológicos incluyen las series de Fourier (Tamayo D. y Vazquez J. A. 2019 (4)) y de Taylor (Sahni V. y Starobinsky A. 2006 (5)). Bajo este marco de referencia, se utilizarán en esta ocasión una expansión en serie a partir de los polinomios  $J_n$  de Bessel. Estos polinomios son funciones oscilatorias que decaen proporcionalmente a  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . En forma general, los polinomios de Bessel  $J_n$  se parecen a las oscilaciones amortiguadas del seno y el coseno. La motivación para proponer este tipo de funciones surge de algunos de los resultados de reconstrucciones de la evolución de la ecuación de estado de la energía oscura. Estas reconstrucciones sugieren que existe una predilección por un comportamiento dinámico, tal como se expone en los artículos (67), (68). Más aún, este comportamiento dinámico podría ser coherente con un carácter oscilatorio, tal como sugieren los artículos (4), (29).

Se espera que el carácter oscilatorio del modelo que se propone nos pueda proveer un modelo cercano a  $\Lambda$ CDM que nos permita por un lado ayudar a resolver las interrogantes cosmológicas acerca de la naturaleza y los orígenes físicos de las diversas contribuciones a la densidad de energía del universo, y de ese modo contribuir también a descifrar qué es realmente la energía oscura y si es que evoluciona, y por otro lado ser el preámbulo para nuevas interpretaciones.

# Capítulo 1

## Preludio. Breve historia de la cosmología.

Con el propósito de narrar brevemente y de forma práctica el desarrollo de la cosmología moderna, esta se dividirá en tres eras diferentes. La primera de ellas comienza con el desarrollo de la Teoría de la Relatividad General de Einstein (1915), donde vimos los primeros modelos matemáticos de nuestro Universo. La era termina con el descubrimiento de Hubble de la expansión cósmica. La segunda era inicia con la interpretación del Big Bang como comienzo del universo, y termina con el descubrimiento de la radiación del fondo cósmico de micro ondas CMB por Penzias y Wilson (1965). La última de las eras (durante la cual surgió el modelo cosmológico estándar) inicia inmediatamente después de la anterior. Incluye los datos tomados por diversos experimentos a bordo del satélite COBE (1989-1992). Experimentos que proporcionaron la verdadera naturaleza del CMB de Penzias-Wilson, y revelaron las bases para la comprensión de lo que más tarde sería la formación de estructuras a gran escala ( $\sim$ Mpc). Esta última era termina con el lanzamiento de los satélites Wilkinson Microwave Anisotropy Probe WMAP (2001), y el satélite Planck (2009).

## 1.1. Comienzos

El 25 de noviembre de 1915 Einstein publicó las ecuaciones de campo de la Relatividad General, ahora llamadas ecuaciones de campo de Einstein. En las cuales el campo gravitacional es descrito geoméricamente.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

*Geometría  $\propto$  materia.*

La Teoría de la Relatividad General destacó en el uso de técnicas geométricas, además proporcionaba una novedosa interpretación de la física que no se había visto nunca. Por lo que rápidamente comenzó a ganar popularidad, y por ende, al poco tiempo de su publicación se comenzaron a buscar soluciones a sus ecuaciones. (6). Las soluciones a las ecuaciones de Einstein están dadas a través de una geometría determinada por la distribución de materia en el espacio. Una geometría en un sistema de coordenadas dado describe la trayectoria entre dos puntos del espacio tiempo, y se especifica por la métrica y por el elemento de línea.

Una métrica es una aplicación  $d : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que toma dos vectores, es decir dos elementos de un espacio vectorial  $\mathbb{M}$  y devuelve un escalar al que se le llama distancia.

Por otra parte, el elemento de línea es una distancia diferencial, esto es, la que existe entre dos puntos cercanos del espacio. Es decir, si tenemos dos puntos cuyas coordenadas son  $(x, y, z, w)$  y  $(x + dx, y + dy, z + dz, w + dw)$ , entonces estos dos puntos se consideran cercanos. Convencionalmente un elemento de línea  $ds$  es escrito a su equivalente algebraico con una relación cuadrática  $ds^2$ .

Las soluciones para las ecuaciones de Einstein deben además ser consistentes bajo los principios que marca la relatividad. Los cuales requieren que el elemento de línea debe ser el mismo para todos los marcos de referencia inerciales, o lo que es lo mismo, la distancia entre puntos que definen la geometría del espacio tiempo debe ser la misma en todos los sistemas de coordenadas usados para etiquetar esos puntos. Si esta condición se cumple se dice que el elemento de línea es un invariante.

Al poco tiempo de introducir la Relatividad Especial, el matemático Hermann Minkowski propuso una métrica consistente con la teoría (1907). Conocida como la métrica de Minkowski, se especifica por el elemento de línea:  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  y caracteriza un espacio plano. La métrica de Minkowski se puede considerar como la solución más simple a las ecuaciones de campo de Einstein, esta es una geometría en la que no hay materia presente. La parte central del trabajo de Minkowski es la propagación de la luz. El punto clave está en que puntos cercanos del espacio tiempo son conectados por los rayos de luz teniendo  $ds = 0$  (6). Es decir para la luz  $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ . Con lo que  $dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Un aspecto importante a resaltar de la métrica de Minkowski (1907) es que solo se necesitó de Relatividad Especial (1905) para obtenerse pero fue un punto de partida para el desarrollo de nuevas soluciones de las ecuaciones de campo de la Relatividad General (1915).

Una de las primeras soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein (en el vacío) fue la solución esféricamente simétrica de Schwarzschild (1916) debida al campo gravitacional de una masa puntual (13).

En marzo de 1917 Einstein publicó su propia solución, pero para esto tuvo que modificar sus ecuaciones originales, ya que al formular su teoría, Einstein tenía la confianza de que el universo era estático; sin embargo, sus propias ecuaciones no lo permitían. Esto se debe simplemente a que toda la materia existente se atrae gravitacionalmente; de hecho, la idea de un universo estático es tanto más equivocada, ya que un equilibrio como el que plantea, resulta ser inestable ante pequeñas perturbaciones, por lo que en la práctica no pueden existir soluciones estáticas. Es así que, en afán de conservar la estabilidad del universo, Einstein introdujo un término más a sus ecuaciones de campo, el cual contemplaba una constante  $\Lambda$  la cual sería la encargada de proporcionar el equilibrio que se necesitaba (7).

Al poco tiempo después que Einstein diera a conocer su solución, en el mismo año (1917), de Sitter también proporcionó una solución exacta. La solución de de Sitter tuvo mucho más impacto que la de Einstein, de hecho, es considerada para la cosmología teórica como un artículo histórico. Esto debido a que en su artículo “*On*

*the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis*" (14), de Sitter expone la solución de Einstein y la compara con su propia solución, mostrando el contraste entre ambas. En donde la solución de de Sitter resulta ser un tanto más ingeniosa, ya que va un paso más allá de la solución de Einstein, la cual parte de la hipótesis de un espacio de coordenadas 3-dimensional. Así, de Sitter extiende esta hipótesis a un espacio de coordenadas espaciales 4-dimensional. No solo eso, sino que intuye que un espacio tiempo de cuatro dimensiones requiere de cuatro (o más) dimensiones espaciales absolutas, además de un tiempo adicional como variable independiente (14). Estas ideas marcaron un punto de partida para la construcción de la geometría del espacio tiempo, y también proporcionaron una referencia para nuevas soluciones a las ecuaciones de campo. Tal es el caso de la solución de Robertson, la cual parte de una transformación de la solución de de Sitter. Aunque la solución de Robertson se consideró simplemente como una variante que no ofrecía nada esencialmente nuevo más tarde se reconocería su importancia. Diferentes soluciones llegaron eventualmente. Friedmann (1922) y Lemaître (1927) derivaron soluciones completamente nuevas a las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales son consideradas como el primer paso hacia el establecimiento del modelo cosmológico estándar, y son fundamentales para la cosmología moderna, ya que en ellas se basan los modelos que tenemos actualmente. En su solución, Lemaître especuló que las galaxias estarían alejándose unas de otras debido a una expansión cósmica, por lo que proporcionó una ecuación para el corrimiento al rojo aparente de la luz que sería percibida de estos objetos de ser válida su especulación. Sin embargo no pudo establecer una relación entre su ecuación con los datos observacionales. Algo que Robertson un año más tarde (1928) sí pudo establecer, por lo que se considera a Robertson ser la primera persona en predecir la ley de expansión lineal observada por Hubble (1929).

Finalmente, la cúspide de las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein llegaría en 1929, año en que se daría a conocer el trabajo fundamental de las soluciones homogéneas e isotropas de Robertson y Walker (6).

## Primeras observaciones de la expansión del universo

El primer espectro de una galaxia (M31, Andrómeda) fue tomado por Vesto Slipher en 1912 en el cual se encontró que presentaba corrimiento al rojo. La velocidad de desplazamiento se calculó en aproximadamente  $300 \text{ km s}^{-1}$ ; la cual fue por muchos años la velocidad más alta medida para un objeto. Por años Slipher continuó tomando espectros de galaxias, encontrando corrimiento al rojo en algunas de ellas, de modo que pudo medir sus velocidades de alejamiento. Aunque en un principio este corrimiento al rojo encontrado por Slipher fue explicado a través de la solución de de Sitter a las ecuaciones de campo de Einstein, no fue sino hasta el trabajo de Robertson que fue interpretado como debido a una expansión cósmica (6). Sin embargo, el no poder proporcionar criterios de distancias para estas galaxias provocó que se ignoraran dichas ideas derivadas del trabajo de Robertson. Años más tarde la interpretación de una expansión cósmica sería retomada gracias a los trabajos de Hubble.

El 1º de enero de 1925 con ayuda del nuevo telescopio de 100 pulgadas en Mount Wilson, Hubble resolvió imágenes de estrellas de tres galaxias diferentes, algunas de las cuales eran estrellas cefeidas, gracias a esto pudo establecer sus distancias extra galácticas. Los nuevos avances tecnológicos como el telescopio de Mount Wilson fueron esenciales para el avance de la cosmología, y también para los posteriores estudios de Hubble, quien después de obtener las distancias de las estrellas cefeidas extra galácticas continuó por retomar los resultados que Vesto Slipher había obtenido en 1912 donde había encontrado corrimiento al rojo en los espectros de algunas galaxias espirales. Usando su propio método para calcular distancias de estrellas cefeidas, Hubble pudo evaluar el trabajo Slipher y proporcionar los criterios de distancia que hacían falta. Finalmente en 1929, cuatro años después de sus primeras observaciones en Mount Wilson, Hubble fue capaz de anunciar su famosa ley: todas las galaxias se alejan de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia a la que se encuentran de nosotros (13).

En su artículo publicado en 1929 Hubble logró graficar la relación entre la velocidad de alejamiento de las galaxias con su distancia medida (Figura 1.1). La relación

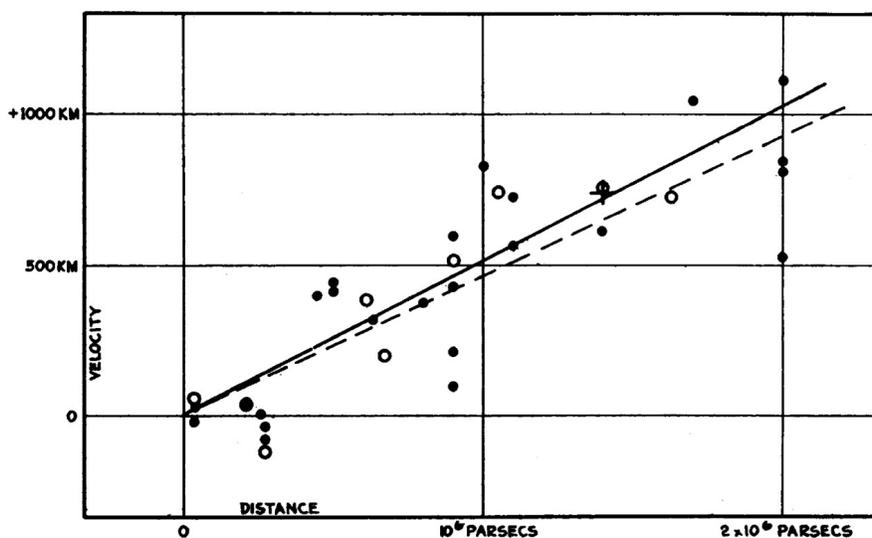


Figura 1.1: Fragmento del artículo original de Hubble *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae* publicado en 1929. Se aprecia la relación lineal velocidad-distancia encontrada para diferentes galaxias. (15)

que encontró entre estas fue la de una relación lineal. Cabe señalar que Hubble atribuía esta relación lineal como consecuencia de la solución de de Sitter. En palabras de Hubble “la característica sobresaliente, sin embargo, es la posibilidad de que la relación velocidad-distancia pueda representar el efecto de de Sitter, y que los datos numéricos puedan ser introducidos dentro de las discusiones sobre la curvatura general del espacio” (15).

Existe una gran discusión acerca de si Hubble en el momento de publicado su artículo verdaderamente sabía que había descubierto la expansión del universo. De hecho Hubble pensó que su relación lineal encontrada solo era la parte local de lo que en general sería una relación cuadrática de aceleración que era la predicha por la solución de de Sitter. Sin embargo, gracias a las predicciones teóricas presentes en algunos modelos como el de Lemaître y el de Robertson, fue que la idea de la expansión del universo tomó cada vez más fuerza.

Una vez aceptada la expansión del universo, una consecuencia derivada de esta expansión fue la conclusión de que el universo debía tener un origen y por tanto una edad finita. La interpretación más simple del trabajo de Hubble fue que el Universo comenzó con una explosión, esto daría origen a la teoría del big bang.

## 1.2. Periodo intermedio

Lo que se debía resolver ahora, era la incógnita de ¿Por qué se expande el universo? La esperanza era encontrar algún tipo de inestabilidad que pudiera causar que un modelo por lo demás estático, se desencadenara en una expansión y así poder evitar algunos de los problemas que implicaba tener un universo finito. El universo podría ser infinitamente antiguo y haber comenzado su proceso de expansión en un momento dado, entonces sería el estado actual de expansión del universo el que tendría un tiempo finito. Estas ideas llevarían a la teoría del estado estacionario.

Durante el periodo entre 1935 y 1960 se escribieron muchos artículos excelentes y se propusieron y discutieron muchas ideas importantes. Ninguna más que la Teoría del Estado Estacionario. Fue también el período durante el cual surgió la teoría del Big Bang en la forma que la conocemos hoy.

Las principales ideas de la teoría del estado estacionario fueron propuestas por: Bondi y Gold (1948) con su "*Teoría del estado estacionario del principio cosmológico perfecto*" y por Hoyle (1949) con la "*Teoría del estado estacionario del C-campo*". Como modelo alternativo a la teoría del Big Bang, la teoría del estado estacionario de Hoyle y de Bondi y Gold era una teoría en la que el Universo se vería igual que los modelos del Big Bang en el sentido de ser un universo en expansión homogéneo e isótropo, pero carente de una singularidad inicial. La teoría del estado estacionario resolvió el dilema del origen del universo mediante la simple estrategia de reemplazar la creación de toda la materia del universo en un instante (el Big Bang) con un modelo en el que la materia se crearía en los espacios dejados por la expansión cósmica (C-campo). El Universo se vería igual en todos los lugares y en todos los tiempos (Principio Cosmológico Perfecto).

La segunda era es un periodo intermedio relativo durante el cual el progreso de la observación fue lento. Tuvimos el gran debate filosófico del "Big Bang" contra el "Estado estacionario". La comprensión de los modelos cosmológicos relativistas estaba mejorando. Había surgido ya el concepto de la constante cosmológica y se tenía un universo de modelos de Friedmann y Lemaître, sin embargo, no había forma

de distinguir cuál de estos varios modelos podría representar mejor nuestro Universo (6).

Una de las interrogantes teóricas que debían resolver los modelos era la del origen de los elementos ligeros ( $Z < 6$ ) es decir; hidrogeno, deuterio, helio y litio. Entre 1950 y 1960 la teoría predominante sobre la formación de los elementos químicos en el Universo era la teoría conocida como BBFH, propuesta por G.Burbidge, M.Burbidge, Fowler y Hoyle. La teoría BBFH postulaba que todos los elementos se producían en el interior de las estrellas o durante las explosiones de supernovas. Si bien esta teoría logró un éxito relativo, aún tenia algunos aspectos importantes que aclarar. Para empezar se estimaba que solo una cantidad pequeña de materia presente en el universo debería consistir de helio si es que las reacciones nucleares en las estrellas fueran la única fuente de producción. Sin embargo, se observa que más del 25 % de la materia total del Universo consiste de helio, es decir, mucho más de lo que predice la teoría. Un problema similar existe para el deuterio, ya que el deuterio no se puede producir en el interior estelar; en realidad el deuterio se destruye dentro de las estrellas. Por lo tanto, la hipótesis BBFH por sí sola no podría explicar adecuadamente la abundancia observada de helio y deuterio en el Universo. Ante estas dificultades surgió otra propuesta por parte de Gamow, quien sugirió que los elementos ligeros, en particular el helio, podrían haberse fabricado en un "*Big Bang caliente*" ("*Hot Big Bang*"). Esta propuesta por parte de Gamow seria de suma importancia para el desarrollo de la cosmología ya que gracias a ella fue que comenzaría la búsqueda y el descubrimiento del fondo cósmico de micro ondas (CMB) (6).

### **Desarrollo de la búsqueda y el descubrimiento del CMB.**

La pregunta de dónde podrían haber venido los elementos ligeros llevó a Gamow, Alpher y Herman a la primera predicción del CMB y también a su temperatura. Partieron de un argumento ingeniosamente simple ¿Cómo puede ser que aproximadamente el 25 % en masa del gas cósmico sea  $^4\text{He}$  (helio-4) en lugar de hidrógeno? ¿Por qué esa cantidad y por qué no más? Incluso si pudiéramos ignorar el problema de cómo el  $^4\text{He}$  producido en las estrellas podría haber escapado de ellas después, se

sabía que la fusión estelar es insuficiente para producir esa cantidad de  ${}^4\text{He}$ . Gamow resolvió el problema indicando que el universo primitivo pudo haber actuado como un reactor de fusión, pasando por una fase caliente comparable con el interior de las estrellas. De ser el caso, y si el equilibrio termodinámico pudiera mantenerse, debió aparecer un fondo de radiación térmica, el cual debería existir aun en nuestros días. Además este fondo de radiación térmica eventualmente se iría enfriado debido a la expansión del universo.

Gamow, Alpher y Herman además fueron más lejos. Concluyeron que era poco probable que el  ${}^4\text{He}$  se formara directamente de protones y neutrones, ya que esto requeriría la interacción de cuatro cuerpos. En cambio sería más probable que ocurriera una fusión con deuterio a través de encuentros de dos cuerpos. La siguiente pregunta que surgió fue: ¿Por qué solo una cantidad de hidrógeno se fusionó en  ${}^4\text{He}$ ?, ¿por qué no todo o por qué nada? La conclusión a la que se llegó fue que solo se produjo la cantidad justa de deuterio para ser fusionado. Si se hubiera producido más deuterio, todo el hidrógeno se habría fusionado en helio, y si se hubiera producido menor cantidad, nada del hidrógeno se habría fusionado en helio. Por tanto, las condiciones favorables para la producción de  ${}^4\text{He}$  terminaron unos pocos minutos después del Big Bang. Lo que permitió calcular la cantidad justa de deuterio y  ${}^4\text{He}$  que se produjo. Esta no fue la única estimación a la que se llegó. Partiendo de suponer que la radiación producida durante ese periodo de creación de helio coincidiría con el espectro de emisión de cuerpo negro, fue que se pudo hacer una estimación de la temperatura a la que se encontraría actualmente esa radiación. Colocándola en aproximadamente 5K.

La búsqueda del origen de la formación de  ${}^4\text{He}$  dejó una importante predicción: debería de haber un fondo de radiación sobrante de la fase caliente del universo temprano cuya temperatura actual debería de ser de algunos cuantos Kelvin. Esta predicción llevo a la búsqueda de ese fondo de radiación sobrante, el cual fue descubierto en 1965, por los radioastrónomos estadounidenses Arno Penzias y Robert Wilson. La detección del fondo cósmico de microondas (CMB) como fue nombrado por sus siglas en inglés (*Cosmic Microwave Background*), se publicó en The Astrophysical Journal. Donde también, en el mismo número de la revista Robert Dicke, James Peebles, Peter

Roll y David Wilkinson publicaron un artículo explicando el origen cosmológico de esta radiación. Este descubrimiento se considera la prueba más sólida que respalda el modelo del Big Bang caliente ("*Hot Big Bang*").

El descubrimiento del CMB, impuso de manera definitiva al modelo del "*Hot Big Bang*" por encima del modelo del estado estacionario, quien ya no fue capaz de explicar de manera satisfactoria el origen y formación de los elementos ligeros.

La noticia del descubrimiento del CMB apareció en la primera página de The New York Times el 21 de mayo de 1965 (6; 16; 19).

### 1.3. Resurgimiento

Tras el descubrimiento del CMB nuevas teorías e hipótesis fueron desarrolladas. De entre estas, las más importantes fueron las encaminadas a predecir cómo debería ser la forma del espectro del CMB. Sachs y Wolfe demostraron que las heterogeneidades primordiales que conducen a la estructura cósmica eran, en principio, detectables como anisotropías en la distribución angular de la CBR (Cosmic Background Radiation) en el cielo (entiéndase que la radiación cósmica de fondo CBR, posee varios componentes dependiendo de la región de su espectro en que nos enfoquemos. Donde una de estas componentes o regiones es el CMB). Sachs y Wolfe se dieron cuenta de que las heterogeneidades primordiales que debían existir para formar galaxias serían visibles como variaciones angulares de pequeña amplitud en la temperatura de la radiación cósmica de fondo CBR. Debido a que el universo no es completamente homogéneo, podrían haberse formado fluctuaciones en el espectro del CMB por colapso gravitacional. La suposición fue que estas fluctuaciones debieron crecer conforme el universo se expandía, y se estimó que deberían poder verse en el espectro del CMB en el nivel de mili Kelvin (mK).

En 1970 dos artículos importantes fueron dados a conocer. El artículo de Peebles y Yu (17), así como el de Sunyaev y Zel'dovich (18) explicaban por primera vez como las fluctuaciones de densidades de materia deberían de haber producido fluctuaciones en la temperatura en el CMB.

Estas predicciones teóricas llevarían a la cosmología a la búsqueda de fluctuaciones en el espectro del CMB. Por lo que se realizaron numerosos experimentos de observación cada vez más sofisticados. La incertidumbre ocurrió cuando estos experimentos llegaron al nivel de sensibilidad requerida, pues para sorpresa de todos no se encontraron fluctuaciones a nivel de mK. Esto provocó que las nuevas predicciones acerca de la formación de estructuras cosmológicas por colapso gravitacional se estrellaran con un muro. Ante esta situación Peebles propuso que la materia en el Universo no está dominada por bariones ordinarios, sino por otro tipo de materia que no interactúa electromagnéticamente (este tipo de materia sería nombrada posteriormente como “**materia oscura**”), por lo que no podría causar fluctuaciones de temperatura en el CMB directamente, sino solo indirectamente a través de un efecto gravitacional sobre la materia que si interactúa electromagnéticamente. Lo que dejaría fluctuaciones del CMB a nivel de micro Kelvin ( $\mu\text{K}$ ) en lugar de mili Kelvin (mK). Las fluctuaciones de temperatura de CMB en el nivel micro en lugar de mili Kelvin podrían reconciliarse con las estructuras cósmicas actuales. Esto sigue siendo, por mucho, el argumento más poderoso a favor de la “materia oscura” la cual es incapaz de interactuar con la luz. Peebles sugirió que esta materia oscura postulada debería ser no relativista; esto es, que no viaja a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, ya que, de lo contrario, la formación de pequeñas estructuras cósmicas sería difícil o imposible de entender. Esta materia oscura no relativista, sería nombrada posteriormente como “**Materia Oscura Fría**” o CDM por sus siglas en inglés (Cold Dark Matter). Su contraparte, es la “**Materia Oscura Caliente**” HDM por sus siglas en inglés (Hot Dark Matter), la cual se plantea, es relativista; es decir, viaja a velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

Nuevas ideas y teorías sobre los modelos cosmológicos surgirían en los años siguientes. Una de ellas sería la “**Inflación**”. Como mencionamos anteriormente, el descubrimiento del CMB fue la prueba de que el universo primitivo, atravesó por una fase caliente responsable de la radiación de fondo de acuerdo al modelo del Big Bang caliente. Aunque este modelo dejaba nuevas preguntas por resolver. Si el universo inició con un estado muy denso y caliente el cual bajo la cosmología estándar del

Big Bang sería caracterizado mediante una era dominada por la radiación, o por una era dominada por la materia, entonces esto implicaría una expansión desacelerada del universo. Este hecho representó un problema fundamental, pues era opuesto a la interpretación cosmológica que se tenía. Para reconciliar esta implicación, sería necesario considerar una época de expansión acelerada del universo temprano; esto es, la Inflación.

Basándose en el modelo de universo de de Sitter, la Inflación fue propuesta por primera vez por Guth (77) y Sato (76) de forma independiente en 1981, como propuesta para solucionar los problemas que presentaba el modelo del Big Bang caliente. Este modelo de Inflación no reemplaza al modelo del Big Bang, sino más bien lo usa como una “adición auxiliar” a este que ocurrió en las primeras etapas del universo. La Inflación sería la época del universo primitivo en la que el universo sufrió una expansión exponencial en tan solo una fracción de segundo (74; 75).

Hacia 1984, gracias a algunas simulaciones numéricas de materia oscura fría CDM, la combinación Inflación + CDM se posicionaba como la interpretación cosmológica ganadora, aunque con algunas reservas que venían principalmente del modelo inflacionario (72).

Aún con estas alternativas a los modelos cosmológicos para explicar al universo y las observaciones que se tenían, la cosmología se mantenía en una crisis pues no había forma de comprobar o discriminar una propuesta de otra. La crisis cosmológica terminó con los experimentos a bordo del satélite COBE (1989-1992). El cual, por el nivel de sofisticación, proporcionó la información necesaria para el avance de la cosmología. El COBE pudo encontrar y mapear las fluctuaciones de temperatura en el CMB predichas por la teoría (Figura 1.2), además de proporcionar la información necesaria para descifrar el verdadero carácter del CMB. Estos nuevos experimentos y datos observacionales hicieron que la cosmología se volviera de nuevo un tema de gran interés para toda la comunidad científica, no solo de cosmólogos, pues había en esta nueva información un gran campo de estudio que explorar, así como la posibilidad de encontrar nuevos hallazgos experimentales. Esto fue un resurgimiento para la cosmología moderna (6; 16).

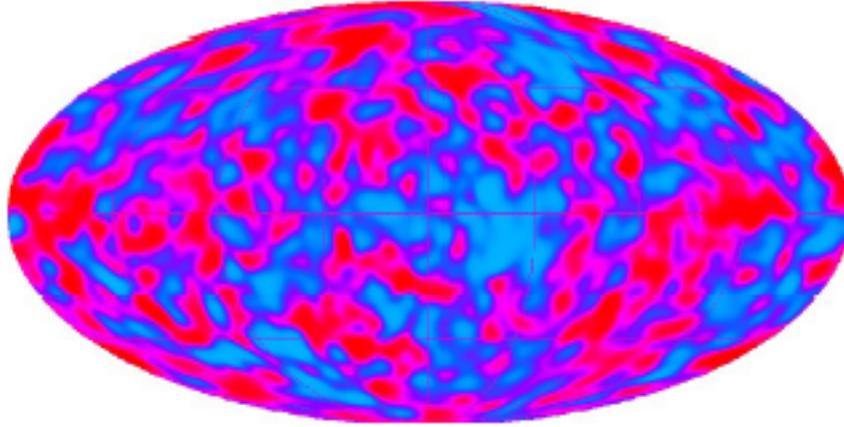
**El satélite COBE.**

Figura 1.2: *Mapa de fluctuación de temperatura en el CMB obtenido por el COBE después de cuatro años de operación* (16).

El satélite COBE contaba con dos instrumentos; el espectrómetro de infrarrojo lejano FIRAS (far infrared Spectrometer) y el radiómetro diferencial de microondas DMR (differential microwave radiometer). Al poco tiempo después del lanzamiento, FIRAS demostró que el espectro electromagnético del CMB tenía la forma de la radiación emitida por un cuerpo negro perfectamente medida con una precisión nunca antes alcanzada en el laboratorio (Figura 1.3). De la cual se podría calcular una temperatura de 2.725 K. Esto comprobó el origen de la radiación del fondo cósmico de microondas CMB a partir del equilibrio térmico de un universo primitivo caliente (Hot Big Bang). Por otra parte el instrumento DMR fue diseñado para detectar las fluctuaciones de temperatura en el nivel micro Kelvin, estas eran las correspondientes con la idea del crecimiento de las estructuras cosmológicas a través del colapso gravitacional, además, bajo el supuesto de que la forma de materia dominante en el universo sería materia oscura fría CDM. El COBE encontró las fluctuaciones en el nivel predicho, aunque la resolución angular del COBE era demasiado pobre para poder ver el espectro de potencias completo. Aun así, esto fue suficiente para apoyar de manera convincente el concepto de un colapso gravitacional. Por estos dos descubrimientos se otorgó el premio Nobel a John Mather y George Smoot; los científicos

responsables de FIRAS y DMR, respectivamente (16).

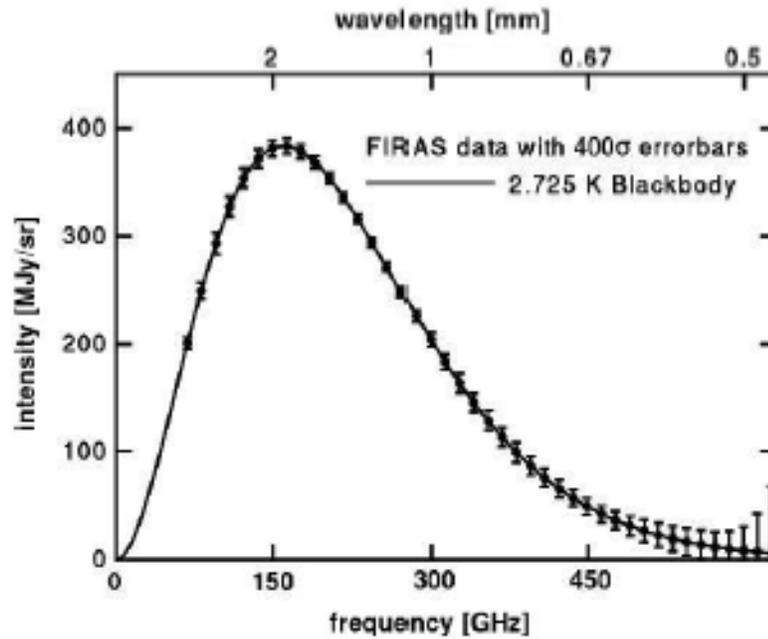


Figura 1.3: Espectro del CMB obtenido por el instrumento FIRAS del COBE, donde se confirma un comportamiento que asemeja al de una curva de densidad de radiación emitida por un cuerpo negro perfecto (16).

Después del COBE, dos satélites más serían lanzados; el Wilkinson Microwave Anisotropy Probe WMAP (2001), y el satélite Planck (2009). Los datos que se obtuvieron de estos satélites y su interpretación, pertenecen a la siguiente era de la cosmología moderna; época en que nos encontramos actualmente y que aún no ha sido escrita.

# Capítulo 2

## Cosmología.

### 2.1. Espacios de máxima simetría y Principio cosmológico.

El principio copernicano establece que la Tierra no es el centro del universo y que como observadores, no ocupamos un lugar especial en el cosmos. Enunciada por primera vez por Copérnico en el siglo XVI, hoy en día la idea es totalmente aceptada por los científicos y es un concepto asumido en muchas teorías cosmológicas. Por otra parte, el principio cosmológico nos dice que a grandes escalas (mayores a 150 Mpc), el universo posee dos propiedades importantes: la homogeneidad y la isotropía. La homogeneidad es la afirmación de que el Universo luce igual en cada punto del espacio, y la isotropía establece que el Universo luce igual en todas las direcciones donde se mire. Aunque a simple vista, pudiera parecer que estas dos propiedades hacen referencia a lo mismo, son en realidad condiciones diferentes, y no necesariamente que se cumpla una implica que se cumpla la otra. Por ejemplo, un Universo con un campo magnético uniforme es homogéneo, ya que en todos los puntos el campo es el mismo, pero no es isótropo porque las direcciones a lo largo de las líneas del campo se pueden distinguir de las perpendiculares a ellas. Alternativamente, una distribución esféricamente simétrica, vista desde su punto central, es isótropa pero no necesariamente homogénea (7). Un ejemplo ilustrativo que nos puede ayudar a

entender como la homogeneidad y la isotropía no son propiedades equivalentes lo encontramos en la Figura [2.1](#).

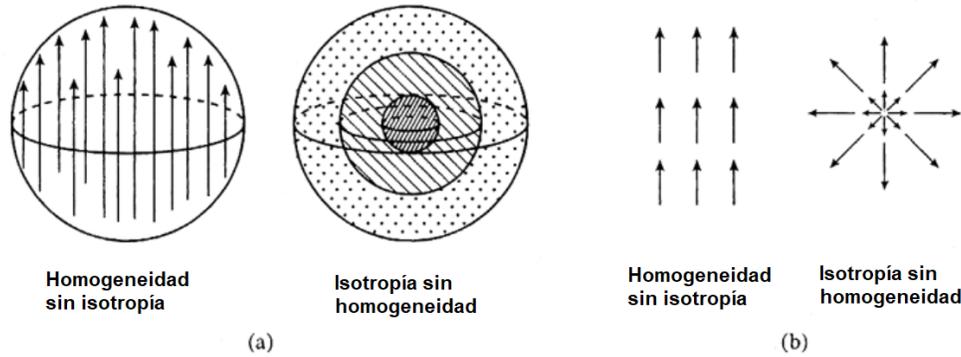


Figura 2.1: Se muestra de forma ilustrativa, ejemplos de cómo las propiedades de homogeneidad e isotropía, no son propiedades equivalentes. En el inciso (a) en dos dimensiones, y en el inciso (b) en tres dimensiones.

