

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MORELOS
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS BÁSICAS Y
APLICADAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MORELOS

Curvas de Rotación y Modelo de Materia Oscura de Campo
Escalar

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Alejandro Batallar Soria

ASESOR:

José Alberto Vázquez González

CUERNAVACA, MORELOS 2023



ASUNTO: ACTA INTERNA DE EXAMEN.

ASIGNATURA: RESIDENCIA DE INVESTIGACIÓN.

PERIODO: AGOSTO-DICIEMBRE 2022.

FECHA DE EXAMEN:

La presente acta interna avala que el/la estudiante ALEJANDRO BATALLAR SORIA con número de matrícula 10018793 de la Licenciatura en Ciencias Área Terminal en FÍSICA, obtuvo la siguiente calificación, en la asignatura RESIDENCIA DE INVESTIGACIÓN:

CALIFICACIÓN:	CALIFICACIÓN CON LETRA:
10	Diez

SINODALES:

DR. ALEJANDRO RAMÍREZ SOLIS

PRESIDENTE
(Firma electrónica)

DR. JOAQUIN ESCALONA SEGURA

SECRETARIO
(Firma electrónica)

DR. JOSÉ ALBERTO VÁZQUEZ
GONZÁLEZ

VOCAL
(Firma electrónica)

DR. FEDERICO VÁZQUEZ HURTADO

SUPLENTE
(Firma electrónica)

DR. GABRIEL GERMÁN VELARDE

SUPLENTE
(Firma electrónica)

Agradecimientos

De manera muy especial agradezco a mi asesor, Dr. José Alberto Vázquez González por su guía, consejos y apoyo al realizar esta tesis, también agradezco a Atalia Navarro Boullosa por su tiempo y consejos.

Agradezco a mis sinodales por sus comentarios al revisar esta tesis, Dr. Alejandro Ramírez Solís, Dr. Joaquin Escalona Segura, Dr. Federico Vázquez Hurtado y Dr. Gabriel Germán Velarde.

Agradezco al Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM por haberme permitido usar sus instalaciones al realizar esta tesis, también deseo agradecer a todos mis profesores tanto del CINC UAEM, como del ICF UNAM por todos los conocimientos y lecciones que me compartieron.

Agradezco al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológico por la beca que se me proporcionó.

Índice general

Resumen	IV
Abstract	VI
1. Objetivos	1
1.1. Objetivos Generales	1
1.2. Objetivos particulares	1
2. Introducción	2
2.1. Historia de la materia oscura	2
2.2. Curvas de Rotación	6
3. Modelo Estándar de la Cosmología	10
3.0.1. Retos del modelo estándar de la cosmología	14
4. Modelo de Campo Escalar	17
4.1. Estrellas de Bosones	18
4.2. Derivación del perfil de densidad Bohmer & Harko	22
5. Perfiles de Densidad	27
5.1. Perfil de Bohmer y Harko	27
5.2. Perfil Navarro-Frenk-White	28
5.3. Perfil Pseudo-isotérmico	30
5.4. Perfil de Einasto	31
5.5. Perfil de densidad de Bohmer y Harko modificado	31
6. Datos Utilizados	33
6.1. Hipótesis de disco mínimo	33
7. Metodología	35
7.1. Regresión no lineal por mínimos Cuadrados	35
7.2. Monte Carlo vía cadenas de Markov afín invariante.	36
7.2.1. MCMC afín invariante	38

8. Resultados	49
8.0.1. χ_r^2 de los perfiles de densidad	51
8.0.2. Análisis de χ_r^2	53
8.0.3. Curvas de Rotación	53
8.0.4. Distribuciones de probabilidad	59
9. Conclusiones	66
10. Anexo	68
10.1. Regresión por mínimos cuadrados	68
10.2. Métodos de Monte Carlo	71
10.3. El sistema Schrödinger-Poisson	80
10.4. Metodología para resolver el sistema SP (estrellas de bosones)	84
10.4.1. Método de Newton–Raphson	84
10.4.2. Método de Runge-Kutta	85
10.4.3. Método de Shooting	87
10.5. χ_r^2 obtenida con mínimos cuadrados	88
10.6. Código de el ajuste de parámetros con emcee	89
10.7. Tazas de aceptación y tiempos de autocorrelación	102

