Tarea como

$$\frac{dP}{dT} = \frac{P+\rho}{T}$$

En clase vimos las funciones de distribución de densidad:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3}\int f\, d^3p$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int E f\, d^3p$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3E} f\, d^3p$$

Tomamos el caso de P, con

$$f(p) = \frac{1}{e^{E/T}+1}, \quad \text{si } P = P(T)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{g}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3E} f\, d^3p\right]$$

$$= \frac{g}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3E}\frac{\partial f(p)}{\partial T}\, d^3p$$

Como $f = f(p) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial E}$, por regla de la cadena

Ahora Como $E = \sqrt{p^2+m^2}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dT} = \frac{-g}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3T}\frac{\partial f}{\partial p}\frac{E}{p}\, d^3p = \frac{-g\, 4\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{p^2}{3T}\frac{\partial f}{\partial p}\frac{E}{p}\, p^2\, dp$$

Evaluando sobre todo el dominio

$$= \frac{-g}{6\pi^2}\int_0^\infty \frac{E p^3}{T}\frac{\partial f}{\partial p}\, dp$$

Al integrar por partes

$$= \frac{g}{6\pi^2} = \frac{Ep^3}{T} f \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dp}\left(\frac{Ep^3}{T}\right) f(p)\, dp$$

evaluando $\lim_{p \to \infty} f(p) < e^{-\frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T}} \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dT} = \frac{g}{24\pi^3} \int 4\pi f(p) p^2 \left[\frac{p^2}{\sqrt{m^2+p^2}\,T} + \frac{3\sqrt{m^2+p^2}}{T}\right] dp$$

Regresando el valor de E y terminando.

$\Rightarrow$ factorizamos el 4

$$= \frac{g}{8\pi^3} \int f(p)\, d^3p \left[\frac{p^2}{3\sqrt{m^2+p^2}\,T} + \frac{\sqrt{m^2+p^2}}{T}\right]$$

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{1}{T} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \left(\underbrace{\frac{p^2}{3E}}_{P} + \underbrace{E}_{\rho}\right) f\, d^3p$$

factorizamos $\frac{1}{T}$ y la sacamos de la integral

Pero, por las ecuaciones para P y ρ del inicio

$$\boxed{\frac{d\rho}{dT} = \frac{P + \rho}{T}}$$