Un universo que cumpla con las propiedades que establece el principio cosmológico, es decir, que sea homogéneo e isótropo, se dice que es un espacio que se encuentra en máxima simetría. Un espacio donde para cualquier punto en donde nos situemos, observaremos en cualquier dirección una distribución con simetría esférica (isótropo), además se tendría la misma distribución en ese punto que en cualquier otro punto del espacio (homogéneo). De modo que podemos pensar en la isotropía como invariancia bajo rotaciones y la homogeneidad como invariancia bajo traslaciones adecuadamente generalizadas.

Como vimos en el Capítulo 1, la cosmología moderna tiene sus orígenes en las ecuaciones de campo de Einstein. La importancia matemática de suponer el principio cosmológico se encuentra en que nos permite simplificar tales ecuaciones, las cuales resultan muy difíciles de resolver sin disponer de simetrías.

Existen algunas evidencias que parecen sugerir que el universo efectivamente corresponde con el principio cosmológico (véase las referencias: [\(8\)](#), [\(9\)](#), [\(10\)](#), [\(11\)](#)). Estas evidencias provienen especialmente de los datos obtenidos del fondo cósmico

de micro ondas CMB, principalmente del universo primitivo antes de la época de la recombinación. Sin embargo, el principio cosmológico no ha sido confirmado en su totalidad, y se trata más bien de una suposición impuesta para la interpretación de las observaciones, de modo que este principio podría no coincidir con el universo real. No obstante, la razón principal por la que tendemos a considerar como supuesto el principio cosmológico no es que sea algo “correcto”, sino que por un lado, nos permite trabajar con los datos extremadamente limitados que nos proporciona la astronomía actual; además, el principio cosmológico, nos permite tener una base para desarrollar modelos cosmológicos que sean tanto calculables como predictivos, tal es el caso del modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM (12).

## 2.2. Métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Aplicar el principio cosmológico garantiza un espacio de máxima simetría. Aunque la homogeneidad y la isotropía son en realidad simetrías del espacio y no del espacio tiempo. Los espacios de máxima simetría no son modelos razonables del universo real, pero representan soluciones únicas localmente. Para describir el mundo real, nos vemos obligados a renunciar al principio cosmológico “perfecto”, que implica simetría en el espacio y el tiempo, y postular algo más indulgente. Resulta sencillo y coherente con la observación postular que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo, pero evoluciona en el tiempo.

El ejemplo más simple de una geometría cosmológica homogénea e isótropa está indicada por el elemento de línea:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1)$$

Donde  $a(t)$  es una función de la coordenada de tiempo  $t$  llamada factor de escala.

Consideramos una geometría de máxima simetría ya que este espacio tiempo lo podemos dividir en una parte temporal y otra espacial, de la siguiente forma:  $ds^2 =$

$-dt + dS^2$ . Donde la geometría espacial que resulta es homogénea e isotrópica, y está representada por  $dS^2$ ; un elemento de línea que caracteriza dicha geometría. Es decir que para  $t$  constante:

$$dS^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.2)$$

describe un conjunto de superficies espaciales. De modo que para algún instante  $t$  constante, nuevas coordenadas  $X = a(t)x$ ;  $Y = a(t)y$ ;  $Z = a(t)z$  pueden ser introducidas tomando la forma de:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (2.3)$$

Esto nos dice que la geometría de cada rebanada espacial  $t$  constante, es un espacio plano de tres dimensiones homogéneo e isotrópico. Y así un espacio tiempo localmente de máxima simetría.

Con esto podemos deducir que existe más de una métrica homogénea e isotrópica, de hecho cualquier métrica de la forma anteriormente descrita cumplirá con serlo. Lo que nos lleva a una interpretación más general de una métrica cuya geometría representa un espacio homogéneo e isotrópico. Consideramos nuestro espacio tiempo como  $a \times \Sigma$ , donde  $a$  representa la dirección del tiempo y  $\Sigma$  es un espacio tres dimensional de máxima simetría localmente homeomorfo al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^3$ . Entonces toda métrica del espacio tiempo de la forma:

$$ds^2 = -dt + a^2(t)d\sigma^2, \quad (2.4)$$

representará una geometría para un espacio homogéneo e isotrópico, con  $a(t)$  el factor de escala, que nos dice qué tan grande es la rebanada espacial  $\Sigma$  en el momento  $t$ . Y  $d\sigma^2$  es un elemento de línea independiente del tiempo en  $\Sigma$ . A estas se les llama las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker FLRW. Donde el caso más simple es el propio espacio plano euclidiano cuyo elemento de línea es:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.5)$$

pero existen otras dos. Comúnmente el espacio plano euclidiano se escribe en coordenadas polares como:

$$ds^2 = -dt + a^2(t) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.6)$$

Este es el **modelo plano** de las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Las otras dos métricas restantes son la esférica o cerrada, y la hiperbólica o abierta.

### Modelo cerrado.

La superficie de una esfera unitaria en un espacio ficticio euclidiano plano de cuatro dimensiones, es una geometría espacial homogénea e isótropa llamada esfera tres dimensional. Elegimos una esfera tres dimensional unitaria ya que la escala general eventualmente será descrita por el factor de escala  $a(t)$ . Si usamos coordenadas rectangulares para describir este espacio ficticio tendríamos las coordenadas  $(W, X, Y, Z)$ , ya que la superficie esférica se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones. Para este espacio, la superficie de una esfera está dada por:

$$W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \quad (2.7)$$

Una generalización de coordenadas polares en cuatro dimensiones sería:

$$\begin{aligned} X &= \sin \chi \sin \theta \cos \phi, & Y &= \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ Z &= \sin \chi \cos \theta, & W &= \cos \chi, \end{aligned}$$

donde el rango de cada uno de los ángulos sería el siguiente:  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Si introducimos la generalización de coordenadas polares en:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2, \quad (2.8)$$

tendríamos el elemento de línea para la superficie esférica tres dimensional:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (2.9)$$

representa el modelo cerrado. Esta es la métrica de un espacio tres dimensional homogéneo e isótropo; la tres esfera.

### Modelo abierto.

La geometría homogénea e isótropa restante posible para el espacio tridimensional es la geometría de un hiperboloide de Lorentz. Es una superficie tridimensional en el espacio tiempo plano de cuatro dimensiones, esto es análogo a la superficie tridimensional de una esfera en el espacio euclidiano cuatro dimensional plano.

De nuevo usando coordenadas rectangulares para describir este espacio, tendríamos las coordenadas  $(T, X, Y, Z)$ . La ecuación de este hiperboloide de Lorentz en el espacio de cuatro dimensiones sería:

$$-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -1. \quad (2.10)$$

Las coordenadas polares generalizadas serían:

$$\begin{aligned} X &= \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, & Y &= \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ Z &= \sinh \chi \cos \theta, & W &= \cosh \chi, \end{aligned}$$

y el rango de los ángulos sería:  $0 \leq \chi \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Introducimos estas coordenadas generalizadas dentro de:

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2, \quad (2.11)$$

esto nos da el elemento de línea para la superficie del hiperboloide de Lorentz tres

dimensional. Esto es:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (2.12)$$

representa el modelo abierto de las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Estos tres elementos de línea para universos homogéneos e isótropos se pueden representar de manera conjunta de la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt + a(t) \left[ d\chi^2 + \begin{Bmatrix} \sin^2 \chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2 \chi \end{Bmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \begin{Bmatrix} \text{cerrado} \\ \text{plano} \\ \text{abierto} \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

Reemplazando la coordenada  $\chi$  en los tres casos por una nueva coordenada radial  $r$  de la forma que sigue:

$$r = \sin \chi \quad (\text{cerrado}), \quad r = \chi \quad (\text{plano}), \quad r = \sinh \chi \quad (\text{abierto});$$

se podrían expresar todos los elementos de línea de cada uno de los tres modelos en una sola ecuación. Donde solo cambiaría un parámetro para obtener uno u otro elemento de línea (plano, abierto o cerrado). Al parámetro mencionado se le denomina “curvatura” o “parámetro de curvatura” y se representa por la letra  $k$ . Así la forma general de las métricas FLRW sería:

$$ds^2 = -dt + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.14)$$

La curvatura  $k$  admite tres posibles valores, siendo estos:  $-1$ ,  $0$ ,  $+1$ . Observemos que para  $k = 0$  se recupera el espacio euclidiano plano en coordenadas polares, esto es la forma plana de la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Cuando  $k = +1$  se tiene la forma cerrada, y cuando  $k = -1$  se tiene la forma abierta (Estas tres posibles geometrías cosmológicas de los modelos FLRW homogéneos e isótropos se representan gráficamente en la Figura [2.2](#)). Las métricas FLRW describen cada una

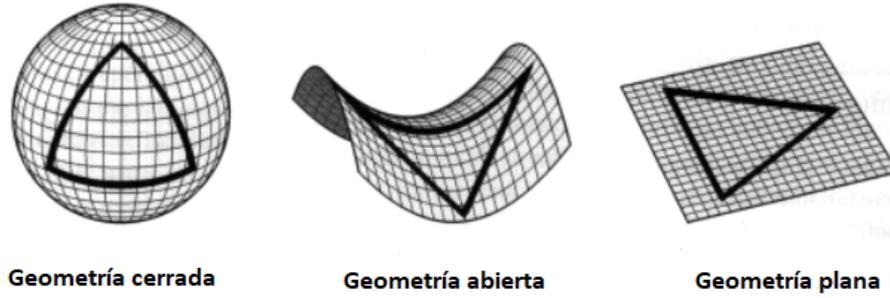


Figura 2.2: Se muestran las tres posibles geometrías cosmológicas de los modelos FLRW homogéneos e isotrópicos del Universo.

la evolución temporal de un espacio homogéneo e isotrópico que se hace más grande en el tiempo cuando  $a(t)$  incrementa, y más pequeño cuando  $a(t)$  decrece. Estas métricas son el primer paso para la comprensión de la evolución del universo, ya que proporcionan la información de la geometría del espacio (23), (24).

### 2.2.1. Tensor métrico

En ocasiones se representa la geometría del espacio tiempo mediante el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  de la siguiente forma:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es el elemento de línea expresado en términos del tensor métrico. En esta ecuación (2.15), en el último término después del segundo signo de igual se usa la convención de suma de Einstein. Los elementos  $dx^\mu$ ,  $dx^\nu$  representan los diferenciales de las diferentes coordenadas. Los valores que los índices  $\mu$  y  $\nu$  pueden tomar dependen de las dimensiones del espacio tiempo. Por ejemplo, en un espacio tiempo de cuatro dimensiones, el superíndice 0 corresponde a la coordenada temporal; es decir,  $dx^0 \equiv dt$ , mientras que los superíndices: 1, 2, 3, representan las coordenadas espaciales; es decir:  $dx^1 \equiv dx$ ,  $dx^2 \equiv dy$ ,  $dx^3 \equiv dz$ .

Al tensor métrico, en algunas ocasiones se le suele llamar simplemente métrica.

Ambos, el elemento de línea  $ds^2$  y el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , proporcionan toda la información necesaria referente a la geometría del espacio tiempo.

### 2.3. Ecuación de Friedmann.

A Friedmann le corresponde la gran distinción de haber sido el primero (en 1922) en contemplar y analizar un universo dinámico que se mueve por su propia gravedad. La ecuación de Friedmann describe la expansión del universo, y es por tanto, la ecuación más importante en cosmología.

Las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker se definen para cualquier comportamiento del factor de escala  $a(t)$ . Como se menciono anteriormente, las métricas FLRW son una consecuencia puramente cinemática de requerir homogeneidad e isotropía en las secciones espaciales del espacio tiempo (i.e. rebanadas espaciales a  $t$  constante). El paso siguiente para entender la evolución del universo será pasar a la dinámica a través de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución de  $a(t)$  (i.e. la ecuación de Friedmann o mejor dicho, las ecuaciones de Friedmann). Esto surge de aplicar la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

a las métricas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Donde el termino  $G_{\mu\nu}$  es el Tensor de Einstein, el cual se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

El termino  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento (del cual hablaremos mas adelante) y  $G$  es la constante de gravitación universal. Los términos de la ecuación (2.17) son el Tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  (el cual depende de la métrica y sus derivadas), el Escalar de Ricci  $R$ , y el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

La ecuación de Einstein (2.16) describe como la distribución de energía del universo curva el espacio tiempo y a su vez, como la curvatura del espacio tiempo cambia la

distribución de energía del universo y viceversa. Donde la medida de la curvatura del espacio tiempo la encontramos en el lado izquierdo, mientras que el lado derecho mide la energía y el momento del contenido del universo.

Ahora, por simplicidad, y porque es consistente con mucho de lo que hemos observado sobre el universo, el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  que encontraremos típicamente en cosmología es el de un fluido perfecto que además es isótropo (39; 79).

Un fluido perfecto es aquel que puede ser completamente especificado mediante dos cantidades, la densidad de energía  $\rho$  en el marco del reposo (es decir el marco de referencia en el cual el momento promedio de las partículas que componen el fluido es cero), y una presión  $p$  isótropa en el marco de reposo. Lo cual significa que un único parámetro  $p$  sirve para especificar la presión en cualquier dirección. Dicho de otro modo, un fluido perfecto se puede entender también, como un fluido sin conducción de calor y sin viscosidad. Una consecuencia de la isotropía en un fluido perfecto es que el tensor energía momento  $T^{\mu\nu}$  es diagonal en el marco del reposo. No hay un flujo neto de ninguna componente del momento en una dirección ortogonal. Además, las componentes espaciales distintas de cero deben ser todas iguales, esto es:  $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ . Las únicas dos variables independientes son, por lo tanto, la densidad de energía  $\rho = T^{00}$  y la presión  $p = T^{ii}$ . Más aún, no necesitamos un subíndice en  $p$ , ya que la presión es igual en todas las direcciones (24; 39). Por lo tanto, el tensor de energía-momento de un fluido perfecto toma la siguiente forma en su marco de reposo:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Se puede ver que la diagonal de este tensor es:  $T_{\nu}^{\mu} = (-\rho, p, p, p)$  y por lo tanto su traza es:  $T = -\rho + 3p$ .

Ahora la ecuación de Einstein (2.16) se puede expresar también a través de la

traza del tensor energía momento del modo siguiente:  $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$ . De acuerdo a esto, calculamos la componente de la ecuación de Einstein  $\mu\nu = 00$ , esta es la ecuación:  $R_{00} = 8\pi G(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$ . Donde  $T_{00} = -\rho$  es el elemento  $\mu\nu = 00$  del tensor energía momento,  $T$  es la traza de dicho tensor,  $g_{00}$  es la componente  $\mu\nu = 00$  del tensor métrico y  $R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a}$ , es la componente  $\mu\nu = 00$  del tensor de Ricci en el marco de las metricas FLRW. Por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} 3\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G \left( -\rho - \frac{1}{2}(-\rho + 3p) \right) \\ &= 8\pi G \left( \frac{-\rho}{2} - \frac{3p}{2} \right) \\ &= -4\pi G(\rho + 3p). \end{aligned}$$

Por último:

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (2.19)$$

De acuerdo a la ecuación de Einstein. La cual podemos reescribir y llegar a la ecuación:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.20)$$

Después calculamos la componente de la ecuación de Einstein  $\mu\nu = ij$  esta es la ecuación:  $R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$ . Nuevamente  $T_{\mu\nu}$  es un elemento del tensor energía momento,  $T$  es la traza de dicho tensor,  $g_{ij}$  es la componente  $\mu\nu = ij$  del tensor métrico y  $R_{\mu\nu} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2}$  es una componente  $\mu\nu = ij$  del tensor de Ricci nuevamente en el marco de las metricas FLRW. De lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} &= 8\pi G \left( p - \frac{1}{2}(-\rho + 3p) \right) \\ &= 8\pi G \left( p + \frac{\rho}{2} - \frac{-3p}{2} \right) \\ &= 8\pi G \left( \frac{-p}{2} + \frac{\rho}{2} \right) \\ &= 4\pi G(\rho - p). \end{aligned}$$

Así obtenemos la ecuación:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \quad (2.21)$$

Se puede sustituir la ecuación (2.20) en (2.21) para eliminar las segundas derivadas.

Así obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{-4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) \\ \Rightarrow & -4\pi G\left(\frac{\rho}{3} + p\right) + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} - 4\pi G(\rho - p) = 0 \\ \Rightarrow & -4\pi G\left(\frac{4\rho}{3}\right) + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\kappa}{a^2} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{2\dot{a}^2}{a^2} = \frac{16\pi G}{3}\rho - \frac{2\kappa}{a^2}. \end{aligned}$$

Por ultimo obtenemos:

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (2.22)$$

Esta última es la ecuación de Friedmann (2.22). A menudo se le conoce también a la ecuación (2.20) como la segunda ecuación de las ecuaciones de Friedmann (24).

### Ecuación de conservación o continuidad

Una relación importante de establecer, es la ecuación de conservación de la energía para un fluido perfecto. De acuerdo a esto, tenemos por conservación que tanto la energía como el momento deben conservarse, por consiguiente, del tensor de energía momento se debe cumplir que:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.23)$$

Consideramos la componente cero de la ecuación de energía, la cual corresponde a la evolución de su densidad, esto es  $\nu = 0$ , así tenemos:

$$\partial_{\mu} T_0^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T_0^{\lambda} - \Gamma_{\mu 0}^{\lambda} T_{\lambda}^{\mu} = 0, \quad (2.24)$$

y por isotropía se tiene que  $T_0^i = 0$ , de lo cual se sigue que:

$$-\partial_0\rho - \Gamma_{\mu 0}^\mu\rho - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = 0. \quad (2.25)$$

Por último tenemos la ecuación de conservación de la energía para un fluido perfecto (24; 62):

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.26)$$

Hasta el momento hemos partido de modelar el contenido del universo mediante un fluido perfecto. Con la ecuación de Friedmann tenemos una descripción de cómo evoluciona el universo respecto a su expansión, es decir una dinámica de fluido, y tenemos también una ecuación de conservación. Por lo que tenemos en total dos ecuaciones y las variables:  $\rho$ ,  $p$ , y  $a$ , por lo que necesitamos una ecuación más para cerrar el sistema. De modo que vamos a sugerir una ecuación de estado para este hipotético fluido, es decir una ecuación que establezca una relación entre  $p$  y  $\rho$ ; las variables de estado. Así, definimos entonces la ecuación de estado  $w$  y la relación entre  $p$  y  $\rho$  a partir de esta como sigue: Podemos suponer en su forma más general que la presión es una función de la densidad, esto es  $p = w(\rho)$ , donde la forma más simple que puede tener esta función  $w(\rho)$  que depende de  $\rho$  es la de una constante  $w_0$ , multiplicada por  $\rho$  es decir:

$$p = w_0\rho. \quad (2.27)$$

Si este es el caso, nos podemos permitir el considerar el parámetro  $w_0 = \frac{p}{\rho}$ . Y de este modo realizamos los siguientes cambios en la ecuación de conservación.

Multiplicamos la ecuación (2.26) por  $\frac{1}{\rho}$  y reacomodamos. Con lo cual tenemos:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\left(\frac{\rho}{\rho} + \frac{p}{\rho}\right)\frac{\dot{a}}{a}.$$

Usando  $w = \frac{p}{\rho}$ , la ecuación resultante nos da:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w_0)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.28)$$

Para resolver la ecuación diferencial que resulta consideremos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{a^{3(1+w_0)}} \frac{d}{dt} (\rho a^{3(1+w_0)}) = 0. \quad (2.29)$$

Notamos que al desarrollar la ecuación (2.29) se obtiene la ecuación (2.28). Así, podemos obtener una expresión para  $\rho$  a partir de (2.29). Observemos que para que se cumpla la ecuación (2.29) se debe tener que  $\rho a^{3(1+w)}$  debe ser igual a una constante. Por último, de esto podemos deducir que:

$$\rho \propto a^{-3(1+w_0)}. \quad (2.30)$$

El paso siguiente será considerar qué posibles valores constantes le podemos dar a la ecuación de estado. Para esto recordamos que la ecuación de estado especifica cómo es que se relaciona la densidad con la presión en un fluido perfecto. El modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM contempla que el contenido del universo se compone de materia, radiación, energía oscura y curvatura (más adelante se explica a qué se refiere). Que por sus diferentes propiedades, y debido a que se consideran como fluidos perfectos, podemos para simplificar, tratar a cada una de estas contribuciones al contenido del universo por separado (23; 24). A continuación se muestran las ecuaciones de estado para dos de esas contribuciones; materia y radiación. Posteriormente después de definir algunos parámetros importantes, se definirá la ecuación de estado para otra contribución más; “la curvatura”. El desarrollo de esta aparece al final del capítulo. Por último, la ecuación de estado para la energía oscura se presentará en el capítulo siguiente. Así, las ecuaciones de estado serían las siguientes:

### Ecuación de estado para la Materia

Se considera que la materia está formada de un conjunto de partículas que no colisionan entre sí, y que por lo tanto cumplen con la condición de que su presión

es mucho menor que su densidad de energía  $|p| \ll \rho$  por lo que esencialmente tienen presión cero. Se considera materia a los siguientes dos tipos:

- **Bariones.** Básicamente las partículas bariónicas son dos; el protón y el neutrón. Aunque se considera a los átomos como partículas bariónicas ya que la masa del electrón está muy por debajo de la masa del protón o el neutrón, y por lo tanto su contribución a la masa total del átomo es muy pequeña. Desde el punto de vista de la Cosmología, se usa el término bariones para referirse a la materia ordinaria. Ejemplos de este tipo incluyen las estrellas, galaxias y planetas para los cuales la presión es despreciable en comparación con la densidad.
- **Materia oscura.** Representa la mayor parte del contenido de materia en el Universo. Se sabe que interactúa con la materia ordinaria únicamente de forma gravitacional. Este tipo de materia no emite ni absorbe luz; es decir no interactúa con el campo electromagnético. Son un tipo de partículas que se supone pueden existir en el universo pero que no forman parte del modelo estándar de partículas. Se puede clasificar a la materia oscura en dos tipos: materia oscura caliente HDM y materia oscura fría CDM. Donde las palabras; “caliente” y “fría”, se refieren a partículas que son relativistas y partículas que son no relativistas respectivamente. Sus propiedades son muy inciertas y un tema de constante debate entre los cosmólogos.

La relación presión densidad para la materia a través de la ecuación de estado dada por la ecuación (2.27) es:

$$p = w_m \rho_m = 0.$$

Por lo que para el caso de la materia  $w_m = 0$ . Y por ende, la relación de la ecuación (2.30) para el caso de la materia es:

$$\rho_m \propto a^{-3}. \tag{2.31}$$

Donde  $\rho_m$  es la densidad para la materia.

**Ecuación de estado para la Radiación.**

Se considera a la radiación como partículas relativistas donde la densidad de energía es dominada por el término cinético. Se considera radiación a los siguientes dos elementos:

- **Fotones.** En la visión de la mecánica cuántica, los fotones son partículas sin masa que se mueven a la velocidad de la luz. En otra perspectiva, los fotones son radiación electromagnética, a la cual comúnmente se le conoce como luz. Tiene una gran variedad de frecuencias, y es responsable de nuestra percepción visual del Universo. La energía cinética de los fotones les proporciona una presión conocida como presión de radiación.
- **Neutrinos.** Son partículas que poseen masas muy pequeñas, por lo menos diez mil veces menor que la del electrón, lo cual les permite moverse a velocidades cercanas a la de la luz. Por ello, en términos cosmológicos el neutrino suele considerarse como un tipo de materia relativista.

Derivado de la teoría de radiaciones tenemos que la presión para este componente corresponde a  $p = \frac{1}{3}\rho_r$ . Por lo que la relación presión densidad a través de la ecuación de estado (2.27) debería corresponder con la relación de la presión de radiación de la forma siguiente:

$$p = w_r \rho_r = \frac{1}{3} \rho_r.$$

Donde ahora  $\rho_r$  corresponde a la densidad de la radiación. De este modo deducimos que para la radiación, la ecuación de estado toma un valor  $w_r = \frac{1}{3}$ . Y por lo tanto la ecuación (2.30) para el caso de la radiación sería:

$$\rho_r \propto a^{-4}. \tag{2.32}$$

## 2.4. Parámetros cosmológicos

Los parámetros cosmológicos, también conocidos como parámetros estándar son las cantidades principales utilizadas para describir el universo. No son derivadas de una teoría fundamental y su objetivo es proporcionar una descripción de los observables astrofísicos y cosmológicos actuales ya que varias de estas mediciones hacen uso de la física o del funcionamiento y sensibilidad de los detectores, por tanto se interpretan más naturalmente.

Un sinnúmero de terminologías es asociada a los parámetros cosmológicos. De entre los más comúnmente usados se encuentran; el parámetro de densidad ( $\Omega$ ), el parámetro de Hubble ( $H$ ), y el parámetro de desaceleración ( $q$ ). Aunque se pueden encontrar muchos otros como por ejemplo: la edad del Universo, la temperatura en el presente de los neutrinos de fondo, la época de la igualdad materia-radiación o la razón barión-fotón (22; 25).

En esta sección haremos una introducción de los más básicos, y los relacionamos con las ecuaciones presentes en este capítulo.

### Parámetro de Hubble

La tasa de expansión es caracterizada por la razón  $\frac{\dot{a}}{a}$ . El parámetro de Hubble es definido precisamente como esta razón. Esto es:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.33)$$

El valor del parámetro de Hubble en la época presente es la constante de Hubble ( $H_0$ ). Mediciones actuales de la constante de Hubble le asignan un valor en el intervalo

$$40\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \lesssim H_0 \lesssim 100\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}. \quad (2.34)$$

### Parámetro de densidad

Otro parámetro importante es el parámetro de densidad, el cual se define como:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} \quad , \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}. \quad (2.35)$$

Donde  $\rho_{crit}$ ; la densidad crítica está definida como:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.36)$$

Generalmente, la densidad crítica cambia con el tiempo.

Usando la definición de estos parámetros podemos reescribir la ecuación de Friedmann del modo siguiente: Primero sustituimos  $H$  en la ecuación (2.22) lo cual nos da:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}. \quad (2.37)$$

Dividimos ambos lados entre  $H^2$  para obtener:

$$\frac{8\pi G}{3H^2} \rho - \frac{k}{a^2 H^2} = 1. \quad (2.38)$$

Sustituimos el parámetro de densidad en la ecuación (2.38). Esto es:

$$\Omega - \frac{k}{a^2 H^2} = 1. \quad (2.39)$$

Recordemos que anteriormente se mencionó que el contenido del universo se debía a diferentes contribuciones de elementos (materia, radiación, energía oscura), por lo que  $\rho$  de la ecuación (2.38) representaría en realidad

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda,$$

donde cada una de estas contribuciones tiene su propia densidad. El parámetro de densidad, se define por separado para cada uno de estos elementos, teniendo así:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m \quad , \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r \quad , \quad \Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda. \quad (2.40)$$

Si definimos además una densidad hipotética para la curvatura, del modo siguiente:

$$\rho_k = -\frac{3k}{8\pi G a^2}. \quad (2.41)$$

Y su parámetro de densidad:

$$\Omega_k = -\frac{k}{H^2 G a^2}. \quad (2.42)$$

La ecuación de Friedmann puede entonces reescribirse como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i. \quad (2.43)$$

Donde  $\sum_i \rho_i$  indica la suma de las densidades de las contribuciones al contenido del universo.

Si dividimos la ecuación (2.43) entre  $H^2$ , e intercambiamos las  $\rho_i$  por los parámetros de densidad ( $\Omega_i$ ) obtenemos:

$$\sum_i \Omega_i = 1. \quad (2.44)$$

Esta expresión nos dice que la suma del valor de todos los parámetros de densidad debe ser igual a uno. Esta importante propiedad será usada más adelante.

La importancia de los parámetros cosmológicos mencionados está en que si se tienen los valores de las densidades de energía, con sus respectivas ecuaciones de estado, así como el valor de la curvatura  $k$ , se podrá resolver la ecuación de Friedmann, y de esta forma obtener la historia completa de la evolución del factor de escala  $a(t)$  (24).

### Ecuación de estado para el término de curvatura.

Ya que definimos una densidad para el término de curvatura de la ecuación de Friedmann, vamos ahora obtener un valor de la ecuación de estado para este término de curvatura conforme a la ecuación (2.27).

Vemos desde la ecuación (2.43) y en la ecuación (2.44) que la curvatura se puede considerar como parte del contenido del universo (esto de forma hipotética como se mencionó). Y se le definió además una densidad de curvatura  $\rho_k$  por lo que podemos suponer de este modo una presión a esta densidad, y así mismo una ecuación de estado de curvatura  $w_k$  que relacione estas variables. Para esto vamos a considerar las ecuaciones (2.41) y (2.30), esta última para el caso de la densidad de curvatura  $\rho_k$ . Notamos que en ambas ecuaciones se tiene el factor de escala elevado a alguna potencia:  $a^{-2}$  para la ecuación (2.41) y  $a^{-3(1+w)}$  para la ecuación (2.30). Ambas ecuaciones son expresiones de la densidad.

Observemos que el término que acompaña a  $a^{-2}$  en la ecuación (2.41) es una constante ya que suponemos un valor fijo de  $k$  para cada geometría determinada según el modelo que consideremos. Si fusionamos ambas ecuaciones y consideramos lo mencionado, podemos dejar de lado las constantes y el símbolo de proporcionalidad y pretender la igualdad  $a^{-2} = a^{-3(1+w)}$  del factor de escala. De aquí podemos despejar  $w_k$ . Igualando los exponentes, obtenemos el valor de la ecuación de estado para el término de curvatura que estábamos buscando, esto es:

$$w_k = -\frac{1}{3}. \quad (2.45)$$

Y volviendo a la ecuación (2.30), la relación de proporcionalidad entre la densidad de curvatura con el factor de escala resultaría:

$$\rho_k \propto a^{-2}. \quad (2.46)$$

En el siguiente capítulo se analizará la ecuación de estado para el componente faltante del contenido del universo; la energía oscura. Posterior a una discusión teórica, se dará primero la ecuación de estado de la constante cosmológica, que es la equivalente a la ecuación de estado de la energía oscura para el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. Después en el Capítulo 4 se analizará la ecuación de estado para la energía oscura para modelos alternativos a la constante cosmológica.

# Capítulo 3

## Energía oscura.

La energía oscura es la explicación a la expansión acelerada del universo. Coloquialmente se dice que es “aquello” que causa dicho estado. En la actualidad se le considera como un misterioso componente más a la contribución de energía del universo. Más aún, esta energía oscura sería el componente dominante.

Observaciones sugieren que la tierra, los planetas, las estrellas y todo lo que nos resulta familiar constituye sólo un 4 % de la totalidad de energía del universo. Mientras que aproximadamente el 21 % sería materia oscura fría CDM. El 75 % restante sería la energía oscura cuya naturaleza no ha podido ser explicada satisfactoriamente, y por tal motivo, es actualmente uno de los misterios más grandes para la ciencia.

### 3.1. Expansión acelerada del universo. Constante cosmológica ( $\Lambda$ ).

Como se mencionará más adelante, la primera interpretación que se le dio a la energía oscura fue la de una manifestación efectiva de una constante cosmológica, la cual es añadida a las ecuaciones de campo de Einstein. Esto es, partiendo de la ecuación de Einstein (2.16) al añadir la constante cosmológica  $\Lambda$  esta ecuación se modifica de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Donde: nuevamente,  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $g_{\mu\nu}$  es tensor métrico,  $G$  es la constante de gravitación, y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento. Esta nueva ecuación, con este término añadido; la constante cosmológica, modifica la dinámica del universo. Para entender cómo se modifica esta dinámica, nos enfocaremos en considerar cómo esta constante cosmológica modifica las ecuaciones de Friedmann.

Como lo hicimos anteriormente, primero derivamos las ecuaciones de Friedmann a partir de la ecuación de Einstein. Para esto, partiendo del mismo tensor de energía-momento de la ecuación (2.18), consideraremos: con el nuevo término que involucra la constante cosmológica, los elementos del tensor de curvatura de Einstein se modifican de la siguiente forma:

$$\frac{G_{22}}{g_{22}} = \frac{G_{33}}{g_{33}} = \frac{G_{44}}{g_{44}} = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda, \quad (3.2)$$

$$\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} + \Lambda, \quad (3.3)$$

son los únicos elementos diferentes de cero del tensor de Einstein, ya que  $G_{\mu\nu} = 0$  cuando  $\mu \neq \nu$ . Cuando sustituimos estos valores en las ecuaciones de campo, aplicado sobre el tensor de energía momento ecuación (2.18) con diagonal  $(-\rho, p, p, p)$ , tenemos dos ecuaciones. El elemento  $\mu\nu = 00$  dado por:

$$-\frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3k}{a^2} + \Lambda = -8\pi G\rho, \quad (3.4)$$

y el elemento  $\mu\nu = ij$  dado por:

$$-\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda = 8\pi Gp. \quad (3.5)$$

Ahora despejando  $\frac{\dot{a}^2}{a^2}$  de la ecuación (3.4) y sustituyendo en la ecuación (3.5) tendríamos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\ddot{a}}{a} - \left( \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \right) - \frac{k}{a^2} + \Lambda + 8\pi Gp \\
& \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Recordando que el parámetro de Hubble se define como  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ , la ecuación (3.4) toma la forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.7}$$

Estas últimas, ecuación (3.6) y ecuación (3.7) son las ecuaciones de Friedmann que contemplan la constante cosmológica. Estas también son soluciones homogéneas e isotrópicas de las ecuaciones de campo de Einstein.