Resumen

Determinar la naturaleza de la materia oscura se ha convertido en uno de los problemas más importantes de la física, el modelo estándar de la cosmología que toma a la materia oscura como una partícula fría, explica las observaciones del Universo a gran escala (con excepciones como la tensión de Hubble), sin embargo, a pequeñas escalas el modelo falla y presenta contradicciones con lo observado además de que la materia oscura y energía oscura aún no tienen explicaciones concretas. Muchas hipótesis se han propuesto a lo largo de los años como candidatos para explicar la materia oscura, varios candidatos han perdido relevancia por sus inconsistencias con las observaciones, como lo son modelos de gravedad modificada y objetos bariónicos oscuros. Se cree que la materia oscura es algún tipo de partícula no incluida en el modelo estándar de la física de partículas. El objetivo general de este trabajo es comparar el ajuste de 4 perfiles de densidad de materia oscura a curvas de rotación de 26 galaxias de bajo brillo superficial y proponer una modificación al perfil de materia oscura de campo escalar. Se busca comparar el modelo Λ CDM utilizando el perfil de densidad Navarro-Frenk-White y el modelo de materia oscura de campo escalar utilizando el perfil de Bohmer & Harko. Se compara también el ajuste de dos perfiles de densidad empíricos, el perfil pseudo-isotérmico y el perfil de Einasto.

En el capítulo 1 se definen los objetivos generales y particulares de esta tesis.

En la sección 2.1 se da un contexto histórico de las observaciones y evidencias más importantes que apuntan a la existencia de la materia oscura. En la sección 2.2 se presenta una explicación de curvas de rotación galácticas y de la inconsistencia entre las curvas de rotación predichas y las curvas de rotación observadas.

En el capítulo 3 se da una breve explicación del modelo estándar de la cosmología, sus éxitos y fallos. En el capítulo 4 se presenta el modelo de materia oscura de campo escalar y las motivaciones para tener un nuevo modelo cosmológico y en particular la necesidad de un nuevo modelo de materia oscura como alternativa a la materia oscura fría que se usa en modelo Λ CDM.

En el capítulo 5 se da una explicación y se definen los perfiles de densidad que se ajustaron en este trabajo.

En el capítulo 6 se da una explicación de los datos experimentales utilizados, la manera en la que se construyen las curvas de rotación y la motivación de usar curvas de rotación de galaxias de bajo brillo superficial.

El ajuste de los perfiles de densidad se realizó utilizando el método de Monte Carlo vía cadenas de Markov afín invariante que es expuesto en el capítulo 7. Como prospecto de este trabajo se tiene resolver el sistema Schrödinger-Poisson y ajustar los perfiles de densidad de estrellas de bosones a los datos experimentales, para esto es necesario implementar el

método de Shooting combinado con el método de Newton-Raphson y el método de Runge-Kutta, la explicación de estrellas de bosones y de su metodología se presentan en el anexo. En el capítulo 8 se presentan los resultados obtenidos, el ajuste de los perfiles y las curvas de rotación.

En el capítulo 9 se presentan las conclusiones.

Y finalmente, en el capítulo 10 se incluyen anexos donde se presentan las tablas de χ_r^2 obtenidas mediante regresión no lineal por mínimos cuadrados y obtenidas con emcee, además de la tabla de auto-correlación y tasas de aceptación de el método de MCMC utilizado para cada una de las galaxias y de los perfiles de densidad; en el anexo también se presenta el código de python para el ajuste con emcee.

Abstract

The nature of dark matter has become one of the most important problems in physics, the standard model of cosmology explains the observations of the Universe at large scales (with the exception of the Hubble tension), however, on small scales the model fails and presents contradictions with observations. Many hypotheses have been proposed over the years as candidates of dark matter, several candidates have lost relevance due to their inconsistencies with observations, such as modified gravity models and baryonic dark matter objects, it is believed that dark matter is a kind of particle not included in the standard model of particle physics. The general objective of this work is to compare the fit of density profiles of two theoretical models of dark matter to rotation curves of 26 low surface brightness galaxies and to propose a modification of the scalar field dark matter density profile Bohmer & Harko. We compare the Λ CDM model using the Navarro-Frenk-White density profile and the SFDM model with the Bohmer & Harko profile, we also compare the fit of two empirical density profiles, the pseudo-isothermal profile and the Einasto profile.