La ecuación (3.7) nos dice que hay tres términos compitiendo entre sí, los cuales dictan el curso de la expansión del universo: el término de densidad, el término de la constante cosmológica y el término de curvatura. Por otro lado, de la ecuación (3.6) vemos claramente que  $\Lambda$  contribuye de forma opuesta al término de presión, por lo que exhibe un efecto repulsivo. Este efecto es la interpretación de la presión negativa que se aprecia en las observaciones.

Nótese la diferencia de la ecuación (3.7) con la ecuación (2.22) del Capítulo 2; ambas representan la ecuación de Friedmann, con y sin la constante cosmológica  $\Lambda$  respectivamente.

Así, del mismo modo que en el capítulo anterior establecimos un parámetro de densidad para el término de curvatura  $\Omega_k$ , definiremos ahora un parámetro de densidad para el término de la constante cosmológica, esto es:

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{3.8}$$

Tenemos con esto un nuevo parámetro de densidad, el cual debería ser consistente con la ecuación (2.44) (13; 38; 30).

Hemos obtenido de este modo las ecuaciones que marcan la dinámica del universo. Notamos que para completar las ecuaciones importantes del capítulo anterior nos hacen falta dos; la ecuación de conservación o continuidad y la ecuación de estado, en este caso para la constante cosmológica (energía oscura), en las cuales nos enfocaremos a continuación pero primero daremos una introducción del modelo cosmológico estándar o  $\Lambda$ CDM.

## 3.2. Modelo $\Lambda$ CDM

En marzo de 1995 Lawrence M. Krauss y Michael S. Turner proponen en el artículo “*The cosmological constant is back*” (73), el regreso de la constante cosmológica, demostrando que esta, daba solución a los problemas de Inflación + CDM. Un año más tarde, en 1996 en la reunión de Princeton: “*Critical Dialogues in Cosmology*”, se le pidió a Turner que expusiera el caso de  $\Lambda$ CDM en una sesión dedicada a las diferentes versiones que había de Inflación + CDM (72). Ya para el cambio de siglo, la combinación entre evidencias (las cuales se verán más adelante) de aceleración cósmica a partir de SNIa y evidencias de CMB para un universo plano ( $\Omega_k = 0$ ) había seleccionado a un claro ganador; el modelo  $\Lambda$ CDM, el cual incorpora: la materia oscura fría CDM, la energía oscura como constante cosmológica  $\Lambda$ , y condiciones iniciales inflacionarias. El modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM se basa en la Relatividad General, en las métricas homogéneas e isotropas de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker y en la ecuación de Friedmann. Usa los parámetros cosmológicos de densidad  $\Omega$ , el parámetro de Hubble  $H$ , entre otros que no se tratan en este trabajo (69).

El modelo  $\Lambda$ CDM además contempla que la densidad de energía oscura  $\rho_\Lambda$  es siempre constante (1). A continuación, usaremos este hecho para derivar un valor de la ecuación de estado para la constante cosmológica.

### 3.2.1. Ecuación de estado para la constante cosmológica $w_\Lambda$ .

En el capítulo anterior se definió en la ecuación (2.40) el parámetro de densidad para la energía oscura. Por otro lado, en este capítulo tenemos un parámetro de

densidad para el término de la constante cosmológica de la ecuación de Friedmann (3.8). Como ya se mencionó ambos parámetros deben ser consistentes con la ecuación (2.44). Para esto, suponiendo que la energía oscura para el modelo  $\Lambda$ CDM es la interpretación efectiva de la constante cosmológica, nos propondremos derivar una expresión para la densidad de energía oscura que involucre la constante cosmológica a partir de los parámetros de densidad; de energía oscura, y constante cosmológica del modo siguiente. Primero igualamos ambos parámetros como sigue:

$$\frac{\Lambda}{3H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\Lambda. \quad (3.9)$$

Después despejamos  $\rho_\Lambda$  con lo cual obtenemos:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.10)$$

Es la densidad de energía oscura definida a partir de la constante cosmológica  $\Lambda$ . Podemos ver que, ya que  $\Lambda$  es una constante, entonces  $\rho_\Lambda$  será también constante. Consistentemente con el modelo  $\Lambda$ CDM.

Ahora, si recordamos la ecuación de conservación (2.28). Para la densidad de energía oscura, esta ecuación sería:

$$\dot{\rho}_\Lambda = -3(1 + w_\Lambda) \rho_\Lambda \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.11)$$

Donde como se mencionó anteriormente  $\rho_\Lambda$  es una constante, por lo que  $\dot{\rho}_\Lambda$  es igual a cero. Después, ya que como  $\rho_\Lambda$  y  $\frac{\dot{a}}{a}$  se suponen distintos de cero, se tiene que  $(1 + w_\Lambda) = 0$ . Con lo que concluimos que

$$w_\Lambda = -1. \quad (3.12)$$

Es la ecuación de estado para la constante cosmológica que representa la energía oscura y pertenece al modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. Un modelo en el que al igual que  $\Lambda$ ,  $w_\Lambda$  también es constante.

Tenemos ahora el valor de la ecuación de estado que hacía falta en el capítulo

anterior. A modo de recordar los anteriores, en la Tabla 3.1 se muestran cada uno de los valores de las ecuaciones de estado de cada uno de los componentes que conforman el contenido total de energía del universo.

Componente	$w_i$
Constante cosmológica	-1
Curvatura	$-\frac{1}{3}$
Materia	0
Radiación	$\frac{1}{3}$

Tabla 3.1: Se muestran los valores de las ecuaciones de estado de cada una de las contribuciones al contenido del universo de acuerdo al modelo  $\Lambda$ CDM.

La parametrización  $w_\Lambda = -1$ ; esto es, la ecuación de estado de la energía oscura, de la ecuación (3.12), se propuso por primera vez en 1997 en el artículo de Michael S. Turner y Martin White: “CDM Models with a Smooth Component” (71), bajo la motivación de dar solución a los dilemas que dejaban las predicciones del modelo inflacionario. En este artículo se generaliza la idea de un componente suave desconocido, que posee una gran presión negativa, a través de introducir el parámetro de ecuación de estado  $w_\Lambda \equiv \frac{p_\Lambda}{\rho_\Lambda}$ , con  $w_\Lambda < 0$  (71; 72). Esta parametrización asociada a  $\Lambda$ , logró un éxito importante, en parte debido a que al año siguiente (1998), se encontraron las primeras evidencias de la aceleración de la expansión del universo; ante la cual, una de las explicaciones que se le dio (como veremos a continuación), se relacionaba con la constante cosmológica.

### 3.3. Evidencias de energía oscura

#### Supernovas del tipo Ia (SNIa).

Las primeras evidencias de la expansión acelerada del universo fueron descubiertas gracias a los estudios de supernovas del tipo Ia (SNIa). Estas supernovas son objetos muy brillantes; tanto como una galaxia completa, las cuales tienen la característica de que sus curvas de brillo siempre tienen la misma forma básica debido a su proceso

de formación, lo que permite que se puedan estandarizar. Por tal motivo son conocidas como “candelas estándar” (standard candles). Las SNIa se han utilizado durante décadas para medir distancias a través del universo.

Una supernova es la explosión de una estrella. Hay dos tipos de supernovas. La primera ocurre en un sistema estelar binario, es decir, un sistema conformado por dos estrellas, donde una de las cuales es una enana blanca que roba materia a la estrella que la acompaña. Cuando la enana blanca acumula mucha materia, explota produciendo la supernova. El segundo tipo ocurre cuando una estrella se queda sin combustible, entonces la materia fluye hacia su núcleo. Cuando el núcleo se vuelve tan pesado que no puede soportar su propia fuerza gravitacional, colapsa y la estrella explota produciendo la supernova.

La forma en que las supernovas nos permiten calcular distancias relativas es a través de su brillo aparente. Esto está relacionado con el hecho de que la luz emitida por un objeto estelar se desplaza hacia el rojo debido a la expansión del universo. La longitud de onda  $\lambda$  aumenta proporcionalmente al factor de escala  $a$ , cuyo efecto puede ser cuantificado por el corrimiento al rojo  $z$ , como:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (3.13)$$

donde  $a_0$ ,  $\lambda_0$  son los valores dados en el tiempo presente del factor de escala y la longitud de onda respectivamente.

Existen varias formas de medir distancias en un universo en expansión. Una de ellas es a través de la luminosidad de un objeto astronómico. En este caso la luminosidad absoluta  $L_s$  del objeto y el flujo de energía  $F$  a una distancia  $D$  están relacionados mediante

$$F = \frac{L_s}{4\pi D^2}. \quad (3.14)$$

Al generalizar esto a un universo en expansión, se define la distancia de luminosidad,  $D_L$  como:

$$D_L = \sqrt{\frac{L_s}{4\pi F}}. \quad (3.15)$$

Que nos da una medida de la distancia a la cual se encuentra el objeto astronómico. Sin embargo, en la práctica otro factor es más importante al hacer observaciones, este es el módulo de distancia estandarizado, el cual se deriva de la relación empírica

$$\mu_{SN} = m_b^* + \alpha X - \beta C - M_B, \quad (3.16)$$

que surge al observar curvas de luz. Con  $X$  el parámetro de estiramiento,  $C$  el parámetro de color,  $M_B$  la magnitud absoluta,  $m_b^*$  el pico de magnitud observada en el marco de la banda azul ( $B$ ), y  $\alpha$ ,  $\beta$  son parámetros que dependen de las propiedades del objeto observado. Así, el módulo de distancia es (25; 62):

$$\mu(z) = 5 \log \frac{D_L}{Mpc} + 25 = m_B - M_B. \quad (3.17)$$

Esta ecuación es la forma más común para estimar distancias a galaxias y objetos astronómicos.

### Evidencias.

Estudiando supernovas del tipo Ia, dos equipos publicaron por primera vez datos que implicaban una aceleración cósmica: Riess et al. [*high-z supernova team (HSST)*] (1998) (27) y Perlmutter et al. [*supernova cosmology project (SCP)*] (1999) (28). El modelo más simple que explicó esto fue el de introducir el término  $\Lambda$  a las ecuaciones de campo y considerar un universo plano. El mejor ajuste que se encontró fue que  $\rho_\Lambda$  era mucho mayor que la densidad de materia (26). Algunos de los aspectos más importantes de ambos artículos son los siguientes: En el artículo de Riess, se encontró que los datos se podían explicar a través de una constante cosmológica positiva  $\Lambda > 0$ , es decir  $\Omega_\Lambda > 0$ , y teniendo  $\Omega_m > 0$ , con una baja densidad de masa  $\Omega_m \approx 0.2$  (27). Por otro lado, para un universo plano ( $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ), Perlmutter encontró  $\Omega_m^{\text{flat}} = 0.28_{-0.08}^{+0.09}$  ( $1\sigma$  estadística)  $_{-0.04}^{+0.05}$  (sistemática identificada). Además, se encontró que si  $\Lambda = 0$  los datos son fuertemente inconsistentes con una cosmología plana. Una cosmología abierta con  $\Lambda = 0$  no ajusta bien a los datos. Se indica que la constante cosmológica es “no cero” y positiva con un nivel de confianza de  $P(\Lambda > 0) = 99\%$

(28). Esto muestra que cerca del 70% de la densidad de energía del universo actual consiste de energía oscura (30).

Otro artículo importante en el que se encuentran evidencias de la expansión acelerada del universo fue el artículo “*Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements*” de Huterer D. y Turner M. (1999) (31). En este artículo se toma el término “Energía oscura” para describir  $\rho_\Lambda$ . Ésta se toma como una manifestación efectiva de la constante cosmológica  $\Lambda$  de Einstein, pero con la cualidad de que puede variar con el tiempo y la posición (26). Concretamente en el artículo, encuentran a partir de mediciones de distancias de supernovas Ia que el universo se está acelerando y que aproximadamente dos tercios de la densidad crítica de energía es una componente de “energía oscura” la cual ejerce una presión negativa. Además, también se contemplan diferentes posibilidades de lo que puede ser la energía oscura. Una de ellas es la de un campo escalar que evoluciona en el tiempo, en este artículo se hacen simulaciones usando el método Monte Carlo (31).

Años más tarde, el equipo de “*The High- $z$  Supernova Search Team*” (2003) descubrió y observó 8 nuevas supernovas en el intervalo de corrimiento al rojo de  $z = 0.3 - 1.2$  (32) que confirmaron de manera independiente los resultados Riess et al. (1998) (27) y Perlmutter et al. (1999) (28) de la aceleración del universo. Proporcionan además, otra confirmación cuantitativa de la importancia de la energía oscura, y que esta constituye una poderosa prueba de estar relacionada con el origen cosmológico de la aceleración del universo. Estas observaciones se interpretaron proporcionando restricciones a los parámetros cosmológicos y de  $w$ ; la ecuación de estado de la energía oscura. Se encontró que si  $w = -1$ , entonces;  $\Omega_\Lambda - 1.4\Omega_m = 0.35 \pm 0.14$ . Al incluir la restricción de un universo plano se encontró  $\Omega_m = 0.28 \pm 0.05$ . Y también sobre la base de un universo plano se ubica el valor de la ecuación de estado de la energía oscura en un rango de  $-1.48 < w < -0.72$  con 95% de nivel de confianza. Además, al asumir que  $w > -1$  se obtiene un valor de  $w < -0.73$  con un 95% de nivel de confianza.

Posterior a estos artículos se concluyó que la mayor parte de la energía del universo se encuentra en forma de una energía del vacío manifestada como una constante

cosmológica. Esta conclusión se vio reforzada por las observaciones de anisotropías de temperatura en el fondo cósmico de micro ondas de la sonda WMAP (26).

Algunas observaciones actuales posteriores a las mencionadas que apoyan la idea de alguna forma de “energía oscura” que comprende alrededor del 70 % de la densidad de energía del universo son las siguientes:

- Observaciones del Primer Año de la Sonda de Anisotropías de Microondas de Wilkinson (WMAP): Determinación de Parámetros Cosmológicos (33).
- Parámetros cosmológicos desde SDSS y WMAP (34).
- Observaciones extendidas en modo de mosaico con el generador de imágenes de fondo cósmico (35).
- Mediciones de alta sensibilidad del espectro de potencia CMB con ampliación de arreglos muy pequeños (36).
- Encuesta sobre el legado de las supernovas: Mediciones de  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , y  $w$  desde el conjunto de datos del primer año★ (37).

Actualmente las propuestas encaminadas a dar una explicación a la energía oscura ha tomado diversos caminos, uno de ellos como ya se mencionó es el que aparece en el artículo de Huterer D. y Turner M. (1999) (31) de un campo escalar que evoluciona en el tiempo, pero existen algunas otras. En el siguiente capítulo se exploraran brevemente algunas de ellas.

### **Revisión de las evidencias de la energía oscura presentadas en el capítulo.**

Observamos que las evidencias de energía oscura que se exponen en este capítulo, se centran en obtener valores de los diferentes parámetros cosmológicos. Así, como forma de revisión, describiremos brevemente lo que implican algunas de sus combinaciones. Enfoquémonos en los parámetros de curvatura y de densidad de la constante cosmológica que se definieron anteriormente.

Para  $\Omega_\Lambda$ . Si  $\Lambda = 0$  implica que  $\Omega_\Lambda = 0$ . Por lo que según la ecuación (2.44) tendríamos:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k = 1 \quad (3.18)$$

Este es un universo en el que no hay energía oscura. Donde  $\Omega_m$  representa la densidad total de materia, es decir materia ordinaria o bariónica y materia oscura fría.

Si  $k = 0$  implica que  $\Omega_k = 0$ . Recordando en este caso que  $k$  está asociado a la geometría del universo (véase la ecuación (2.14)), siendo que  $k = 0$  representa un universo plano entonces tendríamos:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1. \quad (3.19)$$

Este sería un universo plano. Si se tuviera  $\Omega_\Lambda, \Omega_k = 0$ , se tendría entonces según la ecuación (2.44):

$$\Omega_m + \Omega_r = 1 \quad (3.20)$$

Esto representaría un universo plano (i.e. sin curvatura) y sin energía oscura.

Ya que la densidad de radiación  $\rho_r$  en el universo es relativamente pequeña en comparación con el resto de las otras densidades, tenemos que su parámetro de densidad  $\Omega_r$  es despreciable, por lo que algunas veces suele omitirse. Así, la ecuación (3.20) se suele considerar como un universo dominado sólo por materia.

Actualmente, no tenemos un fundamento teórico para determinar el valor de estos parámetros, por lo que estos se derivan completamente de las observaciones. Es debido a esto la importancia de la búsqueda de los valores de estos parámetros, ya que ellos nos proporcionan información del universo, de su geometría y de su dinámica.

Algunas observaciones actuales proporcionan los valores de la tabla 3.3 para los parámetros de materia y de la constante cosmológica.

La primera columna de la Tabla 3.3 contiene datos referentes únicamente al CMB

Observaciones.			
Parámetro	Planck + WP + highL	Planck + WP + highL + BAO	WMAP9 + eCMB + BAO
$\Omega_M$	$0.315^{+0.016}_{-0.017}$	$0.308 \pm 0.010$	$0.293 \pm 0.010$
$\Omega_\Lambda$	$0.685^{+0.017}_{-0.016}$	$0.692 \pm 0.010$	$0.707 \pm 0.010$

Tabla 3.2: Se muestran algunas observaciones actuales de los valores de los parámetros de densidad de materia y energía oscura desde diferentes observaciones. Estas se encuentran en la referencia (70). En estos valores se asume el modelo  $\Lambda$ CDM, bajo la restricción de un universo plano, i.e.  $\Omega_k = 0$ .

desde observaciones de: Datos de temperatura de la sonda Planck, más datos de polarización de la sonda WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), más datos de alta resolución del ACT (*Atacama Cosmology Telescope*), y del SPT (*South Pole Telescope*). Mientras que la segunda columna recopila datos de BAOs desde las exploraciones: SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*), BOSS (*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*), 6dF (*Six-degree Field Galaxy Survey*), y WiggleZ (*estudio de 240000 líneas de emisión de galaxias en el universo distante, medido con el espectrógrafo AAOmega del Telescopio Anglo Australiano (AAT) de 3.9 m*). La tercera columna muestra los resultados de los últimos nueve años de la sonda WMAP, combinados con los mismos datos de BAO, más datos del eCMB (*high-resolution CMB*). En todas la columnas se asume el modelo  $\Lambda$ CDM, bajo la restricción de un universo plano, con constante cosmológica como energía oscura. Estos datos se pueden encontrar en la referencia (70).

# Capítulo 4

## Modelos.

En la actualidad el modelo más aceptado para describir el universo es el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM. Este modelo ha resultado ser predictivo y observacionalmente acertado, sin embargo presenta algunos problemas sustanciales teóricos y observacionales. En este capítulo se dará una breve descripción de algunas de las dificultades teóricas y observacionales que existen de este modelo, y se presentarán algunas de las alternativas que se han propuesto para describir el universo. Principalmente, haremos énfasis en una de estas propuestas alternativas; los modelos  $w$ CDM, que son el tipo de modelos que se estudian en este trabajo.

### 4.1. Problemas de la constante cosmológica

Una de las dificultades más sustanciales de la constante cosmológica  $\Lambda$  y del modelo  $\Lambda$ CDM, aunque más que un problema teórico resulta ser un problema conceptual, es el hecho de que el origen de la constante cosmológica  $\Lambda$ , al igual que el de la materia oscura fría CDM, son por completo un misterio el cual escapa de nuestro conocimiento actual. Otra dificultad del modelo  $\Lambda$ CDM, aunque más relacionado a la materia oscura CDM, es que parecen existir curiosas discrepancias en cuanto a las propiedades predichas para el agrupamiento de CDM en las observaciones a pequeña escala ( $\sim$ kpc). Una de estas discrepancias se debe a que los perfiles de densidad predichos a través de simulaciones en galaxias pequeñas, no concuerdan con lo observado

mediante curvas de rotación. Esto se puede explicar de la siguiente forma:

El perfil de masa interna de un halo de materia oscura se puede obtener por mediciones de curvas de rotación de galaxias. Para movimientos circulares en una distribución esférica de materia la velocidad de rotación es simplemente  $v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$ . Con  $M(r)$  la masa interior a un valor de radio  $r$ .

La discrepancia está en que de acuerdo a las mediciones de curvas de rotación observadas en galaxias, se obtiene por medio del efecto Doppler, que la velocidad de rotación es la misma para cualquier valor del radio  $r$ . Con lo que tenemos que  $M(r)/r$  debe ser constante, lo cual implica que  $M(r)$  aumenta linealmente con  $r$ . Lo cual no es acorde con las simulaciones ya que estas predicen que hay mucha más materia oscura CDM a unos pocos kpc centrales en galaxias típicas.

Otro problema que se presenta CDM a pequeña escala se basa en simulaciones numéricas, las cuales predicen la existencia de un número muy elevado de halos pequeños orbitando alrededor de estructuras mayores contrariamente al número de galaxias satélites que se observan localmente (2).

Otros problemas técnicos más específicos que surgen de la constante cosmológica son: el *Problema de ajuste fino*, el *Problema de coincidencia*, y la *tensión de Hubble*. De los cuales daremos una breve descripción.

### Problema de ajuste fino

El problema de ajuste fino surge de considerar que la constante cosmológica  $\Lambda$  se origina a partir de una densidad de energía del vacío, pues esto deja un serio problema en escalas de energía. Esto es,  $\Lambda$  y así mismo  $\rho_\Lambda$  es muy pequeño en comparación con las predicciones de la física de partículas.

Desde la mecánica cuántica, se espera que:

$$\rho_\Lambda \sim (10^{18} \text{GeV})^4 \sim 2 \times 10^{110} \text{erg/cm}^3. \quad (4.1)$$

Sin embargo, la mayoría de las observaciones sugieren que:

$$\rho_\Lambda \leq (10^{-12} \text{GeV})^4 \sim 2 \times 10^{-10} \text{erg/cm}^3. \quad (4.2)$$

Por lo que tenemos 120 órdenes de magnitud de diferencia entre la expectativa teórica y el valor observacional. Esta discrepancia ha sido llamada “la peor predicción teórica en la historia de la física” (30; 40).

Algunos artículos que tratan el Problema de ajuste fino son los siguientes:

- Gritos de Explicación: Ajuste Fino y la Naturalidad en los Fundamentos de la Física (41).
- Una Introducción Natural al Ajuste Fino (42).

### Problema de coincidencia

El segundo problema de la constante cosmológica es el Problema de coincidencia, el cual se origina debido a que la densidad de energía oscura  $\Omega_{\Lambda 0}$ , y la densidad de materia  $\Omega_{m 0}$  en la época presente tienen el mismo orden de magnitud. Esto plantea un dilema ya que esto parece indicar que vivimos actualmente en un periodo muy especial de la historia cósmica, debido a que dentro del modelo cosmológico estándar, que esto ocurra es poco probable, y puede ser visto como una coincidencia ya que esto requiere de varias condiciones iniciales en el universo temprano.

Acorde al modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM, la igualdad en órdenes de magnitud entre  $\rho_\Lambda$  y  $\rho_m$  toma lugar “recientemente”, a un corrimiento al rojo de  $z = 0.75$ . La pregunta correspondiente de “¿por qué ahora?” constituye el Problema de coincidencia (40; 43). Explicaremos el problema de coincidencia con mayor detalle a continuación.

Considérese el parámetro de densidad de las diferentes contribuciones de energía del universo como aparece en la ecuación (2.35), y consideremos también la ecuación (2.30), además de los valores de la Tabla (3.1) (para la materia y la radiación los valores referentes a la tabla (3.1) respecto a la ecuación (2.30) se encuentran en las ecuaciones (2.31) y (2.32) respectivamente). Combinando estas ecuaciones podemos obtener los parámetros de densidad  $\Omega_i$  como función del factor de escala (i.e.  $\Omega_\Lambda \propto a^3 \Omega_m \propto a^4 \Omega_r$ ). Esto nos proporciona una idea de cómo las diferentes contribuciones de

energía fueron evolucionando conforme el universo se expandía. Donde encontramos que inicialmente teníamos un universo que se encontraba dominado por la radiación, luego por la materia, y finalmente tenemos un universo dominado por la energía oscura. Conforme a la ecuación (2.44), lo anterior se observa de mejor forma en una gráfica de los parámetros de densidad en escala logarítmica; esto es, en función del logaritmo del del factor de escala (i.e.  $\log a$ ). La evolución de los parámetros de densidad respecto al  $\log a$  se muestra en la Figura 4.1. La zona en color gris de esta figura muestra la época en donde la materia y la energía oscura son comparables. Dicha zona corresponde con la época actual.

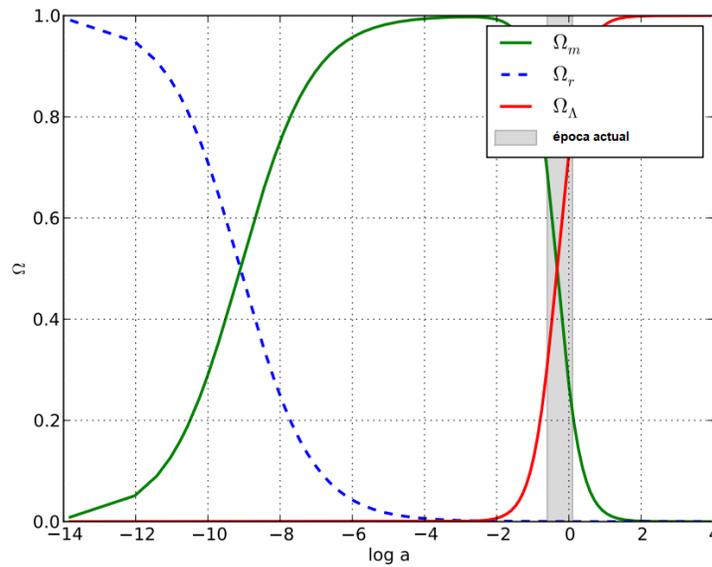


Figura 4.1: Parámetros de densidad de radiación  $\Omega_r$  (línea punteada azul), materia  $\Omega_m$  (línea verde) y energía oscura  $\Omega_\Lambda$  (línea roja) como función del factor de escala  $a$ . La zona en color gris muestra la época en donde la materia y la energía oscura son comparables. Fuente (78).

Tenemos como resultado que la densidad de energía de materia se diluye como  $a^{-3}$  a medida que el Universo se expande. Para la densidad de energía de radiación, esta se diluye como  $a^{-4}$ , ya que cada partícula pierde energía conforme a su desplazamiento al rojo. Sin embargo la densidad de energía oscura permanece constante durante la expansión cósmica.

Los componentes de la densidad del Universo como se muestran en la Figura 4.1 indican que en un principio,  $\Omega_r(a)$  estaba cerca de la unidad, luego la transición materia-radiación ocurrió de manera relativamente gradual, mientras que la transición materia-energía oscura ocurre muy rápidamente. De modo que es muy poco probable, que un período de tiempo actual coincida con la rápida transición del dominio de la materia al período de dominio de la energía oscura. Este planteamiento, representa en esencia el problema de la coincidencia cósmica (78).

Algunos artículos relacionados con el problema de coincidencia son los siguientes:

- Energía oscura, inflación y el problema de la coincidencia cósmica (44).
- Hacia una solución del problema de la coincidencia (45).

### Tensión de Hubble

La Tensión de Hubble se refiere a la discrepancia que existe del valor de la constante de Hubble  $H_0$  derivado a partir del modelo  $\Lambda$ CDM, con el valor proveniente de las mediciones locales de supernovas Ia.

La constante de Hubble  $H_0$  puede ser inferida a partir de los datos de fluctuaciones del fondo cósmico de microondas CMB.

A partir de los datos de temperatura y polarización del CMB del satélite Planck en el 2018 encontramos constricciones para la constante de Hubble  $H_0$ . Asumiendo el modelo  $\Lambda$ CDM las constricciones nos arrojan un valor de

$$H_0 = 67.27 \pm 0.60 \text{ km/s/Mpc}, \quad (4.3)$$

el cual es un valor más pequeño que el de las mediciones directas usando datos de supernovas Ia desde el *SH0ES collaboration*. Las cuales confieren un valor a la constante de Hubble de

$$H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km/s/Mpc}, \quad (4.4)$$

según la referencia (47). Y más recientemente de

$$H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km/s/Mpc}, \quad (4.5)$$

según la referencia (48).

Este desacuerdo entre la medición de la constante de Hubble de las supernovas de Tipo Ia y la derivada de CMB, proporciona actualmente un área de investigación muy activa en cosmología (46).

Algunos artículos relacionados con la Tensión de Hubble son los siguientes:

- Un paso para comprender la tensión de Hubble (49).
- No se preocupe más, la tensión de Hubble se alivia: una medición directa de la constante de Hubble desde la expansión del universo lunar (50).

## 4.2. Alternativas a la constante cosmológica

Algunas de las alternativas a la constante cosmológica que intentan solucionar las dificultades teóricas mencionadas son las siguientes:

### Campos escalares.

Como ya se había mencionado anteriormente una de las alternativas a la constante cosmológica son los campos escalares. Estos campos escalares surgen de la física de partículas, y la teoría de cuerdas. Se propone que estos campos escalares pueden actuar como candidatos de la energía oscura. Existe una amplia variedad de modelos de energía oscura de campo escalar. Algunos de ellos son:

- Quintessence (40; 51).
- K-essence (40).
- Phantom (52; 54; 55).
- Quintom (53).

## Gas de Chapplygin

Existe otra clase interesante de modelos de energía oscura que involucran un fluido conocido como gas Chapplygin. Este fluido también conduce a la aceleración del universo. Este gas Chapplygin tiene la característica de que su ecuación de estado tiene la forma:

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (4.6)$$

donde  $A$  es una constante positiva, y

$$p = -\frac{V^2(\phi)}{\rho}, \quad (4.7)$$

donde  $V(\phi)$  es una función potencial relativa al campo escalar (30).

Algunos otros artículos que hablan acerca del Gas de Chapplygin son los siguientes:

- Materia Oscura, Energía Oscura y el Gas de Chaplygin (56).
- Una alternativa a la quintessence (57).

## Gravedad modificada

Los modelos de gravedad modificada se basan en modificar el lado izquierdo de la ecuación de Einstein (2.16). Lo que significa que ya no se busca algún tipo de materia que provoque la aceleración cósmica, sino que se modifica la propia gravedad (40).

Algunos artículos que tratan el modelo de Gravedad modificada son los siguientes:

- Gravedad Modificada y Cosmología (58).
- Gravedad modificada para muestreos (59).

Otra alternativa a la constante cosmológica son los modelos  $w$ CDM, de los cuales profundizaremos a continuación.

### 4.2.1. Modelos $w$ CDM

A diferencia del modelo  $\Lambda$ CDM, los modelos  $w$ CDM consideran a la ecuación de estado de la energía oscura  $w$  como una función del tiempo en general. Partiendo de este hecho vamos a establecer ahora el desarrollo de nuevas ecuaciones que contemplen esta suposición. Para esto nos enfocaremos en resolver nuevamente la ecuación de continuidad, la cual anteriormente en el Capítulo 2 se había resuelto para casos particulares; daremos a continuación una solución más amplia.

Consideramos la definición que se dio del parámetro de Hubble (ecuación (2.33)). Con esto, la ecuación (2.28) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho(1+w) = 0. \quad (4.8)$$

Para resolver esta ecuación diferencial haremos uso del siguiente factor integrante  $\mu(t)$  dependiente del tiempo:

$$\mu(t) = e^{\int 3H(1+w)dt}. \quad (4.9)$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación de continuidad (4.8) por el factor integrante  $\mu(t)$ .

$$\frac{d\rho}{dt} e^{\int 3H(1+w)dt} + 3H\rho(1+w) e^{\int 3H(1+w)dt} = 0. \quad (4.10)$$

De acuerdo a la ecuación (4.10), se puede deducir que:

$$\frac{d}{dt} \left( \rho e^{\int 3H(1+w)dt} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Por lo que se debe tener que

$$\rho e^{\int 3H(1+w)dt} = \rho_0, \quad (4.12)$$

con  $\rho_0$  una constante cuyo significado representa el valor de la densidad en la época actual, es decir al tiempo presente. Podemos despejar ahora  $\rho$ , con lo cual obtenemos:

$$\rho = \rho_0 e^{\int -3H(1+w)dt}. \quad (4.13)$$

Tenemos esta última ecuación que es función del tiempo. Sin embargo en las observaciones astronómicas es más adecuado utilizar el corrimiento al rojo como medida del tiempo. De acuerdo a esto, vamos a realizar una transformación para cambiar la variable tiempo  $t$  por el corrimiento al rojo  $z$ . Para esto partiremos de la ecuación (3.13). Derivamos de ambos lados de esta ecuación para obtener:

$$\frac{d(1+z)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{a_0}{a} \right). \quad (4.14)$$

Desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d(z)}{dt} &= a_0 \left( -\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt} \right) \\ &= \frac{a_0}{a^2} \dot{a} = -\frac{a_0}{a} \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Usando esta última expresión y las ecuaciones (3.13) y (2.33), podemos obtener una expresión de la derivada de  $z$  con respecto al tiempo  $t$ , la cual está en función de  $z$  y del parámetro de Hubble  $H$ , esto es:

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H. \quad (4.15)$$

Esta ecuación (4.15) nos servirá para obtener el cambio de variable que necesitamos para modificar nuestra solución de la ecuación de continuidad (4.13) y expresarla en función del corrimiento al rojo  $z$ . Aplicando entonces el cambio de variable  $dt = \frac{-dz}{(1+z)H}$  obtenemos:

$$\rho = \rho_0 e^{\int \frac{3(1+w)}{(1+z)} dz}. \quad (4.16)$$

Introduciendo la ecuación (4.16) dentro de la ecuación de Friedmann de la forma en la que se expresa en la ecuación (2.43) obtenemos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_{i0} e^{\int \frac{3(1+w_i)}{(1+z)} dz}. \quad (4.17)$$

Aquí, como ya se mencionó, cada una de las  $\rho_{i0}$  corresponde con el valor que existe actualmente de las densidades de cada elemento, es decir corresponde con el valor de densidad de materia, radiación, etc., que encontraríamos si hiciéramos una medición el día de hoy.