Chapter 1 defines the general and particular objectives of this thesis.

In section 2.1 a historical context of the most important observations and evidence pointing to the existence of dark matter is given, in section 2.2 an explanation of galactic rotation curves and the inconsistency between predicted and observed rotation curves is presented. In chapter 3 a brief explanation of the standard model of cosmology, its successes and failures is given. In chapter 4 we present the scalar field dark matter model and the motivations for having a new cosmological model and in particular the need for a new dark matter model as an alternative to the CDM part of the Λ CDM model.

In chapter 5 an explanation of the density profiles that were fitted in this work is presented. Chapter 6 gives an explanation of the experimental data used, the way in which the rotation curves are constructed and the motivation for using rotation curves of low surface brightness galaxies.

The fitting of the density profiles was performed using the Monte Carlo Markov Chain affine invariant, discussed in Chapter 7; as future work we have to solve the Schrödinger-Poisson system and fit it to the experimental data for this, it is necessary to implement the Shooting method combined with the Newton-Raphson method and the Runge-Kutta method, this explanations are presented in chapter 10.

Chapter 8 presents the results obtained, the best fitting parameters of the profiles and the rotation curves we obtained. Chapter 9 presents the conclusions and prospects of this work.

Section 4.1 gives an explanation of boson stars and their study from the Schrödinger-

Poisson system as the Newtonian limit of the Einstein-Klein-Gordon equations.

Chapter 10 includes the ancillary of this work, wich consists of a table of χ_r^2 obtained with non linear least squares regression and obtained with emcee, it's also included a table with auto correlation times and acceptance rate of the emcee algorithm for each galaxy and density profile. It is also included the python code of this work.

Capítulo 1

Objetivos

1.1. Objetivos Generales

Realizar una comparación del ajuste de 5 perfiles de densidad de materia oscura, mediante un ajuste de parámetros utilizando un algoritmo de Markov-Monte Carlo (MCMC) y proponer una modificación al perfil de densidad de campo escalar para encontrar un buen ajuste a un mayor número de galaxias. Esto se realiza con el objetivo de encontrar el perfil con mejor ajuste a las observaciones que consisten en: 26 galaxias de bajo brillo superficial; dichos datos fueron publicados por Stacy S. Mcgaugh, Vera C. Rubin & W. J. G. De Blok en 2001, [1].

1.2. Objetivos particulares

Como objetivos particulares de este trabajo se tiene: el estar familiarizado con el modelo estándar de la cosmología, sus generalidades y retos. Estar familiarizado con el modelo de materia oscura de campo escalar y los últimos avances en esta línea de investigación, otro objetivo particular fue el entender los métodos de Monte Carlo y poder realizar ajustes de parámetros con el algoritmo MCMC afín invariante de emcee.

Capítulo 2

Introducción

2.1. Historia de la materia oscura

En este Capítulo se habla sobre la historia de las observaciones más importantes y primeros indicios que apuntaban a la existencia de la materia oscura. En 1904 Lord Kelvin [2] asumió que las estrellas de la Vía Láctea se podían describir como si fueran partículas de un gas sujeto a un campo gravitacional y entonces era posible establecer una relación entre el tamaño del sistema y la dispersión de velocidades de las estrellas. Kelvin encontró una cota superior para la densidad de materia dentro del volumen considerado y concluyó que deberían existir estrellas extintas y oscuras, las cuales no eran posibles de detectar debido a su baja luminosidad. Poincaré en 1906 utilizó el termino materia oscura [3] por primera vez y argumentó que: “debido a que la dispersión de velocidades predicha en las estimaciones de Kelvin es del mismo orden de magnitud que las observaciones, entonces la cantidad de materia oscura debería ser similar a la cantidad de materia visible”.