Dividimos ambos miembros de la ecuación (4.17) entre  $H_0^2$ , esto es:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_i \rho_{i0} e^{\int \frac{3(1+w_i)}{(1+z)} dz}. \quad (4.18)$$

Ahora, si desarrollamos la ecuación (4.18), obtenemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G \rho_{m0}}{3H_0^2} e^{\int \frac{3(1+w_m)}{(1+z)} dz} + \frac{8\pi G \rho_{r0}}{3H_0^2} e^{\int \frac{3(1+w_r)}{(1+z)} dz} + \frac{8\pi G \rho_{k0}}{3H_0^2} e^{\int \frac{3(1+w_k)}{(1+z)} dz} + \frac{8\pi G \rho_{\Lambda 0}}{3H_0^2} e^{\int \frac{3(1+w)}{(1+z)} dz}. \quad (4.19)$$

Aquí, el término  $w$  sin subíndice que aparece en la integral del último término de la ecuación (4.19), hace referencia a la ecuación de estado de la energía oscura (como se mencionó al principio de la sección). Hacemos esta aclaración para evitar confusiones, ya que en el capítulo anterior se había definido  $w_\Lambda$  como la ecuación de estado de la constante cosmológica. Aunque ambas ecuaciones de estado ( $w$ ,  $w_\Lambda$ ) se relacionan con la energía oscura, su interpretación es diferente, y debe hacerse una distinción. Así para los modelos  $w$ CDM, la ecuación de estado de la energía oscura será simplemente  $w$ . Aunque continuaremos refiriéndonos a la densidad de energía oscura  $\rho_\Lambda$ , y a su parámetro de densidad  $\Omega_\Lambda$  con el subíndice “ $\Lambda$ ”, pues esto no ocasiona confusión.

Ahora, utilizando los parámetros de densidad que definimos en las ecuaciones (2.40) y (2.42) podemos reescribir la ecuación (4.19) como:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} e^{\int \frac{3(1+w_m)}{(1+z)} dz} + \Omega_{r0} e^{\int \frac{3(1+w_r)}{(1+z)} dz} + \Omega_{k0} e^{\int \frac{3(1+w_k)}{(1+z)} dz} + \Omega_{\Lambda 0} e^{\int \frac{3(1+w)}{(1+z)} dz}. \quad (4.20)$$

Ahora, puesto que la intención de los modelos  $w$ CDM se centra en el estudio de la energía oscura, podemos enfocarnos directamente en esta, separándola de cierta forma. Usando la ecuación (2.44) para expresar a  $\Omega_{\Lambda 0}$  como función de los otros parámetros de densidad, tenemos:

$$\Omega_{\Lambda 0} = (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{k0}). \quad (4.21)$$

sustituyendo la ecuación (4.21) en la ecuación (4.20) obtenemos:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} e^{\int \frac{3(1+w_m)}{(1+z)} dz} + \Omega_{r0} e^{\int \frac{3(1+w_r)}{(1+z)} dz} + \Omega_{k0} e^{\int \frac{3(1+w_k)}{(1+z)} dz} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{k0}) e^{\int \frac{3(1+w)}{(1+z)} dz}. \quad (4.22)$$

En este punto la ecuación de Friedmann para  $w$ CDM no está completamente resuelta. Hace falta resolver las integrales que aparecen dentro. Pero para poder resolverlas debemos saber cómo son las funciones  $w$ . Recordemos que partimos de suponer que las  $w$  son funciones del tiempo  $t$ , o lo que es equivalente, funciones del corrimiento al rojo  $z$ , es decir, se tienen funciones  $w = w(z)$ . De acuerdo a esto, en general podemos distinguir dos casos:

- $w$  es una constante i.e.  $w = w_0$
- $w$  es una función de  $z$ , i.e.  $w = w(z)$ .

**Para el caso en que  $w = w_0$  es una constante.**

En este caso los términos  $3(1 + w_{i0})$  salen de las integrales pues son constantes. Las integrales resultantes se resuelven de manera sencilla obteniendo como resultado  $\ln(1 + z)$ , por lo que  $e$  elevado a la integral tendría como resultado:

$$e^{\int \frac{3(1+w_{i0})}{(1+z)} dz} = (1 + z)^{3(1+w_{i0})}. \quad (4.23)$$

En este caso la ecuación de Friedmann nos da:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{m0} (1 + z)^{3(1+w_{m0})} + \Omega_{r0} (1 + z)^{3(1+w_{r0})} + \Omega_{k0} (1 + z)^{3(1+w_{k0})} + (1 - \Omega_{m0} - \Omega_{r0} - \Omega_{k0}) (1 + z)^{3(1+w_0)}. \quad (4.24)$$

Ahora, sustituyendo los valores de las ecuaciones de estado que habíamos encontrado para cada una de las contribuciones al contenido del universo (Tabla 3.1) en la

ecuación (4.23), obtenemos los términos que acompañan a los parámetros de densidad de la ecuación de Friedmann (4.24). En la Tabla 4.1 se muestra el valor de las ecuaciones de estado  $w_i$  y el exponente de  $(1+z)$  de la ecuación (4.23) para cada caso.

Componente	$w_{i0}$	exp. de la int.
Curvatura	$w_{k0} = -\frac{1}{3}$	$3(1 + w_{k0}) = 2$
Materia	$w_{m0} = 0$	$3(1 + w_{m0}) = 3$
Radiación	$w_{r0} = \frac{1}{3}$	$3(1 + w_{r0}) = 4$

Tabla 4.1: Se muestran los valores de las ecuaciones de estado de cada una de las contribuciones al contenido del universo. Además se muestra el valor del exponente de  $(1+z)$  de la ecuación (4.23), al sustituir cada una de las ecuaciones  $w_{i0}$ .

Ahora, para la energía oscura, si consideramos que es una constante cuyo valor es  $w_0 = -1$ , entonces se tendríamos  $3(1 + w_0) = 0$ . Y la ecuación de Friedmann (4.22) tomaría la forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{k0} (1+z)^2 + \Omega_{r0} (1+z)^4 + \Omega_{m0} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{k0} - \Omega_{r0} - \Omega_{m0}). \quad (4.25)$$

Esta ecuación de Friedmann corresponde al modelo  $\Lambda$ CDM.

### Para el caso en que $w$ es una función (i.e. $w = w(z)$ )

Ahora si suponemos que  $w$  varía en el tiempo (i.e.  $w = w(z)$ ), entonces la forma de la ecuación de Friedmann dependerá de cómo sean las ecuaciones  $w_i$ , en específico qué tipo de funciones son, y de como se puedan resolver las integrales que implican estas ecuaciones  $w_i$  dentro de la ecuación de Friedmann. Véase la ecuación (4.22).

Los modelos  $w$ CDM como se mencionó anteriormente tienen como objetivo el estudio de la energía oscura, además bajo la suposición de que ésta presenta una evolución temporal la cual se trata de entender a través de una ecuación de estado variable. De modo que en estos modelos se toma a las ecuaciones de estado de los componentes de materia, radiación y curvatura como si fueran constantes cuyos va-

lores son los del modelo  $\Lambda$ CDM, dejando a la ecuación de estado de la energía oscura como la única dependiente del tiempo y capaz de manifestar una evolución. Así para los demás componentes, la ecuación de Friedmann quedaría de la misma forma que el modelo  $\Lambda$ CDM, y solo cambiaría para el componente de energía oscura, quedando de la siguiente forma:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{k0} (1+z)^2 + \Omega_{r0} (1+z)^4 + \Omega_{m0} (1+z)^3 + (1 - \Omega_{k0} - \Omega_{r0} - \Omega_{m0}) f(z). \quad (4.26)$$

Esta es la ecuación de Friedmann para los modelos  $w$ CDM, donde  $f(z)$  representa

$$f(z) = e^{\int \frac{3(1+w)}{1+z} dz}, \quad (4.27)$$

y dependerá del modelo que se elija y de como sea  $w$  para tener una expresión específica; es decir,  $f(z)$  cambiará de acuerdo al modelo  $w$ CDM del que se trate.

A partir de este punto, todos los modelos que se estudian corresponden a la ecuación (4.26). Ahora que se han establecido y aclarado las ecuaciones, vamos a compactarlas eliminando los subíndices cero que acompañan a los parámetros. Esto con el objetivo de hacer más tratables las ecuaciones, y no cargar con un exceso de subíndices. Más aún, porque posteriormente se introducen nuevos subíndices, lo que podría ocasionar una sobrecarga de notación. Así, a partir de este punto se debe recordar que aunque no aparezca explícitamente, los parámetros  $\Omega_i$  llevan implícito el subíndice cero.

Los modelos  $w$ CDM se centran en resolver la expansión acelerada del universo proponiendo diferentes funciones para la ecuación de estado de la energía oscura. Al igual que cualquier modelo cosmológico, la cualidad de que pueda ser verdadero debe basarse en la congruencia que tiene con los datos observacionales. Sin embargo, extraer información que nos ayude a desarrollar un modelo de ecuación de estado de la energía oscura  $w$  desde los datos observacionales es un gran desafío debido a la precisión de los datos actuales y a nuestro desconocimiento de la naturaleza de la energía oscura. Algo que facilita la tarea en estas circunstancias es parametrizar  $w$  empíricamente usando dos o más parámetros libres que ayuden a caracterizarla. Teniendo así, una

“ecuación paramétrica de estado de la energía oscura”. Algunos ejemplos de ecuaciones paramétricas de estado y su interpretación en la ecuación de Friedmann se expondrán más adelante.

Uno de los parámetros con los que se contrastan los modelos cosmológicos, y el cual se usa en este trabajo, es el parámetro de Hubble, del cual se hizo mención en el Capítulo 2 en la sección [2.4](#) **Parámetros cosmológicos**, subsección *Parámetro de Hubble* [2.4](#). En la Figura [4.2](#) se muestran algunos datos observacionales del parámetro de Hubble que se obtuvieron a partir de cronómetros cósmicos (HD), los cuales se encuentran en la referencia [\(69\)](#).

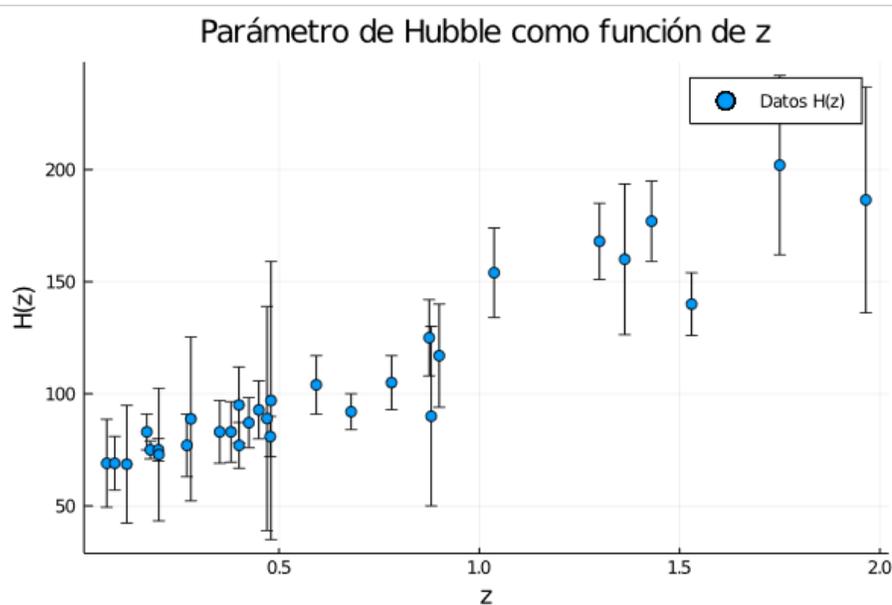


Figura 4.2: *Datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos HD, tomados de la referencia [\(69\)](#)*

Los cronómetros cósmicos HD son un parámetro cosmológico el cual ofrece la oportunidad de medir la edad diferencial del universo mediante la medición directa de la derivada  $\frac{dt}{dz}$  que representa el cambio en el tiempo cósmico como función del corrimiento al rojo. Ya que  $H(z) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  en términos del factor de escala  $a(t)$ , entonces una medición directa de  $\frac{dt}{dz}$  nos dará la razón de la expansión del universo; lo cual es precisamente el parámetro de Hubble: Véase ecuaciones: [\(2.33\)](#), [\(4.15\)](#).

Los datos que se muestran en la Figura 4.2 nos sirven únicamente como referencia ilustrativa. Posteriormente para el análisis específico de los modelos (véase el Capítulo 5) se usan datos completos de la referencia (69). A continuación se expondrán algunas ecuaciones paramétricas de estado, las cuales serán contrastadas con estos datos observacionales del parámetro de Hubble para determinar que tan bien funcionan como modelo  $w$ CDM y que tan bien pueden explicar la expansión acelerada del universo.

#### 4.2.2. Algunos modelos $w$ CDM propuestos.

La motivación del desarrollo de los modelos  $w$ CDM, puede entenderse en cierto sentido como una progresión natural del pensamiento. Ya que nunca una idea o planteamiento surge de la nada, sino más bien evoluciona desde el conocimiento ya establecido. De este modo, tenemos un modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM que “funciona” relativamente bien aunque con algunas inconsistencias teóricas y observacionales. Una acción coherente de realizar, es proponer algunas variaciones al modelo que intenten “mejorarlo”. Si bien, para el modelo  $\Lambda$ CDM, la ecuación de estado de la energía oscura es constante y se caracteriza conforme a un cierto valor;  $w = -1$ . Un paso adelante sería pensar que dicho valor puede no ser el que se supone. Entonces, se debería buscar un valor que resulte más adecuado. Un paso todavía más adelantado que el anterior, sería suponer que la ecuación de estado de la energía oscura no obedece a un valor constante, sino más bien a una función. De ser este el caso, ¿de qué depende esta función? y ¿qué función es la apropiada? Estos planteamientos representan la idea general que llevan al desarrollo de los modelos  $w$ CDM. Ahora, ¿cómo podríamos derivar una función como la que se plantea, partiendo del hecho de que desconocemos por completo la naturaleza de la energía oscura? La vía que tenemos para esta tarea es ajustar alguna función cuyo comportamiento sea similar al que buscamos. Otra alternativa que podemos tomar, es suponer que la ecuación de estado de la energía oscura es función de alguno de los parámetros que tenemos, y considerar una aproximación de  $w$  a primeros órdenes.

### Modelo Chevallier-Polarski-Linder (CPL)

Una estrategia recurrente en física para aproximar una determinada función, es a través de las series de Taylor.

El modelo CPL propone la expansión de  $w$  en serie de Taylor alrededor del factor de escala  $a$ . Esta expansión alrededor de  $a$  se expresa en términos del corrimiento al rojo  $z$  mediante la siguiente correspondencia:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) \implies w(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}. \quad (4.28)$$

Esta es la ecuación de estado de la energía oscura del modelo CPL. Los parámetros que se usan en este modelo son dos:  $w_0$ ,  $w_a$ . Y la función  $f(z)$  de la ecuación (4.27) para este modelo la definimos como  $f_{CPL}(z)$ , la cual, una vez desarrollada tendría la siguiente forma:

$$f_{CPL}(z) = (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-\frac{3w_a z}{1+z}}. \quad (4.29)$$

Esta ecuación (4.29) debe sustituirse por la  $f(z)$  de la ecuación (4.26), teniendo así la ecuación de Friedmann correspondiente para este modelo.

### Modelo Huterer-Turner (HT)

El modelo HT propone la expansión de  $w$  en serie de Taylor alrededor de  $z$ . Esta expansión corresponde a:

$$w(z) = w_0 + w_a z. \quad (4.30)$$

Este modelo también contempla dos parámetros, que de igual modo son  $w_0$ ,  $w_a$ .

En este caso, definimos la función  $f(z)$  de la ecuación (4.27) para este modelo como  $f_{HT}(z)$ . Donde de igual modo, al desarrollar esta ecuación tendríamos:

$$f_{HT}(z) = (1+z)^{3(1+w_0-w_a)} e^{3w_a z}. \quad (4.31)$$

Nuevamente esta función  $f_{HT}(z)$  (4.31) debe sustituirse por la  $f(z)$  de la ecuación

(4.26) para tener la expresión de la ecuación de Friedmann para este modelo.

### Modelo Efstathiou

Este modelo por su parte, contempla que la ecuación de estado de la energía oscura puede ser descrita con una función logaritmo. La ecuación de  $w$  que propone el modelo Efstathiou es la siguiente:

$$w(z) = w_0 + w_a \ln(1 + z). \quad (4.32)$$

Este modelo contempla dos parámetros, que son nombrados al igual que los modelos anteriores  $w_0$  y  $w_a$ .

Y la función  $f(z)$  de la ecuación (4.27) para este modelo la definimos como  $f_{Efst}(z)$ , que al ser desarrollada tendría la siguiente forma:

$$f_{Efst}(z) = (1 + z)^{3(1+w_0)} e^{\frac{3w_a \ln^2(1+z)}{2}}. \quad (4.33)$$

Por último la ecuación de Friedmann para el modelo Efstathiou lo obtendríamos al sustituir la ecuación (4.33) por la  $f(z)$  en la ecuación (4.26).

### Experimentación.

Como primer acercamiento al análisis de los modelos, tal como se mencionó, vamos ahora a compararlos con los datos observacionales del parámetro de Hubble  $H$  (véase la Figura 4.2) desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69). Para comenzar con el análisis, notemos que las ecuaciones de Friedmann correspondientes a cada uno de los modelos son funciones del corrimiento al rojo  $z$ , por lo que sustituyendo el valor de  $z$  en el intervalo donde tenemos información observacional (Figura 4.2) obtenemos una gráfica del comportamiento del parámetro de Hubble respecto del corrimiento al rojo  $z$ . La gráfica obtenida corresponderá a ese modelo en específico, y se podrá comparar que tan bien ese modelo se ajusta con los datos observacionales.

Las gráficas del comportamiento teórico del parámetro de Hubble para cada uno de los modelos se realizaron bajo las siguientes consideraciones:

- Se considera un universo plano; esto es, un universo sin curvatura conforme a la ecuación (3.19).
- Se considera que el término de radiación es despreciable en comparación con los otros parámetros en el intervalo que tratamos, por lo que no tiene una aportación significativa, de modo que lo podemos omitir por esta ocasión (i.e.  $\Omega_r = 0$ ).

Bajo esta consideración y la anterior, la ecuación de Friedmann se reduce a la expresión siguiente:

$$H(z) = H_0 [\Omega_m (1+z)^3 + (1 - \Omega_m) f(z)]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.34)$$

donde  $f(z)$  representa la misma función de la ecuación (4.27). Aquí se ha despejado  $H(z)$ . La ecuación (4.34) representa la función  $H(z)$  que se grafica en cada modelo.

- Consideramos que para todos los modelos el parámetro de densidad de materia tendrá un valor de

$$\Omega_m = 0.3. \quad (4.35)$$

El cual es un valor aproximado adecuado considerando algunas de las observaciones actuales (véase la Tabla 3.3).

- Consideramos para todos los modelos valores razonables de los parámetros  $w_0$ ,  $w_a$ , a los cuales se les dio los siguientes valores:

$$w_0 = -0.966, \quad w_a = 0.202, \quad (4.36)$$

estos valores se encuentran en la referencia (I), donde se encontró en el artículo que esos valores representan un mejor ajuste posible encontrado para  $w_0$ ,  $w_a$  referente al modelo CPL. Por ahora se usan estos valores para todos los modelos.

- Consideramos que la constante de Hubble  $H_0$  tiene un valor de

$$H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (4.37)$$

el cual es un valor dentro del intervalo donde se ubican las mediciones actuales de este parámetro (ver ecuación (2.34)).

Bajo estas condiciones, las gráficas del comportamiento teórico del parámetro de Hubble  $H$  de acuerdo a cada modelo se muestran en las Figuras: 4.3 para el modelo CPL, 4.4 para el modelo Huterer-Turner y 4.5 para Efstathiou. Donde en el eje de las ordenadas tenemos el parámetro de Hubble  $H(z)$  como función del corrimiento al rojo, y en el eje de las abscisas tenemos el corrimiento al rojo en el intervalo  $z \in [0, 2.5]$ . En estas gráficas se muestran además los datos observacionales superpuestos del parámetro de Hubble de la Figura 4.2 desde Cronómetros Cósmicos HD.

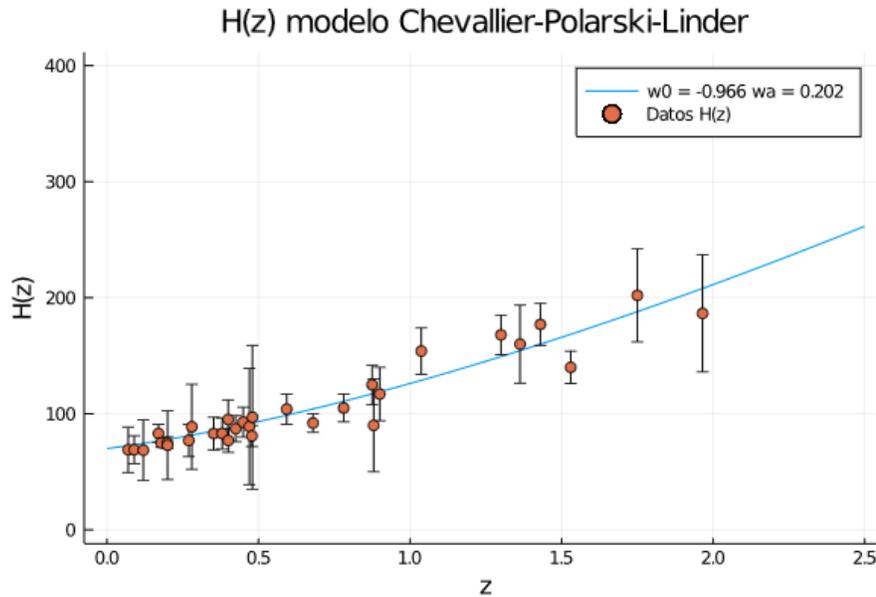


Figura 4.3: Gráfica del comportamiento teórico para el modelo CPL del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69).

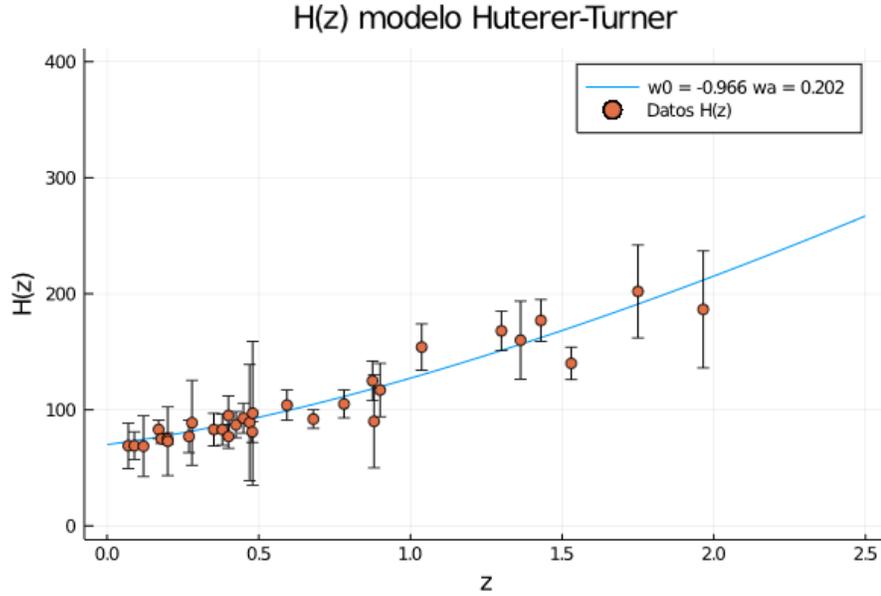


Figura 4.4: Gráfica del comportamiento teórico para el modelo Huterer-Turner del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69).

Como era de esperarse el comportamiento teórico que presentan las gráficas de los modelos concuerda con los datos observacionales, pues se encuentran dentro de la región de error de la mayoría de los puntos. Lo que tiene sentido puesto que estos modelos se obtienen de la literatura y ya han sido previamente validados. En especial CPL se esperaba que debería tener una aceptable relación con los datos, ya que en particular para este modelo, los valores de los parámetros  $w_0$  y  $w_a$  corresponden ya a un mejor ajuste encontrado experimentalmente, por lo que debería comportarse adecuadamente con las observaciones. De modo que si los demás modelos son comparables en comportamiento con el modelo CPL, podemos especular que son candidatos aceptables para describir adecuadamente los datos. Lo que se confirma con esta experimentación preliminar.

Así, consideramos a estas gráficas como un primer acercamiento al análisis de los modelos, las cuales nos proporcionan una referencia ilustrativa de una elección de valores para los parámetros.

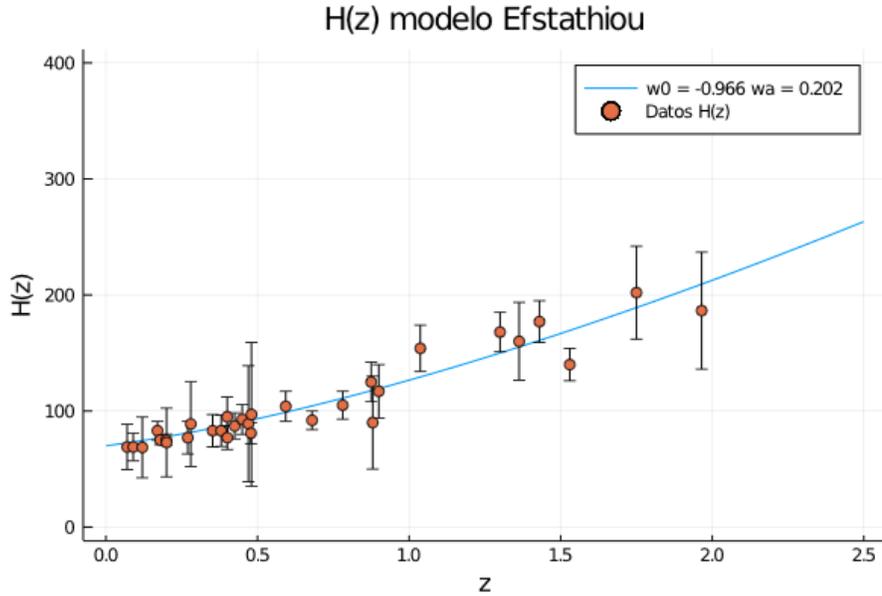


Figura 4.5: Gráfica del comportamiento teórico para el modelo Efstathiou del parámetro de Hubble  $H$  como función del corrimiento al rojo  $z$  bajo las condiciones establecidas. Los puntos muestran los datos observacionales del parámetro de Hubble desde Cronómetros Cósmicos que aparecen en la referencia (69).

Para el caso de los modelos paramétricos (tal es el caso de los que se tratan en este trabajo), un modelo en particular puede ajustar “bien” o “mal” con las observaciones dependiendo de los valores de los parámetros que se tengan. El estudio de los parámetros y la “buena” elección de sus valores nos permitirá estar en condiciones de valorar cual candidato representa mejor a las observaciones; es decir, cual es el “mejor modelo”. Es por eso que es importante encontrar la mejor combinación posible de esos valores, pues esto nos permitirá comparar los modelos más efectivamente.

Veamos ahora otra ecuación de estado de la energía oscura. Esta es una nueva propuesta la cual presentamos en este trabajo. Esta ecuación se basa en el desarrollo de funciones especiales para describir a  $w$ . A continuación se describe detalladamente este modelo.

### 4.3. Propuesta de ecuación paramétrica de estado con los polinomios de Bessel

En la sección anterior vimos cómo a partir de expansiones en series de Taylor se propusieron dos ecuaciones de estado de la energía oscura (CPL, HT). Estas series se han usado también para tratar algunos otros parámetros cosmológicos como la densidad de energía oscura  $\rho_\Lambda$  y la distancia de luminosidad  $D_L$  (véase ecuación (3.15)). Esto aparece en el artículo de Sahni V. y Starobinsky A. (2006) (5). Debido a lo útil que resulta el uso de estos desarrollos en serie, podemos plantearnos si a partir de usar un tipo diferente de series podemos obtener algunos otros resultados convenientes. Esta idea se propone ya en el trabajo de Tamayo D. y Vazquez J. A. (2019) (4), donde se hace uso de series de Fourier para proveer una descripción general de ecuación de estado de energía oscura. Tomando estos antecedentes como referencia, vamos ahora a proponer una nueva expansión basada en el desarrollo de funciones especiales. Se sabe bien que las funciones especiales aparecen recurrentemente en un sinnúmero de los problemas que la física se plantea, y son una gran herramienta para encontrar soluciones o aproximaciones de soluciones. Por tal motivo, como forma de contribuir al desarrollo de la exploración de la energía oscura, se utilizarán en esta ocasión los polinomios  $J_n$  de Bessel. Que son funciones oscilatorias que decaen proporcionalmente a  $1/\sqrt{x}$ . En forma general, los polinomios  $J_n$  de Bessel se parecen a las oscilaciones amortiguadas del seno y el coseno.

La motivación para usar este tipo de funciones surge de algunos de los resultados de reconstrucciones de la evolución de la ecuación de estado de la energía oscura. Estas reconstrucciones sugieren que existe una predilección por un comportamiento dinámico de la ecuación de estado de la energía oscura, tal como se expone en los artículos (67), (68). Más aún, este comportamiento dinámico podría ser coherente con un carácter oscilatorio, tal como sugieren los artículos (4), (29).

Las funciones  $J_n$  de Bessel tienen además otras propiedades que resultan útiles para describir a la ecuación de estado de la energía oscura; esto es, que cumplen con ser continuas, que oscilan alrededor de un valor fijo (el cero), y que por ser funciones

ondulatorias que decaen, son también acotadas. Las cuales son características que podemos esperar como razonables para describir el comportamiento de la energía oscura y de su ecuación de estado. Garantizando además, que mediante parametrizaciones adecuadas, tendremos un modelo cercano a  $\Lambda$ CDM.

Se espera que esta propuesta de modelo nos permita por un lado obtener información acerca de la energía oscura y su posible comportamiento dinámico y por otro lado ser un punto de partida para nuevas interpretaciones.

### Ecuación de Bessel.

La ecuación de Bessel es la ecuación diferencial de segundo orden:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) = 0, \quad (4.38)$$

cuyas soluciones son llamadas funciones de Bessel de orden  $p$ . Estas funciones aparecieron por primera vez en 1730 en el trabajo de Bernoulli y Euler sobre las oscilaciones de una cadena verticalmente suspendida. Aparecen también en el tratado de calor de Fourier (1822) y en el trabajo sobre la vibraciones de un tambor circular de Euler (1764). Sin embargo, sus propiedades generales fueron estudiadas por primera vez por el matemático y astrónomo Friedrich W. Bessel (1784-1846) quien investigaba el movimiento de los planetas (60).

Se llama orden de la ecuación de Bessel al valor que puede tomar  $p$  en la ecuación (4.38), esto es; si  $p = 1, 2, 3, \dots$ , el orden de la ecuación de Bessel será: 1, 2, 3, ... respectivamente. Las soluciones a la ecuación de Bessel, es decir las funciones de Bessel dependen del orden que tenga la ecuación.

### Ecuación de Bessel de orden cero.

Esta ecuación corresponde a  $p = 0$  de la ecuación (4.38). Esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes. La primera solución a la ecuación de orden cero es:

$$y_1(x) = J_0(x). \quad (4.39)$$

Donde  $J_0(x)$  se le llama el polinomio cero de Bessel cuya forma corresponde a:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \quad (4.40)$$

La segunda solución tiene la forma:

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n; \quad (4.41)$$

es decir, está en términos de la primera solución.

### Ecuación de Bessel de orden $p$ .

Corresponde a cualquier valor  $p$  de la ecuación (4.38). Las soluciones generales a esta ecuación de orden  $p$  están dadas a partir de las funciones de Bessel de primera clase y de segunda clase. Un ejemplo de una función de Bessel de primera clase es  $J_0(x)$  la cual ya vimos.

### Funciones de Bessel de primera clase.

En general, dependiendo el orden, las funciones de Bessel de primera clase tienen el término general:

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}, \quad (4.42)$$

para  $n = p$ , el orden de la ecuación. A estas funciones  $J_n$  se les conoce como **polinomios de Bessel**. En la Figura 4.6 se muestran los primeros 15 polinomios de Bessel correspondientes a  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, 14$ .