En 1932, un alumno de Kaptein, Jan Oort, publicó un análisis de la cinemática vertical de estrellas en el vecindario solar [4], en este trabajo Oort agregó estimaciones para la densidad de materia oscura local. En su análisis, Oort hizo una serie de mejoras al trabajo de Kapteyn, relajando por ejemplo la suposición de la isothermalidad del gas de estrellas. Oort derivó un valor probable para la densidad total de la materia cerca del Sol de $0.092M_{\odot}/pc^3$ correspondiente a $6.3 \times 10^{-24}g/cm^3$. Para estimar la cantidad de materia oscura, Oort luego realizó una estimación de la contribución de las estrellas a la densidad local, argumentando que una extrapolación de la función de masa estelar basada en las estrellas observadas parecía considerar una sustancial fracción de la densidad total inferida.

Se creía que la cantidad máxima de materia oscura correspondía aproximadamente a la mitad de la densidad local total y los astrónomos razonaban que era probable que la materia oscura consistiera de nada mas que estrellas tenues u objetos estelares similares que no irradiaran mucha luz.

En 1933, Fritz Zwicky, mientras trabajaba en el Instituto Tecnológico de California, realizó un estudio de los corrimientos al rojo de varios cúmulos de galaxias [5], utilizando datos

de Edwin Hubble y Milton Humason [6], notó una gran dispersión en las velocidades de ocho galaxias dentro del cúmulo Coma, con diferencias que superaban los 2000 km/s [7]. Este hecho ya había sido notado por Hubble y Humason, pero Zwicky fue un paso más allá y decidió aplicar el teorema del virial al cúmulo, para estimar su masa.

Zwicky comenzó asumiendo que la masa total del Cúmulo era el producto del número de galaxias observadas (800) y la masa promedio de una galaxia, que tomó como $109M_{\odot}$ como había sugerido Hubble, luego tomó el tamaño del sistema como aproximadamente 106 años luz, para poder después determinar la energía potencial total de el sistema. Después calculó la energía cinética promedio a partir de la cual finalmente encontró una dispersión de velocidades. Sus resultados arrojaban que 800 galaxias de $109M_{\odot}$ en una esfera de 106 años luz deberían exhibir una dispersión de velocidad de 80 km/s mientras que la dispersión de velocidades observada era de aproximadamente 1000 km/s entonces el cúmulo debería tener unas 400 veces más masa de la que se podía observar.

Por lo tanto concluyó no solamente que debería existir materia oscura en el cúmulo, sino que la cantidad de materia oscura debería ser mucho mayor que la cantidad de materia bariónica.

Otra observación en cúmulos de galaxias que parecen indicar la existencia de materia oscura y además dar pistas sobre su naturaleza es el cúmulo bala, que en realidad son dos cúmulos galácticos en colisión, el cúmulo bala es evidencia fuerte de que la materia oscura no interactúa con la materia bariónica mediante el electromagnetismo.

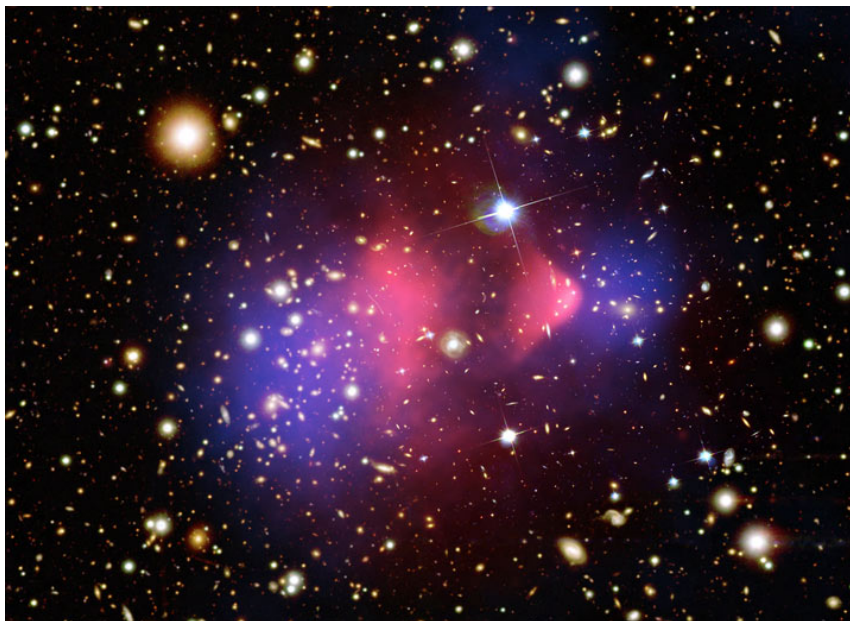


Figura 2.1: El Cúmulo bala (NASA/CXC/M. Weiss - Chandra X-Ray Observatory).

En la Figura 2.1 el color azulado muestra la distribución de materia oscura que se infiere por el efecto de lente gravitacional en las galaxias de fondo y el color rojizo representa gas emisor de rayos X medido por el Observatorio de rayos X Chandra [8]. El cúmulo

bala proporcionó evidencia observacional sólida de que la materia oscura no interactúa con la materia bariónica ni consigo misma (o lo hace debilmente) y que la materia oscura compone la mayor parte de la masa en un cúmulo galáctico. El cúmulo bala no es un caso particular en observaciones astronómicas, comportamiento similar se observa en los cúmulos en colisión MACS J0025.4 1222 [9].

Una serie de observaciones en la década de 1980 apoyó la presencia de materia oscura, incluido el efecto de lente gravitacional de objetos de fondo por cúmulos de galaxias, la distribución de temperatura de gas caliente en galaxias y en cúmulos galácticos [10, 11]. Más pruebas que apuntan a la existencia de la materia oscura provienen de mediciones a escalas cosmológicas de anisotropías en el fondo de radiación de microondas. El CMB (por sus siglas en inglés) es radiación remanente del universo temprano. La escala angular y la altura de los picos (y valles) de oscilaciones son indicadores de parámetros cosmológicos, incluida la densidad de energía total, la densidad bariónica y la componente de materia oscura. Si la luz viaja en línea recta como sería el caso de una geometría plana, entonces se espera que la escala angular del primer pico en el espectro de potencias en el CMB se encontrara en 1 grado, datos de la misión Planck [12] así lo indican, por tanto, la geometría de nuestro universo se considera plana, lo que corresponde a una densidad de energía del universo de $\sim 10^{-29} \text{ gm/cm}^3$. La altura del segundo pico implica que el 5 % del total de materia son átomos ordinarios (materia bariónica), mientras que el 26 % del total es materia oscura. Por si solo el CMB proporciona evidencia irrefutable de la existencia de la materia oscura [13].

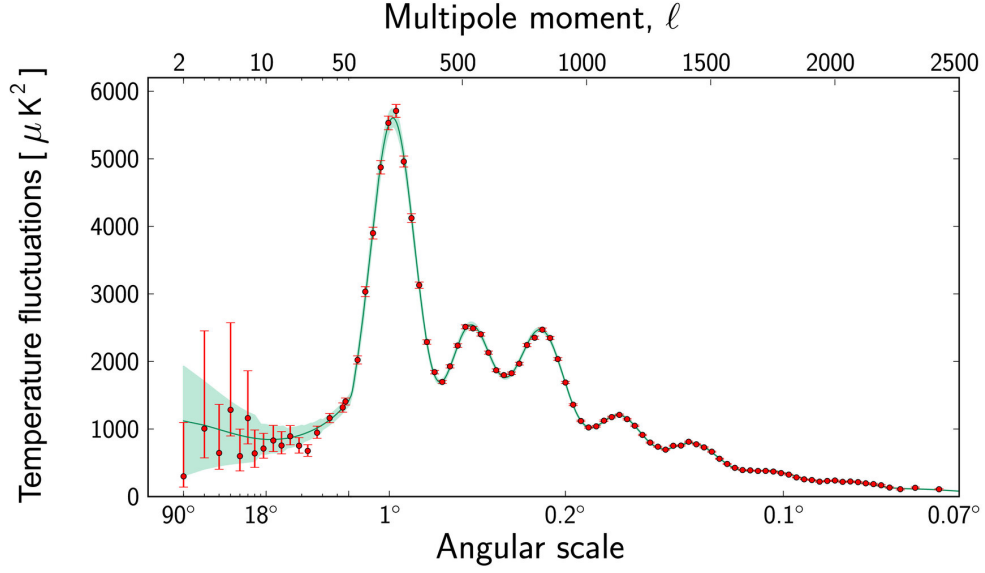


Figura 2.2: Espectro de potencias del CMB, donde se muestran las fluctuaciones de temperatura (eje y) a diferentes escalas angulares y valores de momento multipolar (eje x). Fuente: ESA and the Planck Collaboration