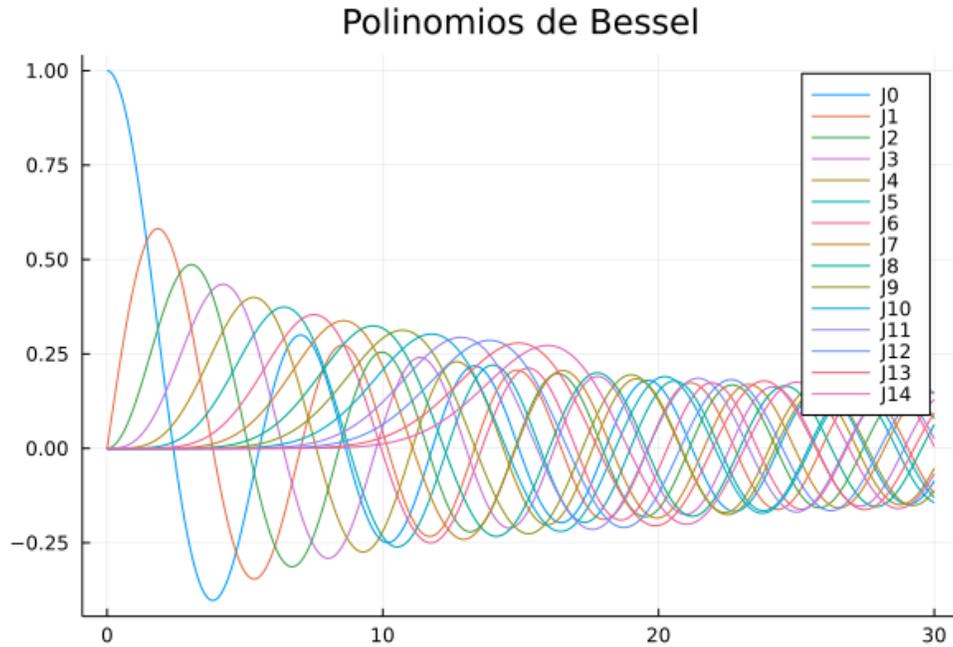


Figura 4.6: Gráfica de los primeros quince polinomios  $J_n$  de Bessel

### Funciones de Bessel de segunda clase.

Estas funciones se denominan  $Y_n(x)$  y se pueden definir a partir de las funciones de Bessel de primera clase como sigue:

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}. \quad (4.43)$$

A partir de aquí, las soluciones a la ecuación de Bessel de orden  $p$  serán:

Para  $n = p > 0$ , con  $n$  un número no entero ( $p \notin \mathbb{Z}$ ), entonces:  $J_p(x)$ , y  $J_{-p}(x)$  son linealmente independientes y la solución general a la ecuación de Bessel estará dada por una combinación lineal de  $J_p(x)$  y  $J_{-p}(x)$ . Esto es:

$$y(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x), \quad (4.44)$$

con  $C_1, C_2$  constantes.

Ahora, si  $p$  es un número entero ( $p \in \mathbb{Z}$ ), entonces  $J_p(x)$ ,  $J_{-p}(x)$  dejan de ser linealmente independientes. En este caso la primera solución estaría dada por las fun-

ciones de Bessel de primera clase  $J_n(x)$ , mientras que la segunda solución linealmente independiente estaría dada por las funciones de Bessel de segunda clase  $Y_n(x)$ . Por lo que para el caso en que  $p$  en la ecuación de Bessel sea un número entero ( $p \in \mathbb{Z}$ ), la solución general sería:

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad (4.45)$$

de igual forma aquí  $C_1, C_2$  son constantes.

Por último, tenemos que cuando  $x \rightarrow 0$ ,  $Y_n(x) \rightarrow -\infty$ . Por lo que se debe tener que  $C_2 = 0$  para que  $y(x)$  sea una función continua. De esta forma, la solución continua general a la ecuación de Bessel se reduce a:

$$y(x) = C J_n(x), \quad (4.46)$$

que es una solución únicamente en términos de los polinomios de Bessel. Donde  $C$  de la ecuación (4.46) es una constante (60), (61).

### 4.3.1. Propuesta de ecuación

Como se mencionó anteriormente en este trabajo se propone modelar a la ecuación de estado de la energía oscura  $w$  a partir de una expansión en serie de soluciones de la ecuación de Bessel. Para esto consideramos lo siguiente: En principio suponemos que la ecuación de estado de la energía oscura  $w$  es una función continua por lo que para modelar  $w$  a partir de las soluciones de la ecuación de Bessel, tomaremos en cuenta solo aquellas soluciones que cumplan con ser continuas; esto es, solo se considerarán las soluciones de primera clase, es decir los polinomios  $J_n$  de Bessel, y se dejarán de lado las soluciones de segunda clase  $Y_n$  de la ecuación de Bessel.

Como primera instancia consideramos la adición de dos de estos polinomios. Sean  $J_n(z), J_m(z)$  dos polinomios de Bessel de orden  $n$  y  $m$  respectivamente, y donde  $z$  representa el corrimiento al rojo del cual es función la ecuación de estado de la energía oscura  $w(z)$ . De esta forma, el modelo de ecuación de estado a partir de los polinomios

de Bessel lo definimos preliminarmente como sigue:

$$w(z) = w_0 \pm J_n(w_1 z) \pm J_m(w_2 z), \quad (4.47)$$

donde  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $n$ ,  $m$ , son los parámetros libres que ajustan la ecuación de estado.

Más adelante con ayuda de herramientas más sofisticadas que involucran estadística Bayesiana validaremos y mejoraremos la ecuación propuesta.

### Experimentación sobre a viabilidad del modelo.

Antes de introducir este modelo de polinomios  $J_n$  de Bessel en la ecuación de Friedmann como en los modelos anteriores (CPL, HT, Efstathiou), vamos primero a evaluar la viabilidad de este modelo. Para esto nos apoyaremos de algunos datos sintéticos de la ecuación de estado de la energía oscura  $w(z)$  como función del corrimiento al rojo. Estos datos sintéticos se obtuvieron de una reconstrucción desde datos del parámetro de Hubble, supernovas del tipo Ia y oscilaciones acústicas bariónicas en un intervalo de corrimiento al rojo de  $z = 0.01$  a  $z = 2.8$ . Esta reconstrucción se encuentra en el artículo de Escamilla L. A. y Vazquez J. A. “*Model selection applied to non-parametric reconstructions of the Dark Energy*” (29). A partir de algunos datos de la reconstrucción que nos fueron proporcionados se obtiene lo que se muestra en la Figura 4.7.

Para la primera parte del experimento; a modo de prueba tomando la ecuación (4.47) vamos a intentar representar los datos reconstruidos de la gráfica 4.7 a partir de “mover” los parámetros  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $n$ ,  $m$  de la ecuación (4.47). Esto nos permitirá observar el comportamiento teórico de la elección de parámetros y así mismo la viabilidad de la ecuación (4.47). En esta parte del experimento, la elección de parámetros se realiza al “tanteo”, o dicho a grosso modo “a mano”, aunque intentando partir de criterios razonables para la elección de cada parámetro, como dar un valor de  $w_0$  cercano a  $-1$ , pues se espera que el modelo se asemeje a  $\Lambda$ CDM. Los parámetros  $w_1$ ,  $w_2$  se consideran de acuerdo a la escala en  $z$ , y los parámetros  $n$ ,  $m$  tratan de acercarse a la amplitud de una supuesta “oscilación” o a considerar algo semejante.

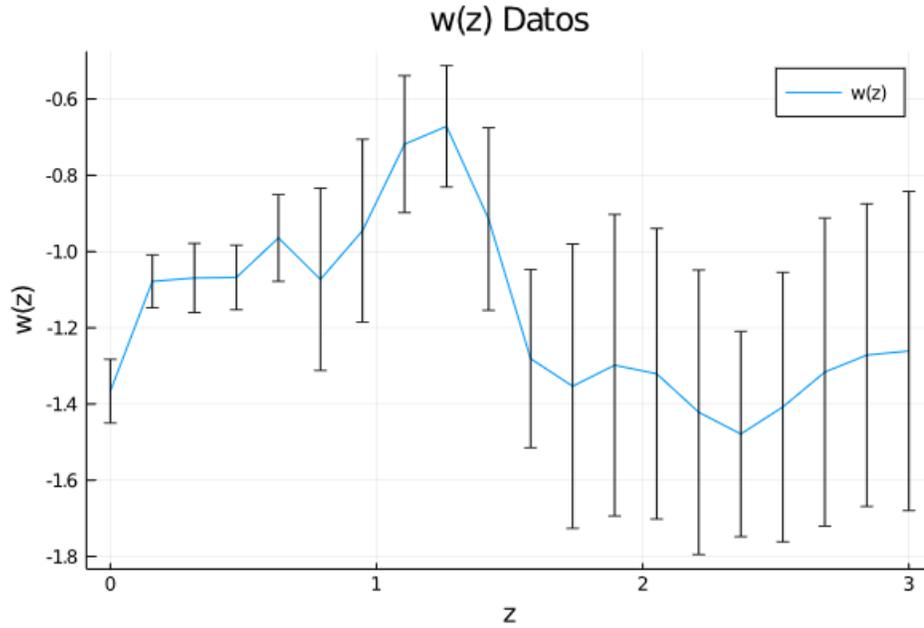


Figura 4.7: Se muestran algunos puntos sintéticos generados a partir de una reconstrucción propuesta en la referencia (29). Las barras verticales en cada punto representan su error asociado.

### Realizamos tres pruebas.

Los valores de los parámetros elegidos para cada una de las pruebas fueron los siguientes:

- **Prueba 1.**

$$J_n = J_8, \quad J_m = J_{20}, \quad w_0 = -1.1, \quad w_1 = 7.9, \quad w_2 = 10.$$

- **Prueba 2.**

$$J_n = J_9, \quad J_m = J_{20}, \quad w_0 = -1.07, \quad w_1 = 9, \quad w_2 = 10.$$

- **Prueba 3.**

$$J_n = J_9, \quad J_m = J_{19}, \quad w_0 = -1.085, \quad w_1 = 9, \quad w_2 = 10.042.$$

Para cada una de las pruebas, sustituimos la elección de parámetros en la ecuación (4.47) y graficamos la función resultante en el intervalo de corrimiento al rojo  $z$  dentro

del cual se encuentran los datos sintéticos de la reconstrucción que se muestra en la Figura 4.7. Las gráficas de las funciones resultantes se muestran en la Figura 4.8, donde también aparecen superpuestos los datos sintéticos de la reconstrucción de  $w(z)$  de la Figura 4.7.

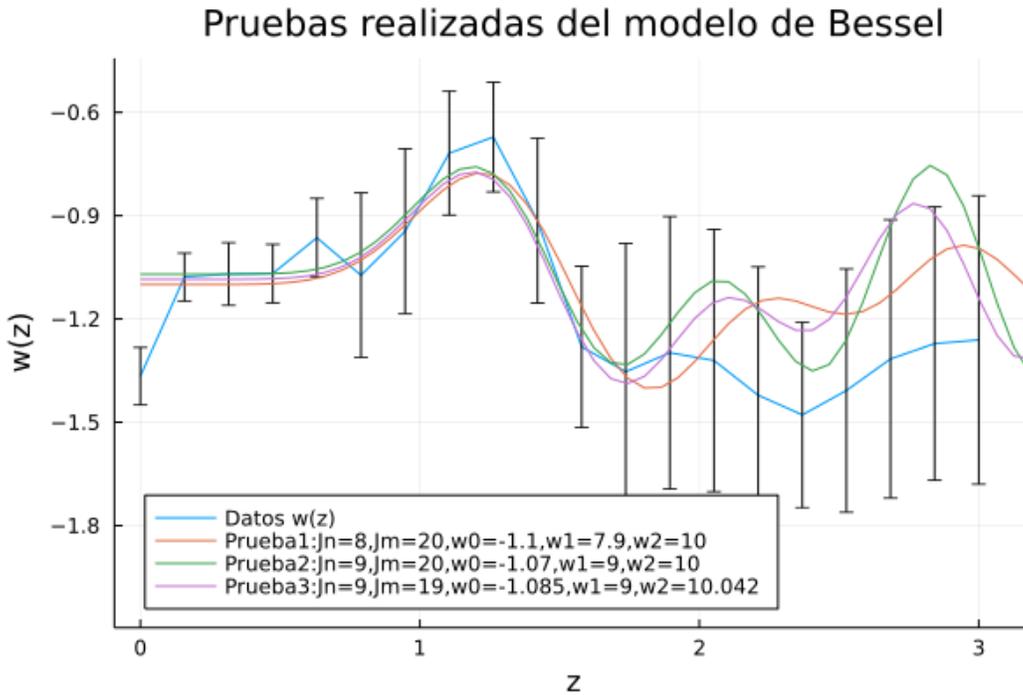


Figura 4.8: Las líneas: naranja, verde, y violeta muestran el comportamiento teórico del modelo de polinomios de Bessel de acuerdo a la elección de parámetros (naranja para la **prueba 1**, verde para la **prueba 2** y violeta para la **prueba 3**), cuando se sustituyen en la ecuación (4.47). La línea azul muestra una interpolación de los datos sintéticos de la reconstrucción de  $w(z)$ . Las líneas verticales representan las barras de error de estos puntos.

Para la siguiente parte del experimento, nos hace falta contrastar el modelo propuesto de la ecuación de estado  $w(z)$  basado en los polinomios de Bessel con los datos observacionales del parámetros de Hubble. Para esto, vamos a partir de las mismas consideraciones que tomamos para analizar los modelos anteriores (CPL, HT, Efstathiou); esto es: con  $H_0$  de acuerdo a la ecuación (4.37), el valor del parámetro de densidad  $\Omega_m$  de acuerdo a la ecuación (4.35), y con un universo plano con una contribución de radiación despreciable conforme a la ecuación (4.34).

Así, como una generalidad, vamos a considerar primero que aparentemente la prueba tres es una mejor opción para representar los datos sintéticos de  $w(z)$  de la Figura (4.7). Esto es por una percepción subjetiva meramente visual. Si suponemos esto, procederemos a tomar los valores de los parámetros de la prueba tres como referencia para validar el modelo. De esta forma, sustituimos en la ecuación (4.47) los valores de los parámetros que se plantearon en la prueba tres para obtener la siguiente ecuación de  $w(z)$ :

$$w(z) = -1.085 + J_9(9z) + J_{19}(10.042z). \quad (4.48)$$

Tenemos una función en términos del corrimiento al rojo  $z$ .

Ahora, la ecuación (4.48) se introduce en la ecuación (4.27). Teniendo como resultado:

$$f_{Bessel\ P3}(z) = e^{\int \frac{3(1-1.085+J_9(9z)+J_{19}(10.042z))}{(1+z)} dz} \quad (4.49)$$

Después, esta última ecuación (4.49) se sustituye por la  $f(z)$  de la ecuación (4.34), teniendo así una expresión teórica del parámetro de Hubble correspondiente a la propuesta de modelo de los polinomios  $J_n$  de Bessel.

Por último graficamos la función generada en el intervalo de corrimiento al rojo donde tenemos datos observacionales del parámetro de Hubble (véase la Figura 4.2); esto es, el intervalo  $z \in [0, 2.5]$ .

Al superponer el modelo propuesto a los datos observacionales del parámetro de Hubble obtenemos la Figura 4.9 que nos da una visualización de cómo contrasta el modelo propuesto con las observaciones.

Como nota: La integral de  $f_{Bessel\ P3}(z)$  de la ecuación (4.49), no puede resolverse analíticamente, por lo que no se puede dar una expresión como en los casos anteriores, así que se mantuvo expresada en términos de los polinomios de Bessel. Para poder graficar la ecuación (4.34) suponiendo que la  $f(z)$  corresponde a la ecuación (4.49), se usó un integrador basado en métodos numéricos, el cual nos generó los valores que se usaron en la gráfica correspondiente de la Figura 4.9.

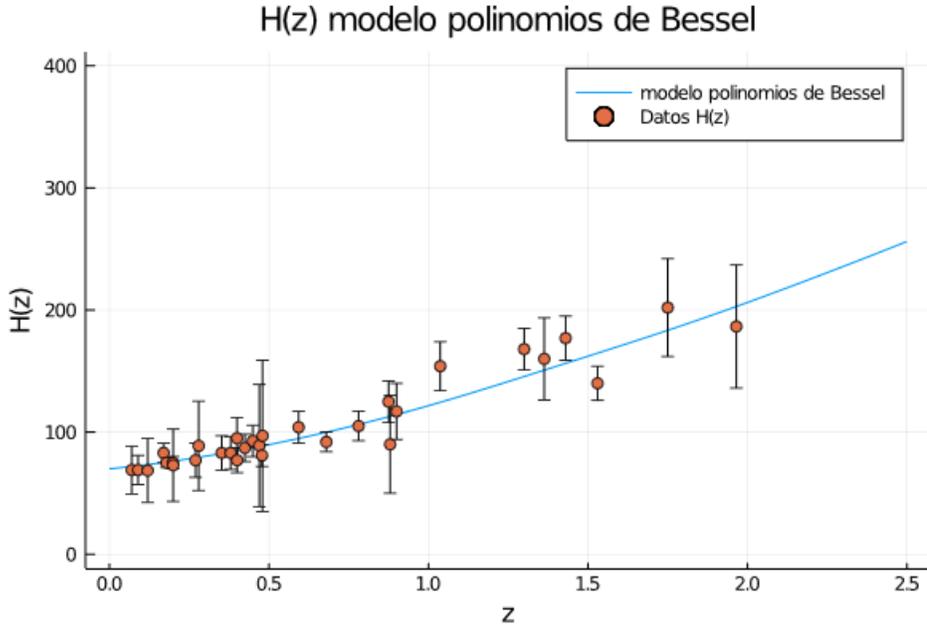


Figura 4.9: Se muestra el comportamiento teórico del parámetro de Hubble según la ecuación (4.34), usando el modelo de polinomios de Bessel tomando como ecuación de estado  $w(z)$  la ecuación (4.48) que corresponde a los valores de los parámetros de la prueba 3, y a su vez como función  $f(z)$  la ecuación (4.49). También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69) véase Figura 4.2.

Por último, para la parte final de la experimentación, comparamos entre sí todos los modelos vistos hasta ahora, y su contraste con los datos observacionales del parámetro de Hubble  $H(z)$ . Esta comparación se muestra en la Figura 4.10, donde se muestran superpuestas las gráficas 4.3, 4.4, 4.5, 4.9, y los puntos de la Figura 4.2.

Vemos que la propuesta de ecuación de estado de la energía oscura basada en polinomios de Bessel tiene un comportamiento similar al de los otros modelos, además de que su función  $H(z)$  se encuentra dentro de la región de error de la mayoría de los datos observacionales del parámetro de Hubble 4.2. Lo mismo pasa para los datos sintéticos de la reconstrucción de  $w(z)$ , donde la ecuación de estado propuesta (4.47) queda dentro del intervalo de error de la mayoría de los puntos en las tres pruebas que se hicieron, por lo que se puede considerar aparentemente que el modelo propuesto parece ser un buen candidato para representar tanto las observaciones, como los datos

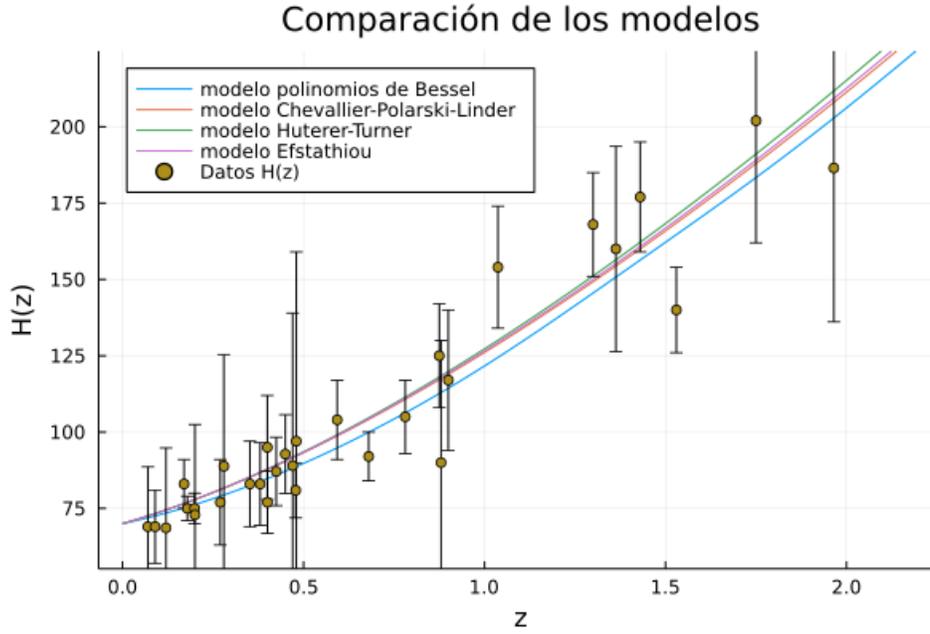


Figura 4.10: Se muestra la comparación de los modelos vistos hasta ahora; CPL, HT, Efstathiou, y la propuesta de polinomios de Bessel en contraste con los datos observacionales del parámetro de Hubble.

sintéticos.

Así, de lo obtenido en esta experimentación preliminar, y confiando en la viabilidad del modelo, nos atreveremos a ir un paso más allá. El paso siguiente será, buscar obtener valores de los parámetros mediante inferencia Bayesiana. Lo que nos permitirá encontrar la mejor combinación de los valores de los parámetros tal que el modelo ajuste mejor a los datos observacionales. Además, con ayuda de este análisis realizaremos pruebas y modificaciones al modelo con el objetivo de ayudar a mejorarlo.

Los modelos que se mencionaron previamente al modelo propuesto también se analizarán con inferencia Bayesiana con el objetivo de contrastar un modelo respecto de otro. Se contemplan para esta comparación seis modelos; los tres modelos que presentamos previamente: Chevallier-Polarski-Linder, Huterer-Turner y Efstathiou; la propuesta de modelo basado en polinomios de Bessel, además del modelo  $\Lambda$ CDM, mas un modelo extra, que es el modelo  $w$ CDM mas simple que hay, donde solo se toma para  $w(z)$  un parámetro  $w_0$  que multiplica a  $z$ .

En el capítulo siguiente se hablará de la inferencia Bayesiana, se mostrarán los resultados obtenidos, y se dará a conocer el resultado final del modelo de ecuación de estado de la energía oscura de polinomios de Bessel.

# Capítulo 5

## Estadística Bayesiana, Análisis y Resultados

### 5.1. Fundamentos para la interpretación de los resultados.

Como se mencionó anteriormente. En este capítulo se darán a conocer los resultados obtenidos después de evaluar los modelos mediante un análisis estadístico. Se presentarán los conjuntos de valores de los parámetros de cada modelo que proporcionan un mejor ajuste a los datos observacionales.

Antes de dar a conocer los resultados, se dará una breve introducción teórica del análisis estadístico al que nos referimos. Este parte del uso de dos disciplinas independientes una de la otra; la estadística Bayesiana, y las cadenas de Markov Monte Carlo. Donde la primera de estas disciplinas es una teoría para la interpretación de datos, mientras que la segunda es un método de muestreo a partir de una cierta distribución. Juntas estas dos disciplinas forman una poderosa herramienta en el análisis de datos, y por tal motivo son de enorme interés para la ciencia. A continuación se describirán brevemente estas dos disciplinas, y se explicará cómo estas se usaron para obtener los resultados.

### 5.1.1. Estadística Bayesiana

Dada una causa, en algunas ocasiones es fácil predecir el resultado; sin embargo, en la ciencia la mayoría de las veces nos encontramos en la situación opuesta; dado un resultado, debemos encontrar la causa o las causas que lo generan. Comúnmente, la lista de posibles causas suele ser numerosa, por lo que es útil poder estimar qué tan factible es una causa en comparación con alguna otra. Generalmente este problema es más difícil de resolver que el primero. El potencial de la teoría Bayesiana radica en el hecho de que proporciona un marco de referencia para resolver cuantitativamente tales problemas. Principalmente, resolver un problema planteado utilizando estadística Bayesiana implica calcular una función de distribución de probabilidad de un conjunto de parámetros, dado un conjunto de datos. A esta función se le llama probabilidad posterior o solo posterior.

El origen de la estadística Bayesiana se remonta a 1763 cuando Thomas Bayes estableció las ideas básicas de su nueva teoría de la probabilidad. En 1774 Laplace la redescubre de forma independiente. En la primera mitad del siglo XX vuelve a tomar fuerza con los trabajos de algunos científicos como Bruno de Finetti y Harold Jeffreys. Este último publicó el libro “The Theory of Probability” (1939), que durante mucho tiempo fue la principal referencia para el uso del teorema de Bayes (63). Este teorema establece que dado un conjunto de hipótesis  $H = \{H_1, H_2, H_3, \dots\}$ ,

$$P(H_i | D) = \frac{P(D | H_i)P(H_i)}{P(D)}; \text{ Posterior} = \frac{\text{Verosimilitud} \times \text{Anterior}}{\text{Evidencia}}, \quad (5.1)$$

donde, como se indica:

- $P(H_i | D)$  es la probabilidad posterior. La cual nos dice qué tan probable es que  $H_i$  sea cierto dado que obtenemos  $D$ .
- $P(H_i)$  es la probabilidad anterior (Prior en inglés). La cual indica qué tan probable es que  $H_i$  sea cierto antes de la observación  $D$ .
- $P(D | H_i)$  es la verosimilitud (likelihood en inglés). Qué nos dice que tan probable es que observemos  $D$  si  $H_i$  es cierto.

- $P(D)$  es la verosimilitud marginal o también llamada evidencia Bayesiana. Esta indica la probabilidad de observar  $D$  sin saber si  $H_i$  es verdad o no. El valor  $P(D)$  es una constante cuyo propósito es el de normalizar la probabilidad posterior; es decir, hacerla igual a 1.

Suponiendo un total de  $N$  hipótesis, la verosimilitud marginal está dada por la suma de los productos de la verosimilitud por la probabilidad anterior de cada una de las hipótesis; es decir:

$$P(D) = \sum_{i=1}^N P(H_i)P(D | H_i), \quad (5.2)$$

representa una suma de  $N$  términos.

En las expresiones la barra vertical  $|$  es un símbolo condicional que significa “dado”,  $H_i$  representa un elemento del conjunto de hipótesis; es decir, la  $i$ -ésima hipótesis, y  $D$  el conjunto de datos u observaciones; es decir, la información que se tiene.

El teorema de Bayes es el resultado más importante en estadística Bayesiana, y sirve como base para el desarrollo de la misma.

Se puede entender la interpretación Bayesiana de la estadística como un grado de confianza que se asigna a priori a un cierto evento, basándose en la información que se tiene de un cierto experimento conforme este se realiza, y donde la probabilidad se ajusta conforme al teorema de Bayes (62; 63).

Para entender cómo opera la estadística Bayesiana y familiarizarnos con los conceptos teóricos, daremos como ejercicio dos ejemplos ilustrativos. Estos ejemplos se toman de la referencia (62).

### Ejemplo 1 <sup>1</sup>.

Supongamos que tenemos una bolsa con 2 bolas dentro, de las cuales estamos completamente seguros de que una de ellas es negra, pero la otra bola podría ser negra (N) o blanca (B). Por lo que tenemos dos escenarios posibles: uno en el que ambas bolas dentro de la bolsa son negras, y otro en el que tenemos una bola negra y

---

<sup>1</sup>Tomado de la referencia (62)

otra blanca. Denotaremos estos estados como NN, y NB respectivamente. Por lo que en este ejemplo el número de hipótesis es  $N = 2$ . En principio ambos casos son igual de probables, por lo que ambos tienen una probabilidad de 0.5 de ser verdaderos. Esta sería la probabilidad anterior para ambos casos.

Si ahora procedemos a sacar una bola de la bolsa y resulta ser negra podremos empezar a calcular la verosimilitud, la cual representa la probabilidad de, dado el resultado del experimento (en este caso haber sacado una bola negra), haberlo obtenido suponiendo una hipótesis como verdadera (ya sea NN o NB en nuestro caso). En este caso las observaciones o el conjunto de datos  $D$  es el haber sacado una bola negra de la bolsa. Si tuviéramos dos bolas negras (es decir, que el estado NN fuera la hipótesis verdadera), entonces la probabilidad de sacar una bola negra sería de 1, pues en este caso no hay bolas blancas, por lo que la verosimilitud del estado NN es 1. Por el contrario, si tuviéramos una bola blanca y una negra (lo que corresponde a ser verdadero el estado NB), entonces la probabilidad de sacar una bola blanca sería de 0.5, pues en este caso sería igual de probable sacar la bola blanca. De modo que para el estado NB la verosimilitud es 0.5.

Para calcular la probabilidad posterior de acuerdo con el teorema de Bayes (5.1), necesitamos el producto de la verosimilitud por la probabilidad anterior de cada hipótesis. Los cuales serían para el estado NN,  $P(D | H_{NN})P(H_{NN}) = (1)(0.5) = 0.5$ . Para el estado NB,  $P(D | H_{NB})P(H_{NB}) = (0.5)(0.5) = 0.25$ . Por lo que la verosimilitud marginal corresponde a  $P(D) = 0.5 + 0.25 = 0.75$ , de acuerdo a la ecuación (5.2).

Podemos ahora calcular la probabilidad posterior de cada hipótesis a partir de la información obtenida y el teorema de Bayes (5.1). Dando como resultado 0.667 para el estado NN, y 0.333 para el estado NB. Estos resultados se muestran de forma más clara en la Tabla 5.1.

Observamos que la suma de las probabilidades posteriores de las hipótesis dan como resultado 1; esto es, está normalizada.

Hemos encontrado un marco cuantitativo para determinar cuál de las dos hipótesis tiene más probabilidad de ser verdadera. Siendo en este caso el estado NN, como era

Hipótesis	Anterior	Verosimilitud	$P(D   H_i)P(H_i)$	Posterior
NN	0.5	1	0.5	0.667
NB	0.5	0.5	0.25	0.333
Total:	1		$P(D) = 0.75$	1

Tabla 5.1: Valores calculados a partir de estadística Bayesiana para el ejemplo 1.

de esperarse.

Aclarado este ejemplo, nos encontramos en condición de explorar otro ejemplo más complejo.

### Ejemplo 2 <sup>2</sup>.

La estadística Bayesiana también se puede utilizar para la estimación de parámetros de ciertas distribuciones. Para este caso, la función de probabilidad (posterior) suele escribirse como  $p(\theta | D)$ . Donde  $\theta$  representa el parámetro de hipótesis. Consideremos el siguiente ejemplo.

Supongamos que un estudiante acaba de ser aceptado en la universidad y quiere saber cómo llegar ahí en transporte público. Se da cuenta que tiene que tomar un camión que lo llevará a su destino. En la primera semana toma 5 camiones; uno por día, de los cuales 2 lo llevan a la universidad mientras que los otros 3 lo llevan a un lugar diferente. Se requiere conocer el porcentaje de camiones que lo dejarán en el lugar correcto. Utilizando estadística Bayesiana analizaremos este ejemplo.

Definimos el conjunto de hipótesis  $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$ , donde para cualquier  $\theta_i$  de  $\theta$  se tiene que  $0 \leq \theta_i \leq 1$ . Cada  $\theta_i$  representa una proporción de los camiones que dejan al estudiante en el lugar correcto, y que consideramos como un posible estado (una hipótesis). En principio pueden existir tantos  $\theta_i$  como números hay entre 0 y 1, pero para hacer más simple el ejemplo, vamos a restringir a  $\theta$  a solo once hipótesis que van desde 0 hasta 1, separados entre sí por intervalos de 0.1, donde cada estado  $\theta_i$  tiene una probabilidad de  $\frac{1}{11}$ , pues cada uno es en principio igual de probable. Así, la probabilidad anterior sería la misma para todas las hipótesis (0.0909).

<sup>2</sup>Tomado de la referencia (62)

Si representamos con  $N$  al número de veces que se repitió el experimento (en este caso el número total de camiones que se tomaron). Definimos  $x$  como el número de aciertos (número de camiones que dejan al estudiante en la universidad), entonces la función de probabilidad de que  $x$  ocurra suponiendo alguna de las hipótesis  $\theta_i$  se puede expresar como una función binomial:

$$P(x | \theta_i) = \frac{N!}{x!(N-x)!} \theta_i^x (1 - \theta_i)^{N-x}, \tag{5.3}$$

que corresponde a la verosimilitud de cada  $\theta_i$ . Para nuestro ejemplo  $N = 5$ ,  $x = 2$ .

Siguiendo estas reglas tendríamos completas las probabilidades anteriores y las verosimilitudes de cada una de las hipótesis. Por lo que nos encontramos en condición de calcular ahora las probabilidades posteriores correspondientes.

Como hicimos en el ejemplo anterior, los resultados ya calculados se muestran en la Tabla 5.2, que corresponde al análisis Bayesiano del ejemplo 2.

Hipótesis $\theta_i$	Anterior $p(\theta_i)$	Verosimilitud $p(x   \theta_i)$	Verosimilitud $\times$ Anterior $p(x   \theta_i)p(\theta_i)$	Posterior $p(\theta_i   x)$
0	0.0909	0	0	0
0.1	0.0909	0.0729	0.0066	0.0437
0.2	0.0909	0.2048	0.0186	0.1229
0.3	0.0909	0.3087	0.0281	0.1852
0.4	0.0909	0.3456	0.0314	0.2074
0.5	0.0909	0.3125	0.0284	0.1875
0.6	0.0909	0.2304	0.0209	0.1383
0.7	0.0909	0.1323	0.0120	0.0794
0.8	0.0909	0.0512	0.0047	0.0307
0.9	0.0909	0.0081	0.0007	0.0049
1	0.0909	0	0	0
Total:	1		0.1515	1

Tabla 5.2: Valores calculados a partir de estadística Bayesiana para el ejemplo 2.

Se observa en la Tabla 5.2 que la probabilidad posterior mayor corresponde a  $\theta_i = 0.4$ . Por lo tanto es el estado que mejor se ajusta a la descripción del experimento. Esto tiene sentido, pues de los 5 camiones que pasaron, únicamente 2 dejaron al estudiante en la universidad, lo cual corresponde a una proporción de  $\frac{2}{5} = 0.4$ .

A partir de la información de la Tabla 5.2 podemos reconstruir la distribución de probabilidad para el parámetro  $\theta_i$ , encontrando un resultado interesante. Si graficamos los valores de la probabilidad posterior como función de  $\theta_i$  podemos observar claramente un comportamiento gaussiano, el cual se puede apreciar en la Figura 5.1.

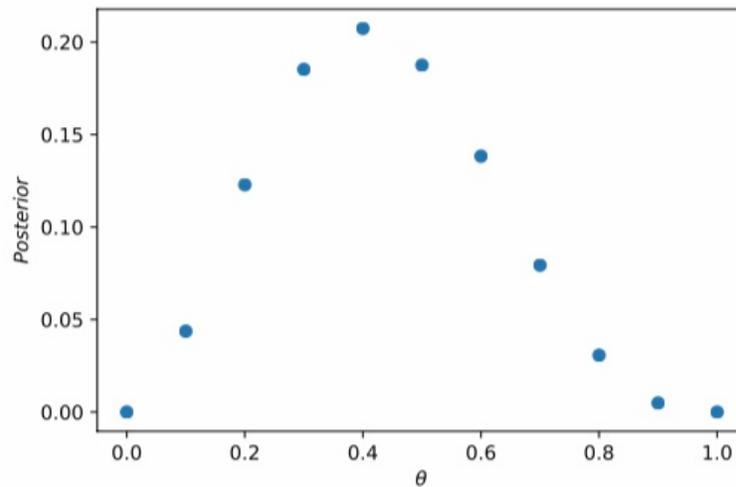


Figura 5.1: *Distribución de probabilidad para el parámetro  $\theta_i$*  a partir de los datos de la Tabla 5.2. Fuente: (62).

### 5.1.2. Cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC)

#### Cadenas de Markov

Se puede entender a una cadena de Markov como una secuencia de posibles eventos donde a cada uno de estos se le denomina “*paso*” o “*eslabón*”, y que tiene la propiedad de que los valores futuros son independientes de los valores pasados; es decir, que a partir del estado presente, saber como se llegó ahí no afecta ni interfiere

con la probabilidad de pasar al estado futuro. Esto se puede definir formalmente como sigue:

Una sucesión de variables aleatorias  $X_t$  indexadas por un conjunto  $T \subset \mathbb{R}$ , donde cada elemento de  $X_t$  es también un elemento de un espacio de estados  $\Omega$  se denomina **proceso estocástico** y se dice que es una cadena de Markov si se cumple la siguiente propiedad:

$$P(X_{n+1} = x \mid X_0, \dots, X_n) = P(X_{n+1} = x \mid X_n), \quad (5.4)$$

para todo  $x, n$ . Lo cual quiere decir, que la probabilidad de que ocurra un estado futuro dados todos los estados ocurridos anteriores a ese, debe ser igual a la probabilidad de que ocurra ese estado futuro dado solo el estado anterior inmediato; es decir, solo el estado presente. La propiedad (5.4) representa un modelo probabilístico y se conoce como la propiedad de Markov. Comúnmente el parámetro  $t$  se interpreta como el tiempo, ya que marca la eventual progresión de los pasos. Para este parámetro, se pueden considerar índices  $t \in T$  en espacios muy generales, aunque los casos más comunes son:

- $T$  discreto (Procesos a tiempo discreto):  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $T = \mathbb{N}$ ,
- $T$  continuo (Procesos a tiempo continuo):  $T = [0, 1]$ ,  $T = [0, \infty)$ ,  $T = \mathbb{R}$ .

En resumen, una cadena de Markov puede imaginarse como una sucesión de variables aleatorias:

$$X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n \rightarrow \dots,$$

en la cual cada valor de la variable es generado por un solo elemento progenitor (64).

Un ejemplo que puede ayudar a comprender el concepto de cadenas de Markov es el de una línea telefónica, la cual puede tener uno de dos estados; libre (1) y ocupado (0). Si una nueva llamada llega cuando la línea está ocupada (0), ésta no procederá, y el estado siguiente dependerá solo de si la llamada presente continúa o se finaliza, y ocurre lo mismo si no llega ninguna llamada nueva. Ahora, sí una nueva llamada

llega cuando la línea está libre (1), entonces se toma la llamada, por lo que en el siguiente paso la línea estará ocupada (0). Si no entra una nueva llamada mientras la línea está libre (1), entonces ésta continuará libre en el siguiente paso. Este proceso puede continuar indefinidamente y siempre, el valor del paso futuro dependerá solo del estado actual en el que se encuentre la línea, y de las probabilidades de que llegue una nueva llamada, o de que se desocupe la línea, sin importar jamás si la línea estuvo libre u ocupada en pasos anteriores al presente, o de cuántas veces estuvo ocupada o libre la línea antes del estado actual. En este caso, la secuencia de los estados que podría tomar la línea telefónica (secuencia de ceros y unos) sería una cadena de Markov.

### Monte Carlo vía Cadenas de Markov

Se designa método de Monte Carlo (MC) a una familia de técnicas computacionales basadas en el muestreo aleatorio, empleadas para hallar soluciones o resolver problemas. Por lo que no existe un solo método MC sino muchos de ellos. En la actualidad, sobre todo en relación con la estadística Bayesiana, las versiones del método MC que más se utilizan se basan en la construcción de cadenas de Markov para obtener muestras de distribuciones de probabilidad específicas; estas extensiones del método MC se conocen como métodos de Monte Carlo vía Cadenas de Markov (MCMC, por sus siglas en inglés) (64).

Un método MCMC sortea variables aleatorias según una distribución de probabilidad. Su algoritmo, nos da una forma de construir cadenas donde los valores de algún parámetro que tengan mayores probabilidades posteriores aparezcan de manera más frecuente que los valores con probabilidades posteriores menores. Esto no garantiza la ausencia de valores con poca probabilidad posterior, sin embargo el algoritmo hará que aparezca con menos frecuencia.

El procedimiento más popular que implementa MCMC para generar cadenas de Markov es el algoritmo Metropolis-Hastings. Una descripción sencilla de este algoritmo MCMC la podemos encontrar en la referencia (22), la cual corresponde a los siguientes pasos:

- 1. Se comienza en algún estado  $\theta$
- 2. Se genera una propuesta  $\theta'$  para el siguiente paso.
- 3. Definimos la variable  $h = \text{anterior} \times \text{verosimilitud}$  para algún parámetro  $\theta$ . Si  $h'$  de  $\theta'$  es mayor que la  $h$  del estado actual entonces se da el paso hacia  $\theta'$  en la cadena y éste será su nuevo estado actual. Se reinicia el proceso con  $\theta'$  como el nuevo estado inicial.
- 4. Si  $h'$  es menor entonces se propone una probabilidad mínima  $\frac{h'}{h}$  y se genera un número aleatorio entre 0 y 1, si el número generado es mayor o igual a  $\frac{h'}{h}$  entonces se da el paso y  $\theta'$  será el nuevo estado actual en la cadena. Se reinicia el proceso con  $\theta'$  como nuevo estado inicial. Pero si el número generado es menor que  $\frac{h'}{h}$  entonces se rechaza la propuesta  $\theta'$  y se reinicia el proceso <sup>3</sup>.

Así, el algoritmo Metropolis-Hastings es una forma de realizar comparaciones entre hipótesis. Donde cada hipótesis tiene una cierta probabilidad de ser verdadera. Teniendo entonces cadenas de Markov del espacio de estados de algún parámetro (o parámetros) buscando los valores con mayor probabilidad posterior de acuerdo a los datos que se tienen (22; 62). El objetivo de los algoritmos Monte Carlo vía cadenas de Markov MCMC es aproximar el perfil de distribución posterior (o de verosimilitud) de los parámetros de algún modelo mediante un muestreo pseudoaleatorio en un espacio probabilístico (espacio de estados).

Generalmente en el análisis de los modelos, el parámetro  $\theta$  es un vector; es decir, representa en realidad un arreglo de parámetros, donde la dimensión del vector  $\theta$  está dada por el número total de parámetros que caracterizan al modelo. La idea es que después de un tiempo, la cadena que genera el algoritmo MCMC converja hacia un estado estacionario o lo más próximo a este. Una vez llegada a esta etapa, podemos calcular el perfil de distribución de probabilidad de cada parámetro del vector  $\theta$  simplemente con aproximar el histograma del muestreo proyectado en el espacio de parámetros. Como ejemplo, para un modelo que se caracteriza por dos

---

<sup>3</sup>Descripción del algoritmo Metropolis-Hastings, pasos: 1, 2, 3 y 4 se toman de la referencia (22)

parámetros  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , los resultados de una posible caminata o secuencia de pasos que se podrían obtener mediante un análisis MCMC se muestra en la Figura 5.2. Donde cada punto del muestreo representa un paso en la cadena de Markov que se generó a partir de un valor inicial.

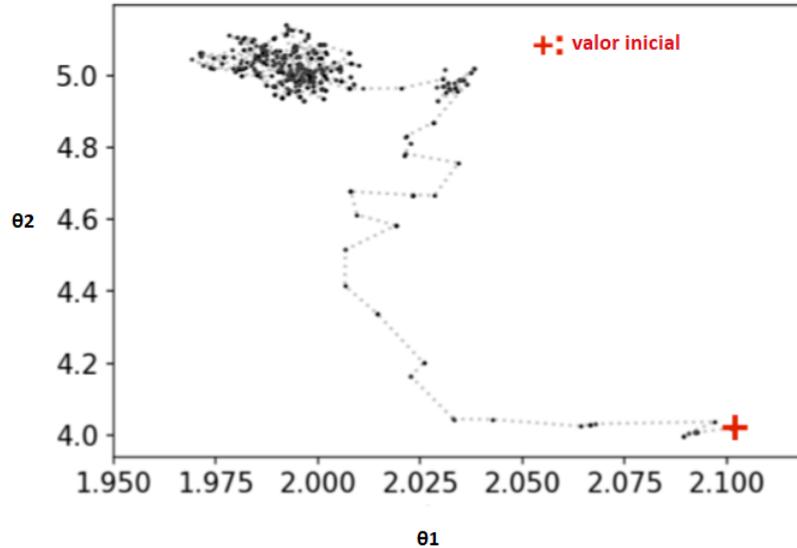


Figura 5.2: Se muestra un ejemplo de cómo se vería una representación gráfica de una posible caminata a partir de un valor inicial en el espacio de parámetros obtenida mediante MCMC para el parámetro  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  del modelo supuesto. Cada punto en la figura representa un paso en la cadena de Markov.

Con el muestreo de la Figura 5.2 obtenemos el histograma de cada parámetro  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , los cuales se muestran en la Figura 5.3. En esta figura se observan también las zonas de concentración de puntos; es decir, donde converge la cadena. Los valores  $\theta_1 = 1.99_{-0.01}^{+0.01}$ ,  $\theta_2 = 5.03_{-0.05}^{+0.04}$  representan los valores que aparecieron con mayor frecuencia dentro de las cadenas para los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente, y por ende los valores con mayor probabilidad posterior según el método MCMC. Por último, podemos observar como el perfil de los histogramas de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  asemejan a la silueta de una curva Gaussiana.

El muestreo generado por las cadenas de Markov no solo nos permite aproximar los perfiles de probabilidad posterior de los parámetros de un modelo, sino que además nos proporciona información sobre la correlación que existe entre éstos. Para entender

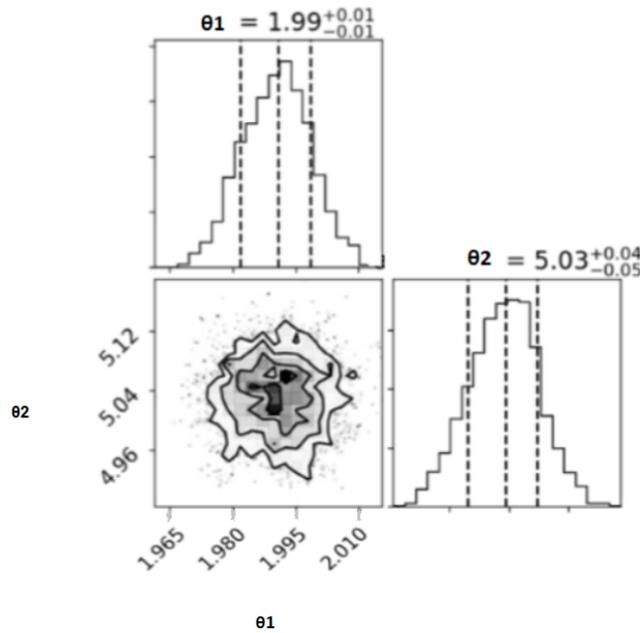


Figura 5.3: Se muestra el histograma de los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  del muestreo de la Figura 5.2 generado por MCMC de un supuesto modelo. También se muestran, los valores que aparecieron con mayor frecuencia dentro del muestreo, así como las zonas donde se concentró la mayor cantidad de puntos. A mayor cantidad de puntos dentro de esa zona, se aprecia un color más oscuro.

cómo se obtiene esta información de correlación daremos primero algunas definiciones y ejemplos ilustrativos.

### 5.1.3. Covarianza entre variables aleatorias

Sea  $x$  una variable aleatoria, se define la media o el valor esperado de  $x$  como:

$$\mu = \langle x \rangle = \int xP(x)dx, \tag{5.5}$$

donde  $P(x)$  es una función de densidad de probabilidad. De acuerdo a esto, definimos además la varianza de  $x$  como:

$$\text{var}(x) \equiv \sigma_x^2 \equiv \langle (x - \mu)^2 \rangle = \int (x - \mu)^2 P(x)dx = \langle x^2 \rangle - \mu^2; \tag{5.6}$$

es decir, el valor esperado del cuadrado de la distancia que hay entre la variable aleatoria con su valor esperado. La varianza nos da una medida del ancho de la función de distribución de probabilidad alrededor del valor esperado o media. Convenientemente este ancho suele expresarse en términos de la desviación estándar, la cual se define como:

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}. \quad (5.7)$$

En ocasiones en un experimento se involucra más de una variable aleatoria, de modo que deseáramos poder combinar dos o más mediciones para extraer una única variable. Por ende, pensemos en lo siguiente. Sean dos variables aleatorias;  $x, y$  con valores esperados;  $\mu_x, \mu_y$ . Definimos la variable  $a = x + y$ , y el valor esperado de  $a$  como  $\mu_a = \mu_x + \mu_y$ , entonces la varianza de  $a$  sería:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 = \langle (a - \mu_a)^2 \rangle &= \langle (x + y - (\mu_x + \mu_y))^2 \rangle \\ &= \langle ([x - \mu_x] + [y - \mu_y])^2 \rangle \\ &= \langle (x - \mu_x)^2 + (y - \mu_y)^2 + 2(x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle. \end{aligned}$$

Tenemos en esta expresión las varianzas de las variables  $x, y$  (i.e.  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ ) más un término extra. A este nuevo término se le llama la covarianza de variables aleatorias; esto es:

$$\text{cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle, \quad (5.8)$$

la cual es una medida de la relación lineal que existe entre las dos variables aleatorias.

Ahora, vamos a suponer que en cierto experimento, al realizar una medición obtenemos valores para  $x$  y para  $y$ . Después, si el experimento se repite, y realizamos diversas mediciones, tendríamos entonces un conjunto de valores  $\{(x, y)\}$  en el espacio. El valor de la covarianza de  $x$  y de  $y$  es acorde a la manera en cómo se dispersan

los puntos en el espacio de acuerdo a lo siguiente:

Si la covarianza es cero, indica que no existe una relación lineal entre las variables; se dice entonces que son independientes. Si la covarianza es negativa, tenemos una anti-correlación entre las variables, la cual está asociada a una relación inversa entre estas; es decir, si una aumenta la otra disminuye. Si por el contrario la covarianza es positiva, tenemos una correlación entre las variables, la cual se asocia a una relación directa; es decir, si una variable aumenta también la otra lo hará, y lo mismo si disminuye. Este comportamiento de las dispersiones de los puntos se muestran esquemáticamente en la Figura 5.4.

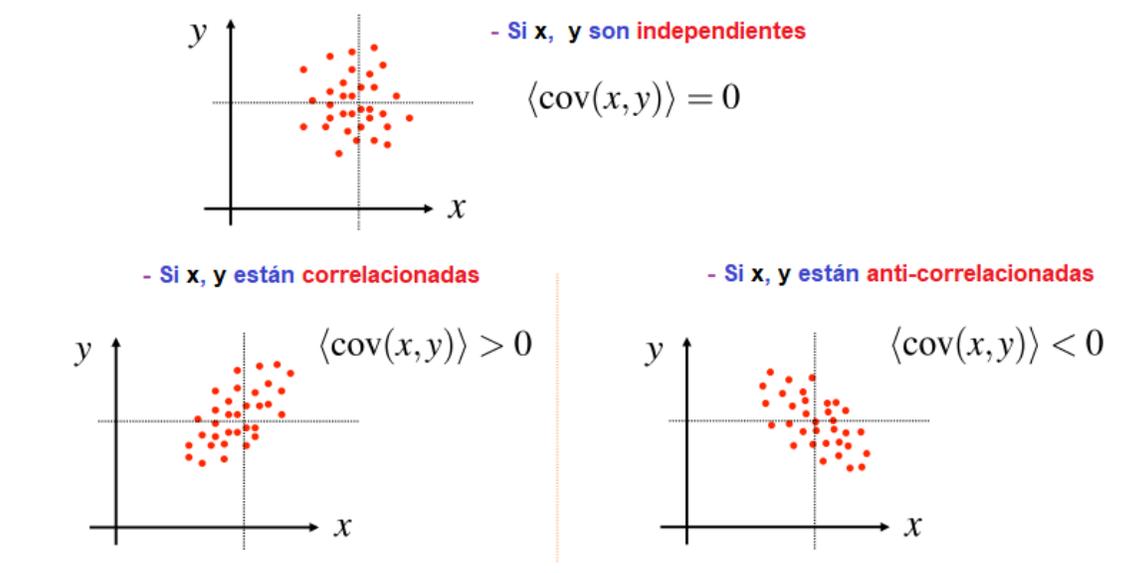


Figura 5.4: Se muestra el comportamiento de la dispersión de puntos de acuerdo a la correlación que existe entre las variables  $x$  y  $y$  y determinadas por el valor de su covarianza.

Ahora, si el valor absoluto de la covarianza de dos variables es cercano a cero, entonces estas variables están poco correlacionadas, en este caso, las regiones donde se acumulan los puntos se aproximan más a tener la silueta de un círculo; de hecho esto es lo que ocurre cuando la covarianza es cero, aquí, la acumulación de puntos parecerá casi un círculo perfecto. Por el contrario, si el valor absoluto de la covarianza se aleja de cero, las zonas de acumulación de puntos serán elipses. Mientras más se

aleje el valor de la covarianza de cero, las elipses se harán más delgadas, pareciéndose cada vez más a una línea recta con pendiente positiva o negativa de acuerdo a si se tiene una correlación o una anti-correlación respectivamente. En la Figura 5.5 vemos como cambian las siluetas de las regiones de concentración de puntos de acuerdo a diferentes valores de covarianza entre las variables  $x$  y  $y$ .

Para una medición bivariable tenemos cuatro pares posibles de los cuales obtener covarianzas; esto es, tendríamos las covarianzas:  $\sigma(x, x)$ ,  $\sigma(x, y)$ ,  $\sigma(y, y)$ ,  $\sigma(y, x)$ . Después si la medición es multivariable; es decir, involucra más de dos variables, el número de covarianzas entre pares que se puede obtener será mayor dependiendo del número de variables. Para ayudarnos a organizar este conjunto de covarianzas, éstas se arreglan en una matriz llamada **matriz de covarianza**  $\Sigma$ , la cual nos permite ver la covarianza de todos los posibles pares de componentes que se involucran en una medición. Al conjunto de variables aleatorias se le llama a veces vector aleatorio. Así, para un vector aleatorio  $X$  de longitud  $N$ , la matriz de covarianza  $\Sigma_X$  asociada será de dimensión  $N \times N$ , donde en la intersección de la  $i$ -ésima fila con la  $j$ -ésima columna tendríamos la covarianza de la variable  $x_i$  con  $x_j$  como se muestra en la ecuación 5.9.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Ahora, la covarianza tiene las siguientes propiedades:

- $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ . Es simétrica.
- $\sigma_{xx} = \sigma_x^2$ . La covarianza de una variable consigo misma es igual a su varianza.

Por lo que se tiene que la matriz de covarianza será simétrica, teniendo además la varianza de cada una de las variables en su diagonal principal.

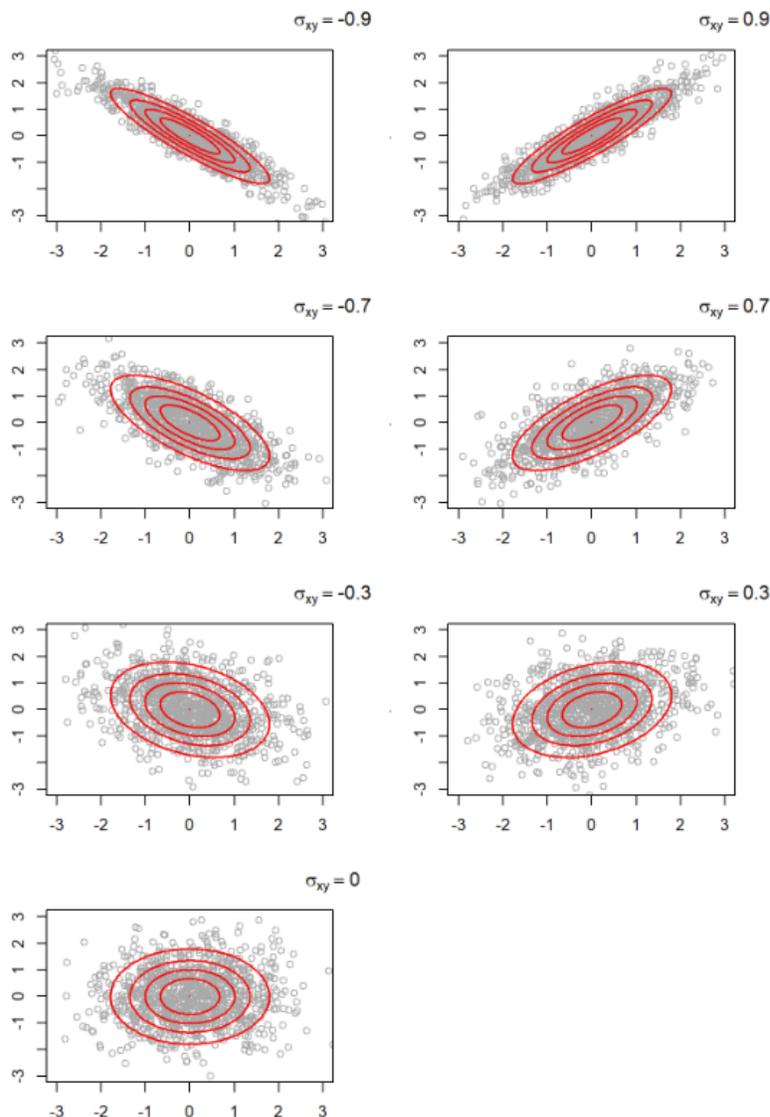


Figura 5.5: Se muestra cómo se dispersan los puntos a diferentes valores de la covarianza entre las variables  $x$  y  $y$ . Se puede observar que cuando este valor se aproxima a cero, la acumulación de puntos se concentra en una región circular, mientras que conforme la covarianza se aleja del cero, éstas regiones se vuelven elipses cada vez más delgadas.

#### 5.1.4. Chi-cuadrada; ajuste y prueba de hipótesis

Dados algunos datos, y un modelo teórico particular, deseamos saber si: ¿son los datos consistentes con el modelo? y en el contexto del modelo ¿cual es la mejor estimación de sus parámetros? De modo que se necesita una medida de la consistencia

de los datos con el marco teórico; esto es, la  $\chi^2$ .

Suponemos que al medir un parámetro obtenemos  $x \pm \sigma$ , y suponemos además que algún teórico nos dice que ese parámetro debería tener un valor de  $\mu$ . En este simple escenario, podemos escribir la probabilidad de obtener el valor  $x \pm \sigma$  dada la predicción:

$$P(\text{datos ; predicción}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.10)$$

Para valorar la consistencia de los datos nos planteamos la siguiente pregunta. Si el modelo es correcto, ¿cuál es la probabilidad de obtener un resultado al menos tan alejado de la predicción como el valor observado? o lo que es lo mismo, ¿que tan probable es que encontremos un valor que esté más alejado de la predicción de lo que lo está la predicción con el valor observado? La respuesta a esta pregunta es simple; y sera el área bajo la curva las  $x$  que cumplan que:

$$|x - \mu| > |x_{\text{obs}} - \mu|. \quad (5.11)$$

Las  $x$  que cumplen con la condición (5.11) se muestran en la Figura 5.6 como regiones.

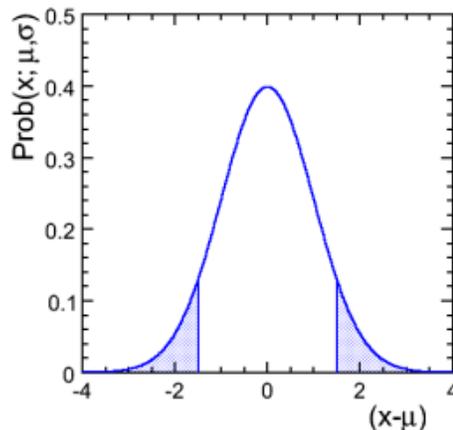


Figura 5.6: Se muestran las regiones donde se localizan las  $x$  tales que cumplen con la condición (5.11); estas se indican en color azul.

Ahora, si definimos:

$$\chi^2 = \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}; \quad (5.12)$$

Introducimos la  $\chi^2$  de la ecuación (5.12) en la ecuación (5.10). La propiedad que se contempla en la ecuación (5.11) es equivalente a pedir:

$$P(\chi^2 > \chi_{\text{obs}}^2). \quad (5.13)$$

Es la probabilidad de las Chi-cuadrada tales que sean mayores a la Chi-cuadrada correspondiente al valor observado.

Para variables de distribución Gaussiana,  $\chi^2$  forma la base de las pruebas de consistencia.

La distribución de probabilidad para  $\chi^2$  puede ser obtenida desde la distribución en una dimensión. Consideremos que:

$$P(\chi^2)d(\chi^2) = G(x)dx; \quad (5.14)$$

con G una función de  $x$ . Ahora ya que:

$$\frac{d\chi^2}{dx} = 2 \frac{(x - \mu)}{\sigma^2} = 2 \frac{\sqrt{\chi^2}}{\sigma}, \quad (5.15)$$

entonces:

$$P(\chi^2) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\sigma}{2\sqrt{\chi^2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\chi^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (5.16)$$

Es la distribución de probabilidad para  $\chi^2$  en una dimensión; es decir una variable.

### Chi-cuadrada en dimensiones mayores

En dos dimensiones; es decir, para dos variables  $x, y$ , la probabilidad la expresamos como:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}. \quad (5.17)$$

Donde ahora la Chi-cuadrada sería:

$$\chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2 = \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2}; \quad (5.18)$$

es decir, la suma de las Chi-cuadradas de cada una de las variables.

En analogía al caso de una variable, consideremos la siguiente pregunta: supongamos que en una medición obtenemos  $\{x, y\}$ . ¿Cómo de consistente es esta medición con los valores esperados? Análogamente al caso con una variable, la respuesta está en la probabilidad de obtener una probabilidad menor que la del valor observado. Lo que equivale a la integral en dos dimensiones sobre la región donde  $\chi^2 > \chi_{\text{obs}}^2$ . Debemos notar que ésta es la misma condición que la que aparece en la ecuación (5.13); en este caso en dos dimensiones.

De esta forma; para dos variables, la distribución de probabilidad para  $\chi^2$  sería:

$$P(\chi_x^2, \chi_y^2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[\chi_x^2 + \chi_y^2]} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\chi^2}{2}}. \quad (5.19)$$

Un análisis similar se puede hacer para distribuciones de probabilidad para Chi-cuadrada considerando un número mayor de variables (o mediciones); es decir, para dimensiones mayores.

Se le llama grados de libertad a las variables que se tengan en una distribución de Chi-cuadrada, y se tendrán tantos grados de libertad como variables se tengan.

De forma general, se puede establecer la siguiente relación:

$$P(\chi^2; n) \propto (\chi^2)^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}. \quad (5.20)$$

Donde  $P(\chi^2; n)$  representa la distribución de probabilidad para Chi-cuadrada para  $n$  grados de libertad o  $n$  variables.

De igual forma la generalización de  $\chi^2$  para  $n$  grados de libertad sería:

$$\chi^2 = \sum_i^n \chi_i^2 = \sum_i^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i}. \quad (5.21)$$

Representa la suma de cada una de las Chi-cuadradas de cada una de las variables. Una expresión aún más general se puede obtener para  $\chi^2$  usando la inversa de la matriz de covarianza  $\Sigma$ ; esta es la siguiente:

$$\chi^2 = \sum_{ij} (D_i - y_i(x_i | \theta)) Q_{ij} (D_j - y_j(x_j | \theta)); \quad (5.22)$$

donde  $Q_{ij}$  denota un elemento de la inversa de la matriz de covarianza de los datos (i.e.  $\Sigma^{-1}$ ). En esta expresión mas general, ya se contempla un conjunto de datos  $D_i$  y un modelo para esos datos  $y(x_i | \theta)$ , que depende de un conjunto de parámetros  $\theta$ .

El objetivo de este análisis es determinar cómo de consistente es una medición en comparación con los valores esperados de acuerdo a algún modelo. Podemos ahora ampliar la respuesta que se proporcionó para los casos de una y dos dimensiones (ecuación (5.13)) y dar la respuesta general. Lo que se busca entonces es:

$$P(\chi^2 > \chi_{\text{obs}}^2) = \int_{\chi_{\text{obs}}^2}^{\infty} P(\chi^2; n) d\chi^2; \quad (5.23)$$

para  $n$  grados de libertad. Esta probabilidad representa la consistencia de las mediciones con los valores esperados en un modelo. Aquí,  $P(\chi^2; n)$  corresponde con la ecuación (5.20).

Ahora, ¿cómo son las distribuciones de probabilidad  $P(\chi^2; n)$ ? En la Figura 5.7 vemos como estas distribuciones cambian de acuerdo al número de grados de libertad. Podemos observar que para valores grandes de  $n$  ( $> 40$  aproximadamente), las distribuciones  $P(\chi^2; n)$  comienzan a parecerse a distribuciones Gaussianas. Lo cual resulta ser bastante útil, debido a que para variables de distribución Gaussiana, se tiene que:

$$\chi^2 = -2 \ln L. \quad (5.24)$$

Con  $L$  la verosimilitud (Likelihood). De forma superficial se puede ver esto intuiti-

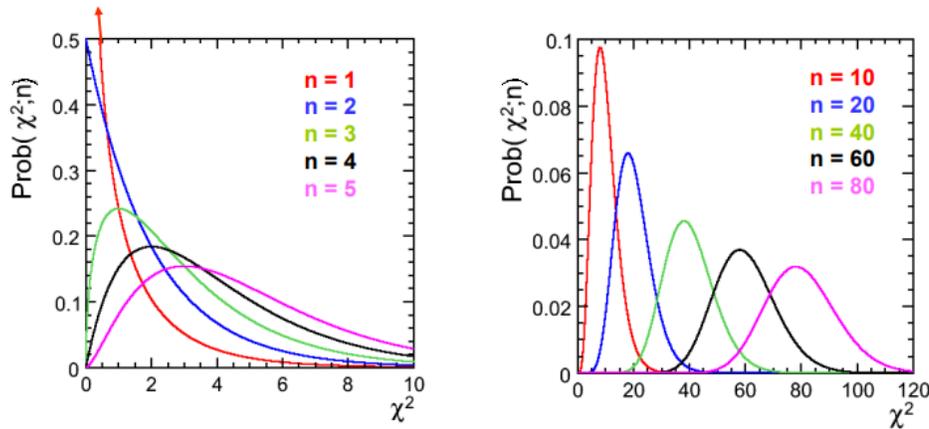


Figura 5.7: Se muestran las distribuciones de probabilidad  $P(\chi^2; n)$  considerando diferentes valores de grados de libertad  $n$ . Se observa como al aumentar el valor de  $n$  las  $P(\chi^2; n)$  se parecen cada vez mas a una distribución Gaussiana.

vamente en la ecuación (5.20) si obtenemos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación. Por lo que en el límite Gaussiano, cuando la verosimilitud aproxima a una Gaussiana; esto es, para valores grandes de grados de libertad se puede tomar la aproximación para las distribuciones  $P(\chi^2; n)$ .

Ahora, se puede ver de (5.24) que el máximo de probabilidad corresponde a el mínimo de Chi-cuadrada, por lo que para variables de distribución Gaussiana encontrar un ajuste de los datos para algún modelo, implica minimizar la Chi-cuadrada (i.e.  $\frac{d\chi^2}{dx} = 0$ ).

En conclusión, la mejor estimación de los valores reales de una variable es tal que maximice la verosimilitud y minimice la Chi-cuadrada. Lo que significa que, dado algún modelo, el mejor ajuste de sus parámetros corresponde a minimizar la ecuación (5.22).

Dado lo anterior, se puede implementar el algoritmo MCMC y construir las cadenas de Markov de los modelos.

## 5.2. Análisis y Resultados

### 5.2.1. Ejemplo de MCMC con $\Lambda$ CDM

Veamos ahora un ejemplo del método MCMC aplicado a un modelo cosmológico. Tomaremos como referencia el más sencillo de los modelos que hemos visto; este es, el modelo  $\Lambda$ CDM, en el cual consideramos sólo dos parámetros,  $\Omega_m$  y  $H$ ; el parámetro de densidad de materia y el parámetro de Hubble respectivamente.

Antes de empezar, definimos la siguiente relación:

$$H_0 = 100 \frac{km}{sMpc} h, \quad (5.25)$$

donde  $h$  es la constante adimensional de Hubble. Esta constante  $h$  será la que se usará en el análisis de todos los modelos a partir de ahora.

A partir de la ecuación (4.25), vamos a suponer las mismas condiciones que consideramos para analizar los modelos anteriores (CPL, HT, Efstathiou, Polinomios de Bessel); es decir, restringimos el modelo a un universo plano con radiación despreciable (ver sección 4.2.2). Con esto lograremos que los modelos se analicen bajo las mismas condiciones. Así, la ecuación de Friedmann para el parámetro de Hubble  $H(z)$  referente al modelo  $\Lambda$ CDM es:

$$H(z) = 100 \frac{Km}{sMpc} h [\Omega_m(1+z)^3 + (1-\Omega_m)]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.26)$$

En esta ecuación ya se consideró la constante adimensional de Hubble  $h$  de la ecuación (5.25), la cual se reemplazó por la constante de Hubble  $H$ .

Para el análisis a partir del método MCMC de éste y de todos los modelos se usó el código SimpleMC (65). El cual es un código para la estimación de parámetros cosmológicos que permite inferir los valores que pueden tomar los parámetros del modelo que se quiere estudiar usando datos observacionales. El SimpleMC sortea valores de entre todos los posibles resultados de un espacio de estados de un parámetro, generando cadenas de Markov en el proceso, en donde el valor del parámetro que aparece con mayor frecuencia en la cadena, es aquel que tiene una mayor probabilidad posterior

y por ende el que describe el experimento con un mayor grado de confianza.

Los datos observacionales que se usaron para la estimación de parámetros fueron observaciones de: Supernovas Ia (SN), Cronómetros Cósmicos (HD), y Oscilaciones Acústicas Bariónicas (BAO). Estos mismos datos observacionales se usan para la estimación de parámetros en todos los modelos.

Después de correr el código SimpleMC, a partir del modelo  $\Lambda$ CDM (5.26) se obtienen las cadenas de Markov para los parámetros  $\Omega_m$ , Figura 5.8 y  $h$ , Figura 5.9.

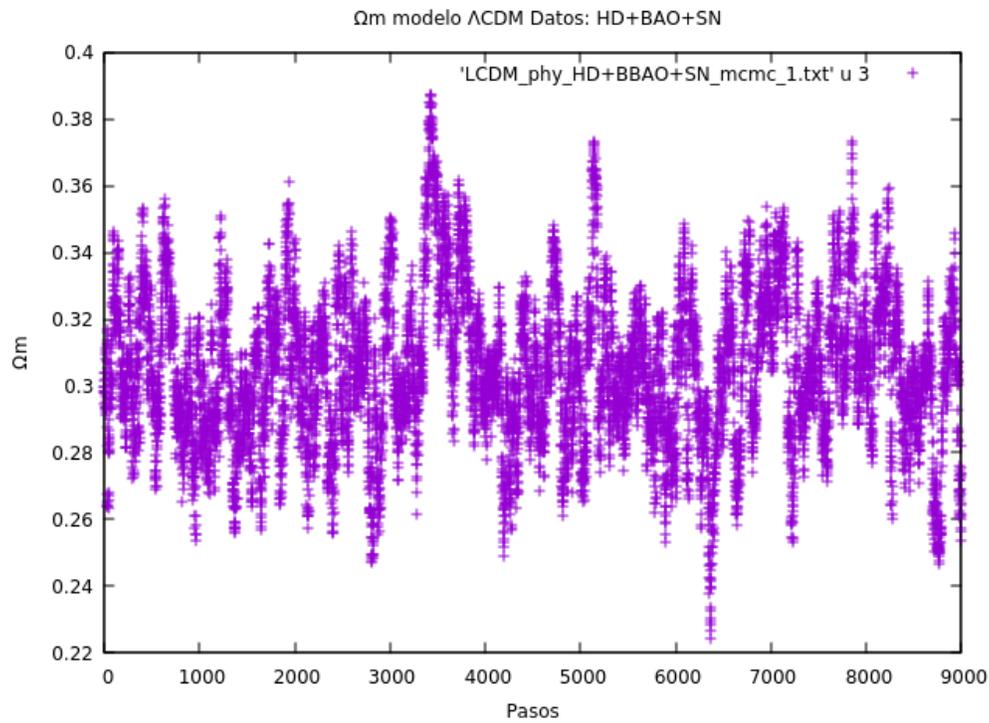


Figura 5.8: Cadena de Markov generada mediante MCMC (SimpleMC) para el parámetro  $\Omega_m$  referente al modelo  $\Lambda$ CDM desde HD+BAO+SN.

Construimos ahora la distribución de probabilidad de los parámetros  $\Omega_m$  y  $h$  referentes al modelo  $\Lambda$ CDM (5.26) a partir de las cadenas de Markov que se generaron (Figuras 5.8, 5.9). En este caso la probabilidad se establece a partir de la frecuencia con la que los valores de los parámetros aparecen en la cadena (i.e. un histograma, tal que; frecuencia  $\propto$  probabilidad). En la Figura 5.10 se aprecian estas distribuciones. En donde también aparecen los contornos de confianza (o figuras de contorno) de

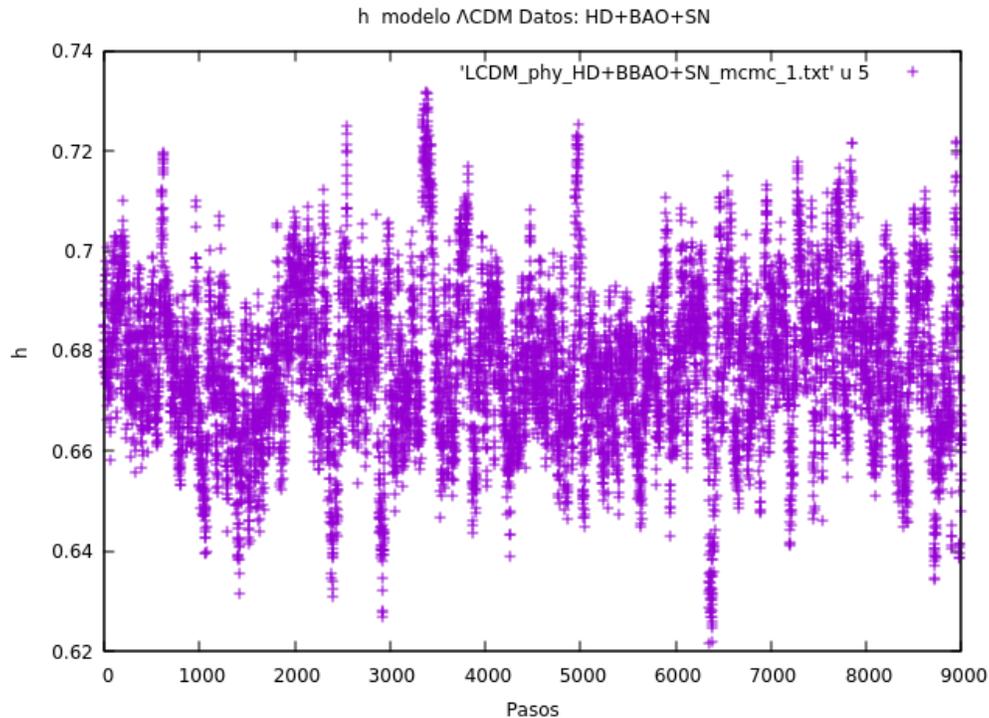


Figura 5.9: Cadena de Markov generada mediante MCMC (*SimpleMC*) para el parámetro  $h$  referente al modelo  $\Lambda$ CDM desde HD+BAO+SN.

los parámetros. Estos contornos de confianza son regiones del espacio de parámetros (que en nuestro ejemplo es 2-dimensional) alrededor del punto de mejor ajuste y que representan un cierto porcentaje de la distribución de probabilidad. Para cuantificar los niveles de confianza, es común utilizar la desviación estándar de manera que las regiones de  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  corresponden a un grado de confianza de 68.3%, 95.4% y 99.5%, respectivamente.

Las distribuciones de probabilidad y las figuras de contorno se obtuvieron con ayuda de *GetDist*, la cual es una paquetería de *Python* para el análisis de muestreos Monte Carlo, incluyendo muestreos de correlación desde cadenas de Markov.

Por último, para el modelo  $\Lambda$ CDM no se observa correlación entre sus parámetros. Se aprecia en las distribuciones de probabilidad un buen comportamiento Gaussiano.

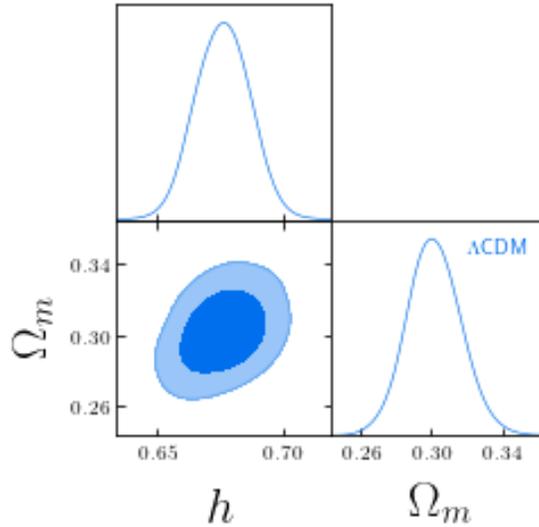


Figura 5.10: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2\sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $\Omega_m$ ,  $h$  correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM que se obtuvieron a partir de las cadenas de Markov que se generaron desde HD+BAO+SN.

### 5.3. Figuras de contorno de los modelos.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de distribuciones de probabilidad posterior y figuras de contorno de los parámetros del resto de los modelos a partir del mismo análisis MCMC que se describió para obtener los resultados del modelo  $\Lambda$ CDM. Las figuras de contorno o regiones de confianza que se muestran corresponden a  $1\sigma$  y  $2\sigma$  para todos los parámetros de todos los modelos. Al igual que para el modelo  $\Lambda$ CDM la inferencia de los valores de los parámetros se realizó bajo las restricciones de un universo plano con contribución de radiación despreciable ( $\Omega_k = 0$ ,  $\Omega_r \approx 0$ ), y desde datos provenientes de observaciones de supernovas Ia, Oscilaciones Acústicas Bariónicas, y Cronómetros Cósmicos (HD+BAO+SN); esto para todos los modelos. En total se analizan seis; contando a  $\Lambda$ CDM, los cuales son: CPL, HT, Efstathiou, propuesta de Polinomios de Bessel, y se añade a la lista un último modelo, el cual contempla un solo parámetro para la ecuación de estado de la energía oscura  $w(z)$ ; esta ecuación es:

$$w(z) = w_0 z. \quad (5.27)$$

De acuerdo a esto, la función  $f(z)$  (4.27) de este modelo corresponde a:

$$f(z) = (1+z)^{3(1-w_0)} e^{3w_0(1+z)}. \quad (5.28)$$

Para generar la ecuación de Friedmann de este modelo véase la ecuación (4.34). Nos referiremos a este modelo como “modelo simple”.

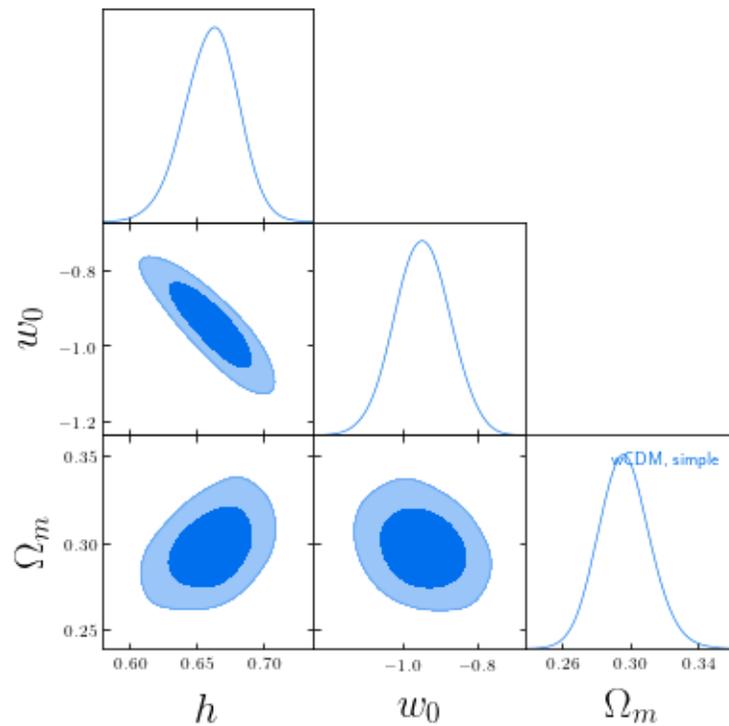


Figura 5.11: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2 \sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $\Omega_m$ ,  $h$ ,  $w_0$ , correspondiente al "modelo simple" que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN.

En la Figura 5.11 se muestran las figuras de contorno y las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros referentes al modelo que nombramos como “modelo simple”. Para este modelo se contemplaron tres parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ .

Se observa para el modelo simple una anti-correlación entre los parámetros  $h$  y  $w_0$ .

En general las curvas de distribución de probabilidad de sus parámetros se asemejan a un comportamiento Gaussiano.

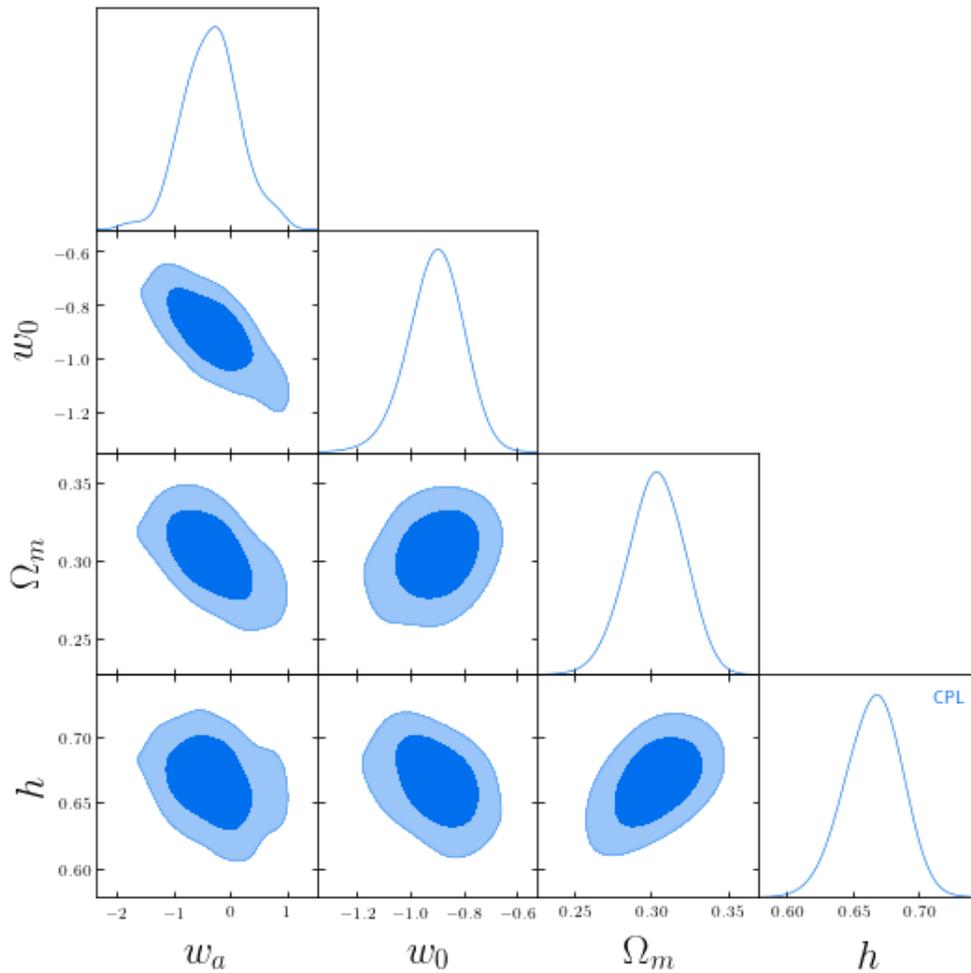


Figura 5.12: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2\sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_a$  correspondiente al modelo CPL que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN.

Las figuras de contorno y las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros correspondientes al modelo CPL se muestran en la Figura 5.12. En este modelo se contempla un parámetro más; en total cuatro:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_a$ .

En el modelo CPL no se observa una clara correlación en particular. Las distribuciones de probabilidad de sus parámetros en general parecen tener un buen comportamiento Gaussiano. Aunque en particular, para el parámetro  $w_a$  la distribución de

probabilidad es ligeramente asimétrica. Se nota que el pico se inclina un poco hacia el cero.

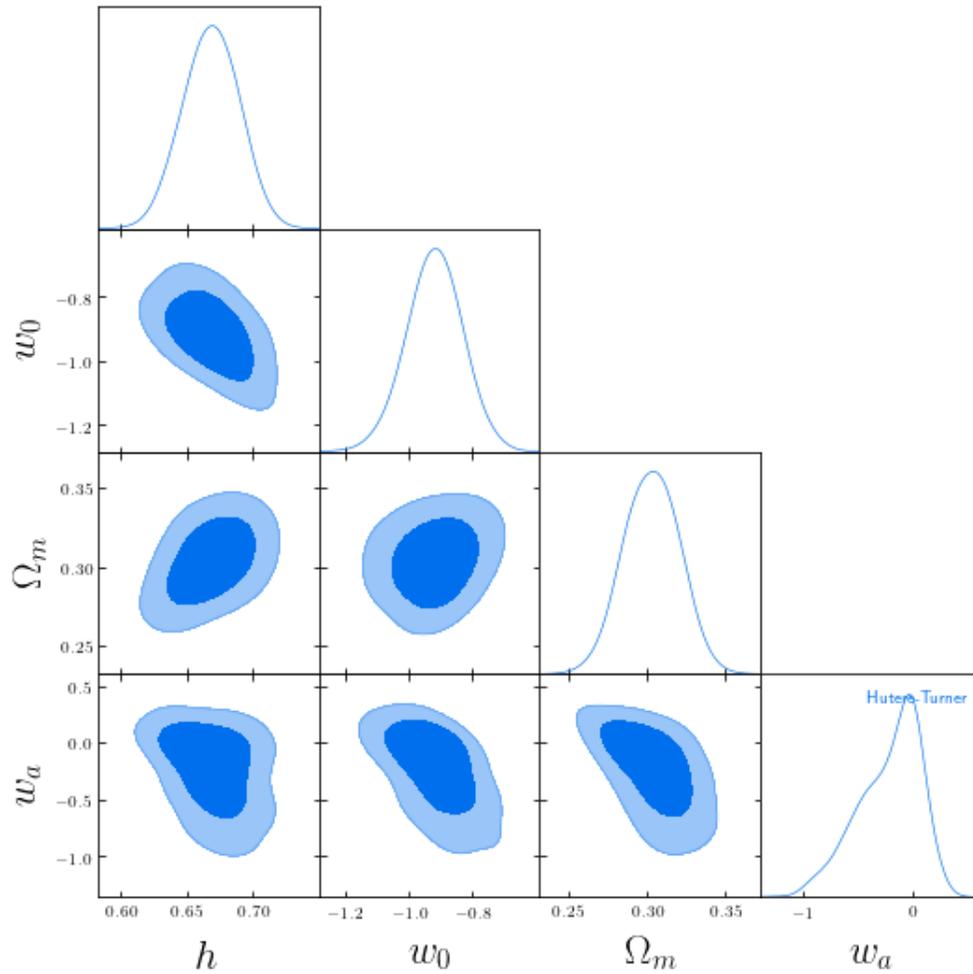


Figura 5.13: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2\sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_a$  correspondiente al modelo *Huterer-Turner* que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN.

Al igual que para el modelo CPL, se contemplan cuatro parámetros para los modelos HT y Efstathiou:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_a$ . Las regiones de confianza de las figuras de contorno para los modelos HT y Efstathiou, así como sus distribuciones de probabilidad posterior se muestran en la Figuras: [5.13](#) para el modelo HT, y [5.14](#) para el modelo Efstathiou.

Tenemos que para el modelo HT no se observa una correlación particular entre

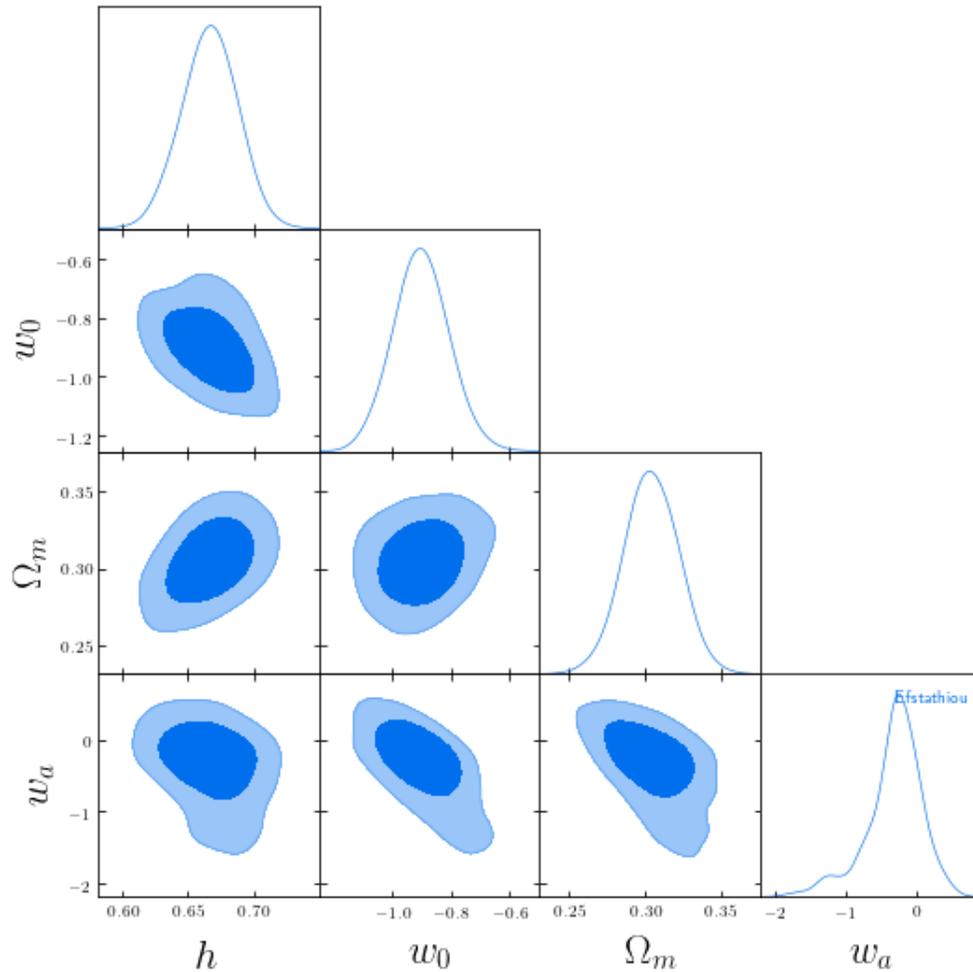


Figura 5.14: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2\sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_a$  correspondiente al modelo Efstathiou que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN.

sus parámetros. Las distribuciones de probabilidad en general tienen un comportamiento Gaussiano, salvo para el parámetro  $w_a$ , donde claramente su distribución es asimétrica, con una notable predilección para valores cercanos al cero.

De igual modo, para el modelo Efstathiou no se observa una correlación particular entre sus parámetros. Se encuentra en general, distribuciones de probabilidad con comportamiento Gaussiano, salvo por el parámetro  $w_a$ , el cual es notablemente asimétrico, con predilección por valores cercanos a cero hacia los negativos.

En general en todos los modelos se puede ver que las regiones de confianza no

son del todo elípticas, teniendo una forma algo más irregular. Esto puede deberse a que el número de pasos de las cadenas de Markov que se generaron, no fue suficiente, o que el tamaño del paso no fue el adecuado. A pesar de esto, los resultados logran proporcionar una estimación de parámetros concluyente. Sin embargo, se podrían mejorar la estimación teniendo en cuenta lo anterior.

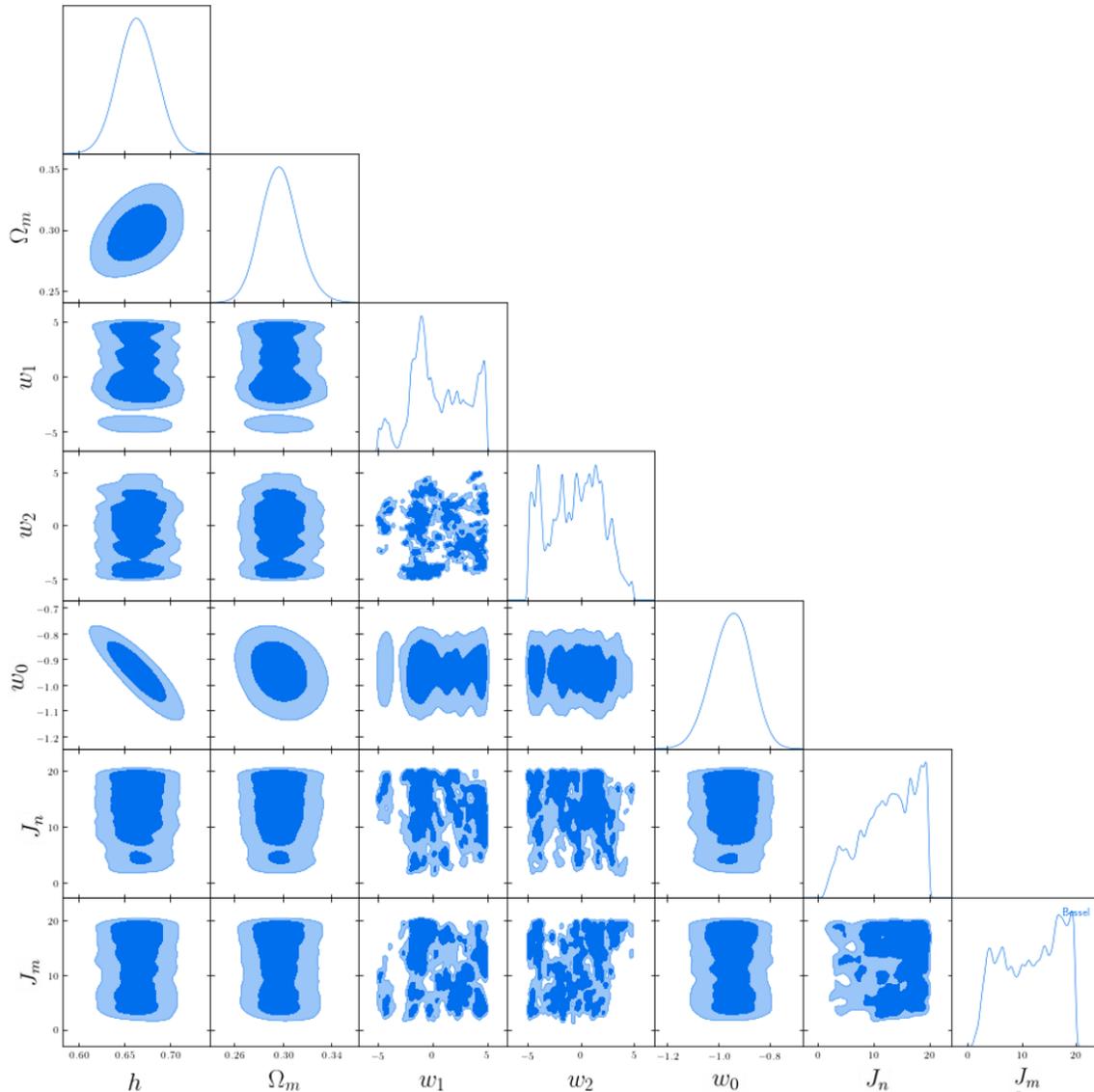


Figura 5.15: Figuras de contorno con regiones de confianza  $1, 2 \sigma$  y distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_0$ ,  $J_n$ ,  $J_m$  correspondiente al modelo de Polinomios de Bessel que se obtuvieron mediante MCMC desde HD+BAO+SN.

### 5.3.1. Propuesta final de ecuación de estado de Polinomios de Bessel.

Después de realizar algunas pruebas, la ecuación de estado que dio mejores resultados fue:

$$w(z) = w_0 + w_1 J_n(z) + w_2 J_m(z). \quad (5.29)$$

La ecuación (5.29) es la propuesta final de ecuación de estado a partir de los Polinomios de Bessel. Donde se tienen siete parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $J_n$ ,  $J_m$ .

Los resultados para el modelo de Polinomios de Bessel se muestran en la figura 5.15, la cual contiene las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros y los contornos de confianza de este modelo.

A primera vista, un resultado interesante que se puede observar en el modelo de polinomios de Bessel, es que se encuentra una anti-correlación entre los parámetros  $h$  y  $w_0$ . Misma correlación que encontramos en otro de los modelos; el modelo simple. Además de ésta, no se aprecia ninguna otra correlación entre los parámetros.

En cuanto a las regiones de confianza y las distribuciones de probabilidad, los resultados que se obtuvieron de este modelo, los podemos describir de forma práctica, analizando sus parámetros separándolos en grupos. En el primer grupo; para los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_0$ ,  $w_0$ , encontramos que entre éstos, los contornos de confianza son regulares, de forma elipsoide. Lo mismo pasa con sus distribuciones de probabilidad que asemejan una distribución Gaussiana. En el segundo grupo; para los parámetros:  $h$ ,  $\Omega_m$ ,  $w_0$ , en relación con algunos de los parámetros:  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $J_n$ ,  $J_m$ , encontramos regiones de confianza irregulares con amplias zonas de igual probabilidad. En el tercer grupo; para los parámetros:  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $J_n$ ,  $J_m$ , encontramos que entre éstos, los contornos de confianza se hallan en dispersiones completamente irregulares sin una tendencia definida que asemeja a un patrón de “salpicadura” teniendo regiones de confianza aisladas.

Respecto a sus distribuciones de probabilidad, tenemos curvas irregulares formadas por varios picos, lo cual es coherente con sus figuras de contorno. En particular

para los parámetros  $J_n$  y  $J_m$ , notamos que las distribuciones de probabilidad para ambos parámetros tiene un máximo global alrededor del valor veinte, que representa el polinomio veinte de Bessel (i.e.  $J_{20}$ ).

Se puede intentar explicar los resultados obtenidos para los parámetros del tercer grupo con el hecho de que las cadenas respectivas no convergieron adecuadamente; esto debido posiblemente a que el tamaño del paso no fue el adecuado, o quizá el número de pasos no fue suficiente. Otra forma de interpretar los resultados para estos parámetros, sería que éstos nos están indicando que existen varias regiones que son igual de probables. Se puede entender lo anterior como que existen varias combinaciones de los valores de los parámetros que se ajustan con la misma probabilidad. Lo que explicaría la inusual dispersión de “manchas” en las figuras de contorno. Esto también podría intentar explicar por qué las regiones de confianza son tan amplias, ya que algunas se distribuyen en gran parte del espacio. Por ejemplo; si tenemos los parámetros  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $J_n$ , y  $J_m$ , pensemos que si damos un valor fijo a uno de ellos, este valor podría tener una cierta probabilidad de ajuste si elegimos valores adecuados para los otros tres parámetros; esto es, un valor arbitrario puede ser un buen ajuste ya que en cierta medida depende de los parámetros restantes. Esto explicaría porque se encuentran diversas regiones con igual probabilidad. Se podría entonces plantear que el modelo tiene un exceso de parámetros, ya que quizá el modelo se puede caracterizar con un número menor de parámetros.

Respecto a la anti-correlación que se obtuvo entre los parámetros  $h$  y  $w_0$ , no hay una explicación obvia que se pueda ofrecer, sin embargo, sería interesante analizarla ya que esta anti-correlación no sólo se presentó en este modelo sino también en el modelo simple.

Tomando en cuenta las posibles interpretaciones de los resultados se considera: Hacer más pruebas cambiando el tamaño y el límite de pasos que generan las cadenas. Ampliar y modificar el rango de valores donde se buscan los parámetros. En especial para los parámetros  $J_n$  y  $J_m$  probar valores mayores a veinte. Por último, reescribir la ecuación reduciendo el número de parámetros involucrados.

## 5.4. Tabla de resultados

A continuación se muestra la recopilación de los resultados obtenidos de las constricciones de los parámetros de todos los modelos ( $\Lambda$ CDM, modelo simple, CPL, Huterer-Turner, Efstathiou y modelo de Polinomios de Bessel) en forma de tabla. En esta Tabla [5.3](#) de resultados, se muestra además el valor de  $\chi^2$  que se obtuvo de cada modelo conforme a los valores de mayor probabilidad posterior.

La media de los valores, el valor de Chi-cuadrada, así como el valor de mejor ajuste (el cual usaremos más adelante para graficar los modelos) se obtuvieron al igual que las figuras de contorno y las distribuciones de probabilidad, utilizando la librería *GetDist* de *Python*.

El modelo que más se acerca a las observaciones se ve reflejado en el valor de su Chi-cuadrada, siendo el modelo con la menor  $\chi^2$  el que mejor representa a las evidencias observacionales.

Se observa que el modelo que posee la menor de Chi-cuadrada es la propuesta de modelo de Polinomios de Bessel con un valor de 29.736. De modo que este es el modelo que mejor se relaciona con los datos observacionales que se consideraron. A partir del modelo de polinomios de Bessel los siguientes modelos ordenados de acuerdo a su Chi-cuadrada de forma ascendente; es decir, de menor a mayor Chi-cuadrada son: HT con un valor de  $\chi^2 = 30.244$ , modelo simple con  $\chi^2 = 30.328$ , Efstathiou con  $\chi^2 = 30.329$ , CPL con  $\chi^2 = 30.352$ , y  $\Lambda$ CDM con  $\chi^2 = 30.640$ . Por lo que  $\Lambda$ CDM es el modelo que menos describe a los datos observacionales. Lo cual es de manera general lo que se esperaba obtener.

Los aspectos que hay que resaltar de los resultados que se muestran en la tabla son: En primer lugar, se observa que se obtuvieron valores similares para los parámetros  $h$  y  $\Omega_m$  en todos los modelos; esto es, aproximadamente 0.66 para  $h$  y 0.3 para  $\Omega_m$ . Así mismo, encontramos que el valor que se obtuvo como resultado para el parámetro  $w_0$  se encuentra cercano a menos uno ( $-1$ ) en todos los modelos, que es el valor correspondiente al modelo  $\Lambda$ CDM. Así mismo, como también se aprecia en las figuras de contorno y las distribuciones de probabilidad; los resultados de la tabla muestran

Parámetros	Modelos					
	$\Lambda$ CDM	Modelo simple	CPL	HT	Efstathiou	Bessel
$h$	0.676(0.01)	0.661(0.02)	0.666(0.021)	0.67(0.02)	0.667(0.021)	0.664(0.02)
$\Omega_m$	0.301(0.015)	0.297(0.015)	0.303(0.018)	0.303(0.017)	0.304(0.018)	0.297(0.015)
$w/w_0$	-1	-0.945(0.074)	-0.905(0.105)	-0.922(0.088)	-0.902(0.097)	-0.948(0.075)
$w_a/w_1$	-	-	-0.34(0.541)	-0.224(0.287)	-0.313(0.405)	0.401(2.648)
$w_2$	-	-	-	-	-	-0.666(2.58)
$J_n$	-	-	-	-	-	13.09(4.749)
$J_m$	-	-	-	-	-	12.214(5.333)
$\chi^2$	30.640	30.328	30.352	30.244	30.329	29.736

Tabla 5.3: Se muestra la media de los valores y la desviación estándar (entre paréntesis) de cada uno de los parámetros de los modelos que se obtuvieron de las restricciones mediante MCMC desde HD+BAO+SN, y el valor de Chi-cuadrada  $\chi^2$  de cada modelo.

para el parámetro  $w_a$  y para los parámetros  $w_1$  y  $w_2$  tenemos un valor cercano a cero. Por lo que el parámetro  $w_0$  con un valor cercano a menos uno, acompaña al término que tiene mayor peso dentro de las ecuaciones, mientras que  $w_a$ ,  $w_1$ , y  $w_2$  al ser pequeños (cerca de cero), tendrían un peso menor en el comportamiento de las ecuaciones, aportando solo ciertas variaciones. Por lo que los resultados nos están indicando que los modelos se aproximan a  $\Lambda$ CDM con pequeñas desviaciones. Esto para todos los modelos, incluyendo el modelo de polinomios de Bessel. Por lo que se cumplió con las expectativas que se tenían, las cuales eran proponer un modelo que fuera cercano a  $\Lambda$ CDM con algunas correcciones. Además, ya que todos los modelos analizados tuvieron una mejor relación con los datos observacionales que

el modelo  $\Lambda$ CDM de acuerdo al valor de su Chi-cuadrada, tendríamos argumentos para indicar que los modelos  $w$ CDM tendrán cierta ventaja frente al modelo  $\Lambda$ CDM. Dando también argumentos a favor de que la ecuación de estado de la energía oscura podría tener un comportamiento dinámico; es decir, que evoluciona en el tiempo. Y ya que el modelo con menor valor de Chi-cuadrada fue la propuesta de Polinomios de Bessel, podríamos argumentar que este comportamiento dinámico podría ser además oscilatorio como se planteó en principio.

## 5.5. Mejores ajustes

Además de la media de los valores, también se encontraron los valores de mejor ajuste; esto es, los que minimizan la función Chi-cuadrada. Usaremos estos valores de mejor ajuste para la representación gráfica de los modelos. Para esto, vamos a valernos de la función  $H(z)$  de la ecuación de Friedmann (4.34) de cada modelo. Esto ya se hizo antes en el **Capítulo 4 Modelos** 4, sección *Algunos modelos  $w$ CDM propuestos* 4.2.2 solo que anteriormente se dieron valores “arbitrarios” (aunque de alguna forma justificados) de los parámetros. Vamos ahora a hacer lo mismo pero esta vez consideraremos los valores de mejor ajuste que se encontraron mediante MCMC. Esto nos permitirá comparar cómo los valores que se consideran como los “más adecuados” para describir las observaciones, afectan a los modelos.

Las gráficas con los valores de mejor ajuste para cada modelo se muestran en las Figuras 5.16 para el modelo  $\Lambda$ CDM, 5.17 para el modelo simple, 5.18 para el modelo CPL, 5.19 para el modelo HT, 5.20 para el modelo Efstathiou, y 5.21 para el modelo de Polinomios de Bessel.

El intervalo de corrimiento al rojo donde se localizan las gráficas es de  $z \in [0, 2.5]$  que es la región donde tenemos datos observacionales. Estos se muestran con puntos y barras para sus intervalos de error.

Por último en la Figura (5.22) se muestra la comparación de todos los modelos con sus parámetros de mejor ajuste.

Se observa que las gráficas respectivas de cada modelo muestran un comportamien-

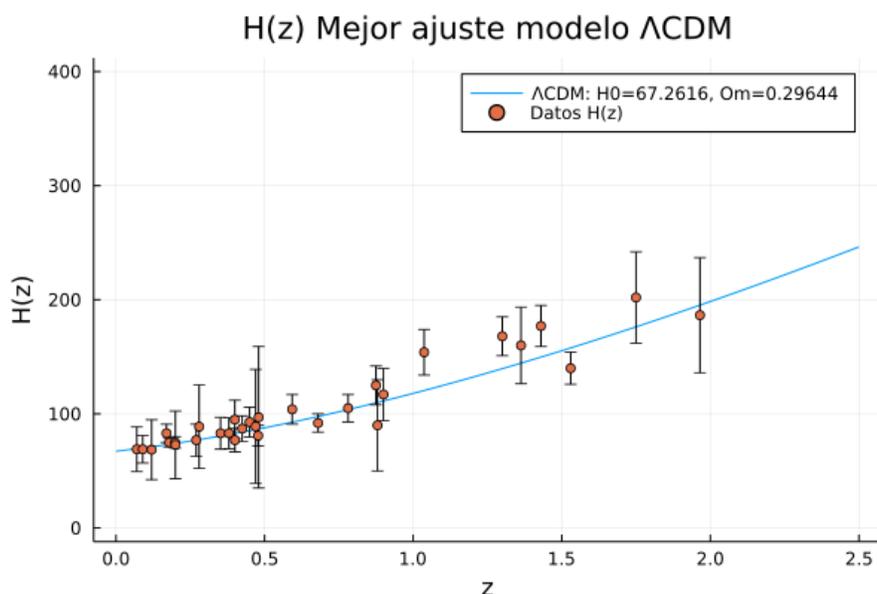


Figura 5.16: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo  $\Lambda$ CDM. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2.

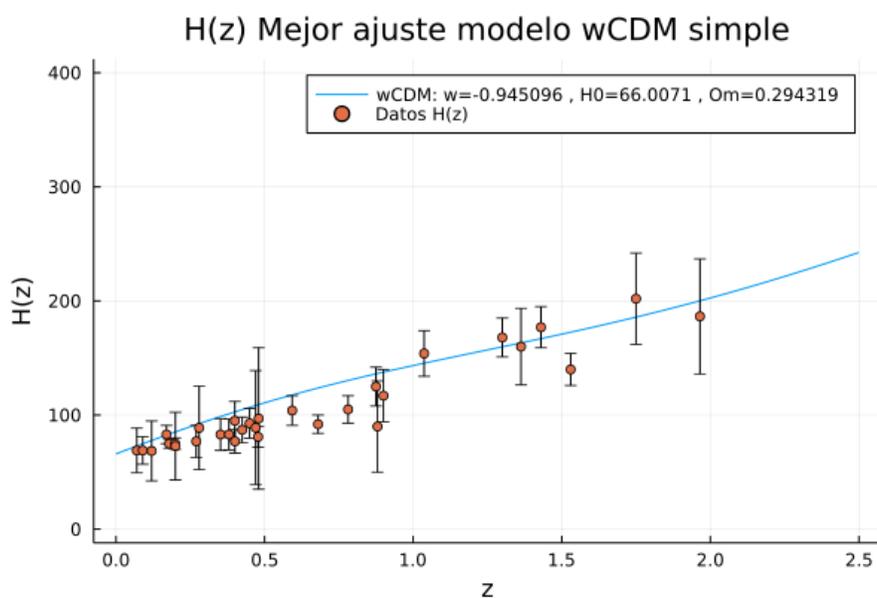


Figura 5.17: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo simple. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase figura 4.2.

to conforme a lo esperado, pues la tendencia general de las funciones parece tener una coincidencia con los datos observacionales. Además de que el comportamiento de los modelos no dista mucho del modelo cosmológico estándar. Esto ya se esperaba debido a los resultados de los valores de  $\chi^2$ , los cuales mostraban que los otros modelos analizados poseían una cierta ventaja frente al modelo  $\Lambda$ CDM. Lo cual resulta en un cierto avance ya que el modelo cosmológico estándar debe ser un referente para todos los modelos.

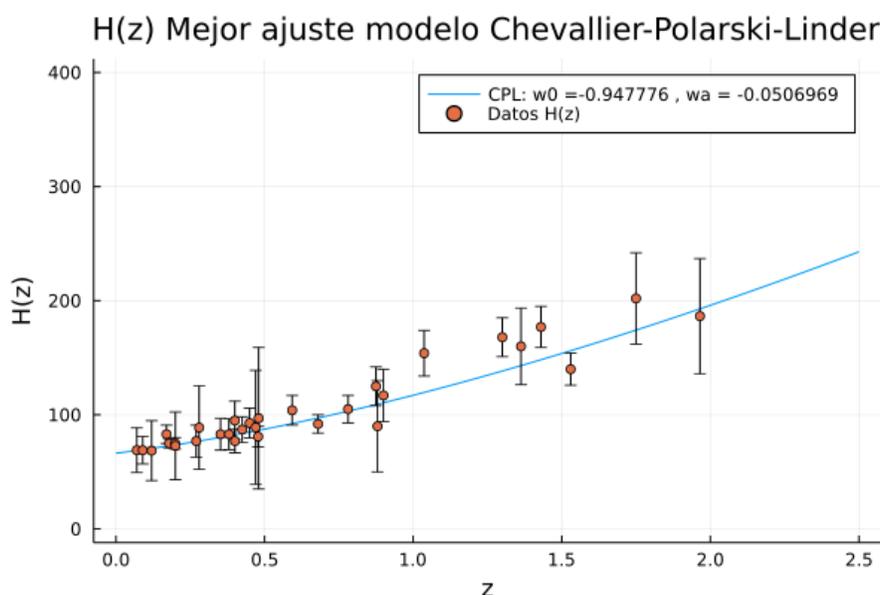


Figura 5.18: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo CPL. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2.

Un resultado importante que se puede apreciar en la Figura 5.22 donde se muestra la comparación de los modelos, es que al utilizar los valores de mejor ajuste, el comportamiento de los modelos tienden a ser más parecido; es decir, los modelos tienden a asemejarse entre sí. Esto se aprecia de mejor manera al contrastar esta gráfica 5.22

con la gráfica de la Figura 4.10, en la que también se observa la comparación del comportamiento de algunos modelos pero usando valores arbitrarios. Se puede ver que la distancia entre los modelos para un mismo valor de  $z$ , es en general mayor en la Figura 4.10, que en la Figura 5.22 donde se usan los valores de mejor ajuste, por lo que se tendría cierta mejora respecto de los valores que se usaron la primera vez, indicando con esto que se obtuvieron resultados coherentes.

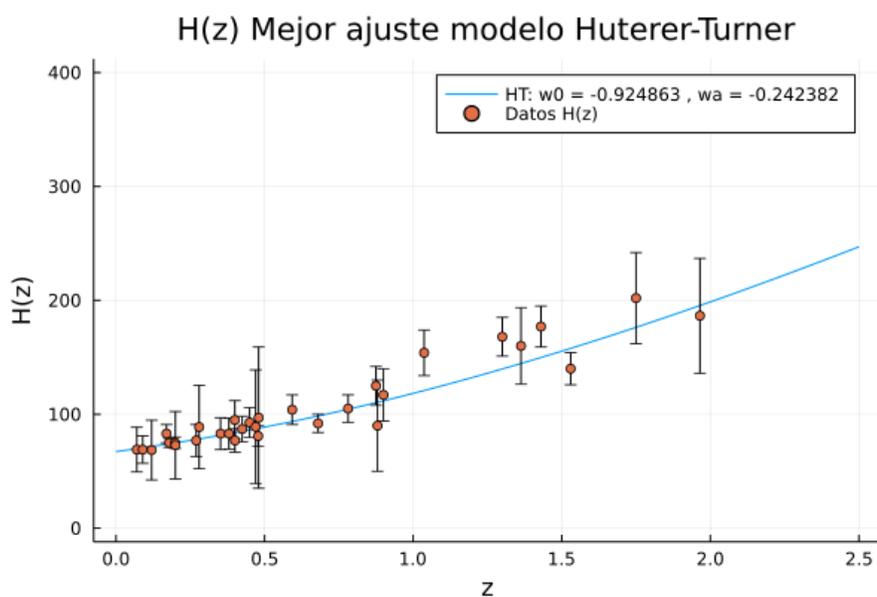


Figura 5.19: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo HT. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2.

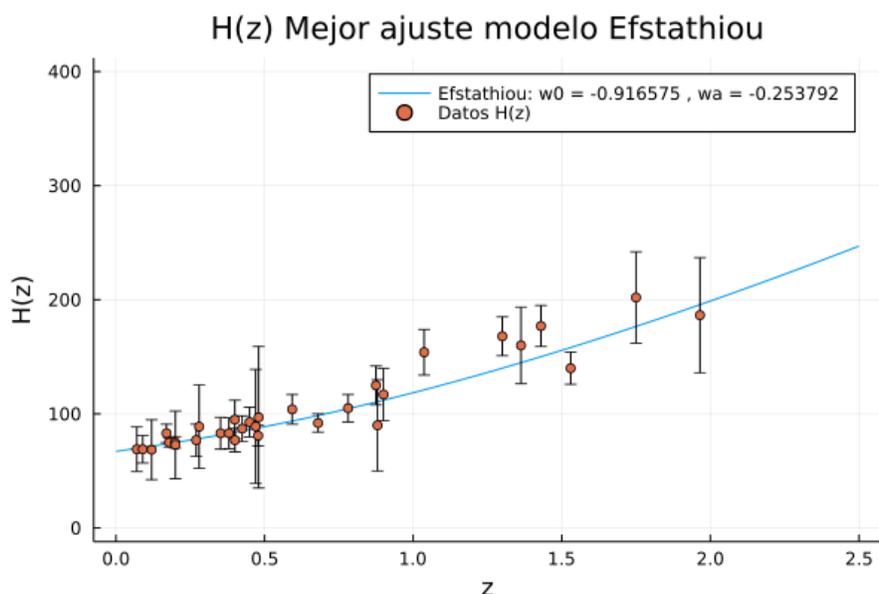


Figura 5.20: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo Efstathiou. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2.

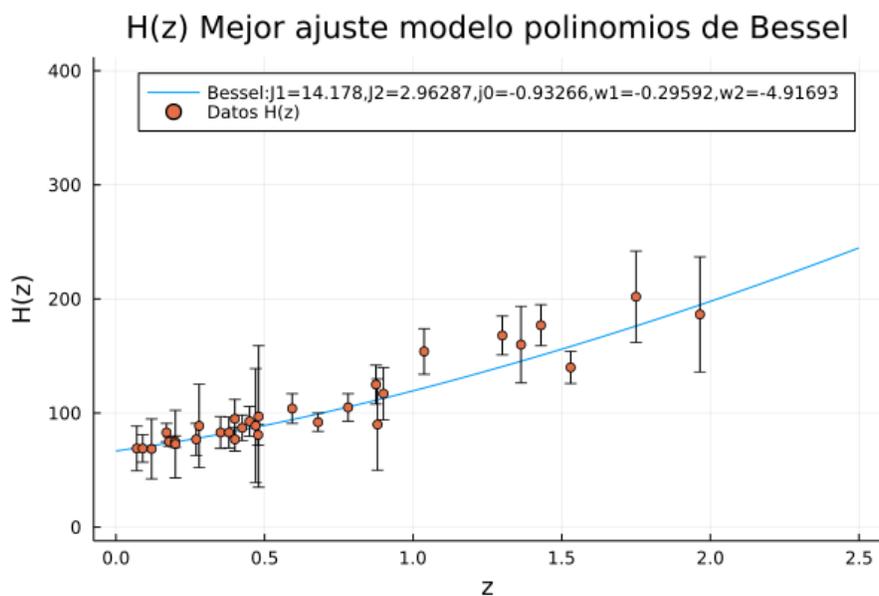


Figura 5.21: Gráfica del comportamiento teórico del parámetro de Hubble a partir de los valores de mejor ajuste encontrados para el modelo de Polinomios de Bessel. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2.

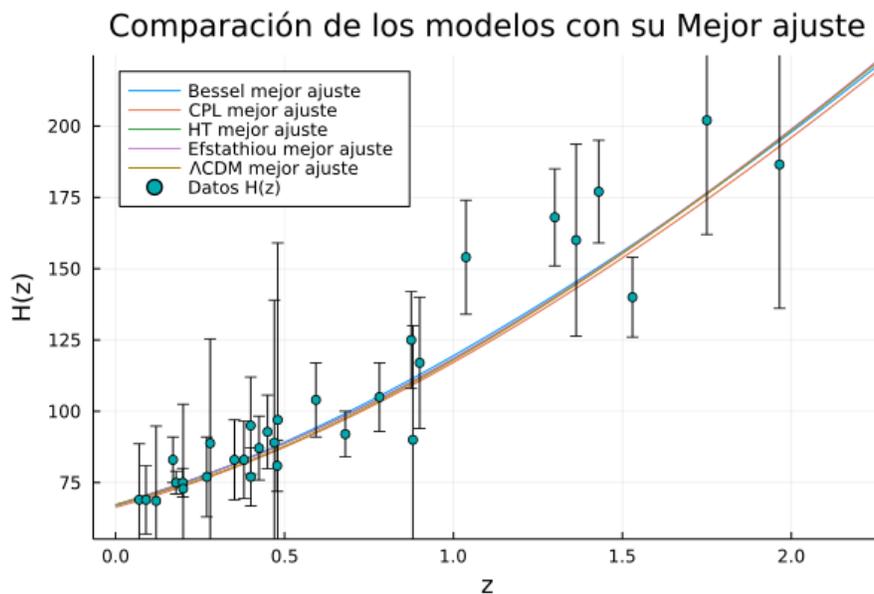


Figura 5.22: *Comparación de los modelos con su parámetros de mejor ajuste encontrados mediante MCMC desde datos observacionales de HD+BAO+SN. También se muestran los datos observacionales del parámetros de Hubble desde cronómetros cósmicos que aparecen en la referencia (69), véase Figura 4.2*

# Capítulo 6

## Conclusiones

De acuerdo a las constricciones y a los valores de  $\chi^2$  que se obtuvieron, encontramos que los modelos  $w$ CDM de los que partimos para el análisis, presentaron una cierta ventaja en la descripción de los datos observacionales respecto al modelo  $\Lambda$ CDM. En particular el modelo de Polinomios de Bessel propuesto fue el que obtuvo un menor valor de  $\chi^2$  respecto a los otros modelos incluyendo  $\Lambda$ CDM. De modo que, si bien, los modelos  $w$ CDM que se analizaron ya presentan una cierta mejora; la propuesta de modelo que se presentó la representa aún más. Sin embargo, esto se puede interpretar como un “victoria” parcial debido a que mientras, por una parte, el modelo de polinomios de Bessel es el que mejor describe las observaciones, por otra parte, debemos tomar en cuenta que todo modelo paramétrico con un número grande de parámetros no puede considerarse del todo satisfactorio. Siempre será más adecuado un modelo con un número menor de parámetros. En ese sentido, los demás modelos resultan ser superiores, en particular el modelo estándar  $\Lambda$ CDM, pues es el que menor número de parámetros considera. Sin embargo, como se explicó en el análisis de resultados, cabe la posibilidad de que se pueda reducir el número de parámetros en el modelo de Polinomios de Bessel, con lo cual se mejoraría la propuesta.

Cabe señalar que los resultados obtenidos de las constricciones y de los valores de Chi-cuadrada, solo son concluyentes de acuerdo a los datos observacionales y a las consideraciones de las que partimos. Por lo que un conjunto de datos o unas hipótesis distintas podrían dar diferentes resultados. De modo que se necesita considerar

partir desde más conjuntos de datos y diferentes suposiciones (como dejar libres los parámetros  $\Omega_k$ ,  $\Omega_r$ ) para tener una mayor variedad de resultados, y así conclusiones más satisfactorias.

Pese a lo anterior, el hecho de que en general los modelos  $w$ CDM tengan una mejor relación con los datos observacionales frente al modelo  $\Lambda$ CDM ya puede considerarse como un cierto progreso. Y podría ser un indicativo de que la vía que se tomó para describir a la energía oscura a partir de los modelos  $w$ CDM, los cuales consideran una ecuación de estado de energía oscura dependiente del tiempo se debe seguir estudiando, ya que los resultados muestran que existe una inclinación hacia un comportamiento dinámico de la energía oscura, que además podría ser oscilatorio, ya que el modelo que mejor describió las observaciones; este es, el modelo de Polinomios de Bessel tiene este comportamiento. Otro argumento a favor de que los modelos  $w$ CDM se deben seguir estudiando, se da cuando analizamos la gráfica de comparación de los modelos con su mejor ajuste, donde observamos que los modelos tienden a aproximarse entre sí, siendo más difícil distinguir a un modelo de otro. Lo que podría indicar que en la particularidad de cada modelo, todos ellos intentan converger a una cierta función la cual representa el comportamiento “real” de las observaciones. Más aún, podría ser que estemos cerca de esta función a la que se intenta converger.

Respecto al modelo propuesto de Polinomios de Bessel: Puede considerarse aceptable como un primer acercamiento, aunque presenta dos dificultades notables. Una de ellas, como ya mencionamos, es el hecho de tener un número considerable de parámetros. Se debe trabajar para intentar reducir esa cantidad. La otra dificultad se presenta en cuanto al planteamiento del modelo, ya que como mencionamos en el análisis, las figuras de contorno y las distribuciones de probabilidad para cuatro de sus parámetros:  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $J_n$ , y  $J_m$  presentan comportamientos inusuales. Se deben considerar las recomendaciones mencionadas en el análisis; realizar más pruebas e intentar obtener mejores resultados. Se debe además hacer un esfuerzo en intentar mejorar el modelo.

Por último, el uso de funciones de Bessel no presentó problemas prácticos, teóricos o de aplicación que puedan considerarse como un obstáculo para el desarrollo de

modelos de ecuación de estado  $w$ CDM. En cambio, si mostró una mejor representación de los datos observacionales, de acuerdo a los resultados que se obtuvieron. Por lo que al parecer, resulta prudente el uso de polinomios de Bessel para el desarrollo de modelos. Dando además un referente para el uso de otras funciones especiales como nuevas propuestas. Se recomienda seguir estudiando modelos  $w$ CDM de este tipo, con funciones especiales y realizar nuevos estudios.

# Bibliografía

- [1] Shi K., Huang Y. F., Lu T., A comprehensive comparison of cosmological models from the latest observational data, 2018, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21784.x>
- [2] Vázquez A., Matos T., La materia oscura del universo: retos y perspectivas, 2008, <https://rmf.smf.mx/ojs/index.php/rmf-e/article/view/4584/6097>
- [3] Bull P., et al., Beyond  $\Lambda$ CDM: Problems, solutions, and the road ahead, 2016, <https://doi.org/10.1016/j.dark.2016.02.001>
- [4] Tamayo D., Vazquez J. A., Fourier-series expansion of the dark-energy equation of state, 2019, <https://doi.org/10.1093/mnras/stz1229>
- [5] Sahni V., Starobinsky A., Reconstructing Dark Energy, 2006, <https://doi.org/10.1142/S0218271806009704>
- [6] Jones B., 1997, A Brief History of Cosmology, Bibcode: 1997ASPC..126....1J
- [7] A. Liddle, An Introduction to Modern Cosmology, John Wiley and Sons Ltd, Second Edition (2003).
- [8] Hogg D., et al., Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies, 2005, <https://doi.org/10.1086/429084>
- [9] Yadav J., et al., Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One, 2005, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09578.x>

- [10] Laurent P., et al., A  $h^{-3}$  Gpc<sup>3</sup> study of cosmic homogeneity using BOSS DR12 quasar sample, 2016, <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/11/060>
- [11] Gonçalves R. s., et al., 2018, <https://doi.org/10.1093/mnras/sty2670>
- [12] Pavan K. U., et al., 2023, <https://doi.org/10.1088/1361-6382/acbefc>
- [13] W. Rindler, Relativity Special, General, and Cosmological, Oxford University Press, Second Edition (2006).
- [14] de Sitter W., On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein's latest hypothesis, 1917, [https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/2590\\_Einstein\\_2015/pdfs/de%20Sitter%20Amst%20Acad%201917.pdf](https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/2590_Einstein_2015/pdfs/de%20Sitter%20Amst%20Acad%201917.pdf)
- [15] Hubble E., A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae, 1929, <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>
- [16] Bartelmann M., From COBE to Planck, 2007, <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.580.4759&rep=rep1&type=pdf>
- [17] Peebles P., Yu J. T., Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe, 1970, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970ApJ...162..815P/abstract>
- [18] Sunyaev R. A., Zeldovich YA., Small-Scale Fluctuations of Relic Radiation, 1970, <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970Ap%26SS...7...3S/abstract>
- [19] Martínez V., Introductory review to the historical development of modern cosmology, 2002, <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0203377>
- [20] D. Baumann, Cosmology. Part III Mathematical Tripos., University of Cambridge.
- [21] V. Rubakov, Introduction to the Theory of the Early Universe, worldscientific, Second Edition (2017).

- [22] L. Téllez, Constricciones de modelos de materia y energía oscura escalar, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Tesis para obtener el Grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Física (2018).
- [23] J. Hartle, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, Addison Wesley, (2003).
- [24] S. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Addison Wesley, (2004).
- [25] Padilla L., Tellez L., Escamilla L., Vazquez J. A., Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics, 2019, <https://doi.org/10.3390/universe7070213>
- [26] Calder L., Lahav O., Dark Energy: back to Newton?, 2008, <https://doi.org/10.1111/j.1468-4004.2008.49113.x>
- [27] Riess A. G., et al, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, 1998, <https://doi.org/10.1086/300499>
- [28] Perlmutter S., et al., Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, 1999, <https://doi.org/10.1086/307221>
- [29] Escamilla L.A., Vazquez J. A., Model selection applied to reconstructions of the Dark Energy, 2021, <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11404-2>
- [30] Copeland E.J., Sami M., Tsujikawa S., Dynamics of dark energy, International Journal of Modern Physics D Vol. 15, No. 11, pp. 1753-1935 (2006), <https://doi.org/10.1142/S021827180600942X>
- [31] Huterer D., Turner M. S., Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements, 1999, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.60.081301>
- [32] Tonry J.L., et al., Cosmological Results from High-z Supernovae, 2003, <https://doi.org/10.1086/376865>

- [33] Spergel D.N., et al., First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters, 2003, <https://doi.org/10.1086/377226>
- [34] Tegmark M., et al., Cosmological parameters from SDSS and WMAP, 2004, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.69.103501>
- [35] Readhead A.C.S., et al., Extended Mosaic Observations with the Cosmic Background Imager, 2004, <https://doi.org/10.1086/421105>
- [36] Dickinson C., et al., High sensitivity measurements of the CMB power spectrum with the extended Very Small Array, 2004, <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08206.x>
- [37] Astier P., et al., The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set, 2005, <https://doi.org/10.1051/0004-6361%3A20054185>
- [38] Carroll S., Press W., Turner E., The cosmological constant, 1992, <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002435>
- [39] de Boer J., et al., Perfect Fluids, 2018, <https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.5.1.003>
- [40] Yoo J., Watanabe Y., Theoretical Models of Dark Energy, 2012, <https://doi.org/10.1142/S0218271812300029>
- [41] Hossenfelder S., Screams for Explanation: Finetuning and Naturalness in the Foundations of Physics, 2018, <https://doi.org/10.1007/s11229-019-02377-5>
- [42] De Vuyst J., A Natural Introduction to Fine-Tuning, 2020, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.05617>
- [43] Velten H.E.S., et al. Aspects of the cosmological “coincidence problem”, 2014, <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-014-3160-4>

- [44] Lee J., et al., Dark energy, inflation and the cosmic coincidence problem, 2008, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2008.02.009>
- [45] Campo S. et al., Toward a solution of the coincidence problem, 2008, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.021302>
- [46] Adhikari S., The Hubble tension in the non-flat Super- $\Lambda$ CDM model, 2022, <https://doi.org/10.1016/j.dark.2022.101005>
- [47] Riess A., et al., Cosmic Distances Calibrated to 1% Precision with Gaia EDR3 Parallaxes and Hubble Space Telescope Photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with LambdaCDM, 2021, <https://doi.org/10.3847/2041-8213/abdbaf>
- [48] Riess A., et al., Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team, 2022, <https://doi.org/10.3847/2041-8213/ac5c5b>
- [49] Aloni D. et al., A Step in Understanding the Hubble Tension, 2022, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.123516>
- [50] Gagandeep S. et al., Worry No More, The Hubble Tension is Relieved: A Truly Direct Measurement of the Hubble Constant from Mooniversal Expansion, 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.16551>
- [51] Shinji T., Quintessence: A Review, 2013, <https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/21/214003>
- [52] Ludwick K., The Viability of Phantom Dark Energy: A Brief Review, 2017, <https://doi.org/10.1142/S0217732317300257>
- [53] Lazkoz R., Quintom cosmologies admitting either tracking or phantom attractors, 2006, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.05.075>

- [54] Caldwell R., A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state, 2002, <https://doi.org/10.1016/S0370-2693%2802%2902589-3>
- [55] Wayne H., Crossing the Phantom Divide: Dark Energy Internal Degrees of Freedom, 2005, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.047301>
- [56] Bilic N., et al., Dark Matter, Dark Energy and the Chaplygin Gas, 2002, <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0207423>
- [57] Kamenshchik A., et al., An alternative to quintessence, 2001, <https://doi.org/10.1016/S0370-2693%2801%2900571-8>
- [58] Clifton C., et al., Modified Gravity and Cosmology, 2012, <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.01.001>
- [59] Jaime L., et al., New parametrized equation of state for dark energy surveys, 2018, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.083530>
- [60] C. H. Edwards, Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera cómputo y modelado, Pearson Prentice Hall, Cuarta edición (2009).
- [61] Arfken G. B., MATHEMATICAL METHODS FOR PHYSICISTS A Comprehensive Guide, Academic Press of Elsevier, Séptima edición (2012).
- [62] Escamilla L., Reconstrucción de la energía oscura con base en observaciones, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Cinvestav, Tesis para obtener el Grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Física (2018).
- [63] Sharma S., Markov Chain Monte Carlo Methods for Bayesian Data Analysis in Astronomy, 2017, <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082214-122339>
- [64] Medel R., et al., An introduction to Markov Chain Monte Carlo, 2019, [www.researchgate.net/publication/335170165](http://www.researchgate.net/publication/335170165)
- [65] SimpleMC <https://github.com/ja-vazquez/SimpleMC>

- [66] Eisenstein D., et al., Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies, 2005, <https://doi.org/10.1086/466512>
- [67] Vazquez J. A., Reconstruction of the Dark Energy equation of state, 2012, <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2012/09/020>
- [68] Zhao G., et al., Dynamical dark energy in light of the latest observations, 2017, <https://doi.org/10.1038/s41550-017-0216-z>
- [69] Shulei C., et al., Cosmological Constraints on the Coupling Model from Observational Hubble Parameter and Baryon Acoustic Oscillation Measurements, 2021, <https://doi.org/10.3390/universe7030057>
- [70] Lahav O., Liddle A. R., The Cosmological Parameters 2014, 2014, <https://doi.org/10.48550/arXiv.1401.1389>
- [71] Turner M. S., White M., CDM Models with a Smooth Component, 1997, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.56.R4439>
- [72] Turner M. S., The Road to Precision Cosmology, 2022, <https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-111119-041046>
- [73] Krauss L. M., Turner M. S., The Cosmological Constant is Back, 1995, <https://doi.org/10.1007/BF02108229>
- [74] Vazquez J. A., Padilla L. E., Matos T., Inflationary cosmology: from theory to observations, 2019, *Revista Mexicana de Física E* 17 (1) 73–91 [https://www.fis.unam.mx/~javazquez/papers/R2\\_INFLATIONARY\\_COSMOLOGY.pdf](https://www.fis.unam.mx/~javazquez/papers/R2_INFLATIONARY_COSMOLOGY.pdf)
- [75] Tsujikawa S., Introductory Review of Cosmic Inflation, 2003, <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/0304257>
- [76] Sato K., First-order phase transition of a vacuum and the expansion of the Universe, 1981, <https://doi.org/10.1093/mnras/195.3.467>

- [77] Guth A. H., Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, 1981, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347>
- [78] Dirirsa F. F., Dark Energy and the Coincidence Problem, 2012, <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12912.20487>
- [79] Trodden M., Carroll S. M., TASI Lectures: Introduction to Cosmology, 2004, <https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/0401547>