En la Figura 2.2 la curva verde representa el modelo estándar de cosmología Λ CDM. El pico a 1 grado es consistente con una geometría plana en el universo, la altura del segundo pico con 5% y el segundo y tercer picos con 26% de materia oscura. Para caracterizar las fluctuaciones de temperatura de toda la bóveda celeste es necesaria una función que dependa de dos coordenadas, $T(\theta, \phi)$ y se puede descomponer en términos de armónicos esféricos de la forma

$$T(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad , \quad (2.1)$$

se encuentra que valores grandes de l corresponden escalas angulares pequeñas, por ejemplo, para $l = 0$, se tiene el monopolo y el promedio de T de toda la bóveda celeste y si $l = 1$ la escala angular es 180° y se trata del dipolo angular. En la parte izquierda de la figura 2.2 se tienen l pequeños y una escala angular grande. El Universo temprano estaba lleno de electrones, fotones y materia oscura que interactúa vía un potencial gravitacional, la materia se atrae debido a la gravedad, esto ocasiona un aumento en la densidad, al mismo tiempo este aumento en la densidad ocasiona un incremento en la repulsión de la materia, esto entonces ocasiona oscilaciones acústicas que se propagan en el Universo. Las regiones con mayor densidad corresponden a las regiones de mayor temperatura en el CMB y las regiones frías se deben a regiones de baja densidad. El tamaño de las fluctuaciones de la temperatura y la escala angular nos dan entonces información sobre la distribución de materia al momento que se formara el fondo de radiación.

Las observaciones para escalas angulares pequeñas concuerdan muy bien con las predicciones del modelo Λ CDM.

ciones del modelo Λ CDM. Las fluctuaciones a escalas angulares grandes, entre 90° y 6° , son aproximadamente un 10 % más débiles que el mejor ajuste del modelo Λ CDM a las mediciones de Planck. En escalas angulares mayores de 6° , hay un punto que queda fuera del rango de modelos permitidos. Estas anomalías sugieren que el modelo estándar de cosmología podría necesitar un replanteamiento como se argumenta en [14] y [15].

2.2. Curvas de Rotación

Las curvas de rotación de una galaxia son una gráfica de las velocidades orbitales de el material visible en el disco galáctico contra su distancia radial al centro galáctico. Por lo general, los datos observados a cada lado de una galaxia espiral son asimétricos, por lo que los datos de cada lado se promedian para crear la curva.

En 1939, Horace W. Babcock estudió la curva de rotación de la nebulosa de Andrómeda [16] (conocida ahora como la galaxia de Andrómeda) y encontró que la relación masa-luminosidad aumenta de manera radial, esto lo atribuyó a la absorción de luz dentro de la galaxia o a la dinámica modificada en las partes exteriores de la espiral y no a materia faltante.

El trabajo de Vera Rubin, Kent Ford y Ken Freeman en las décadas de 1960 y 1970 proporcionó más pruebas que apuntaban a la existencia de la materia oscura. También utilizando curvas de rotación de galaxias, Rubin y Ford trabajaron con un nuevo espectrómetro para medir la curva de velocidad de las galaxias espirales con mayor precisión. En 1980 se publicó un artículo donde se presentaron los resultados de Rubin y Ford, en el artículo [17], se demostró que la mayoría de las galaxias estudiadas deberían contener unas seis veces más materia oscura que materia visible; por lo tanto, en la década de 1980, la necesidad de algún tipo de materia que no interactuara con la luz pero que fuera afectada por la gravedad fue ampliamente reconocido como un problema sin resolver en la física.

En 1972, David Rogstad y Seth Shostak [18] publicaron curvas de rotación de cinco galaxias espirales mapeadas con el interferómetro Owens Valley, estas curvas de rotación de todas las cinco galaxias eran planas, lo que sugería valores muy grandes de relación masa-luz en las partes exteriores de sus discos extendidos, apuntando de nuevo a la existencia de materia oscura en galaxias.

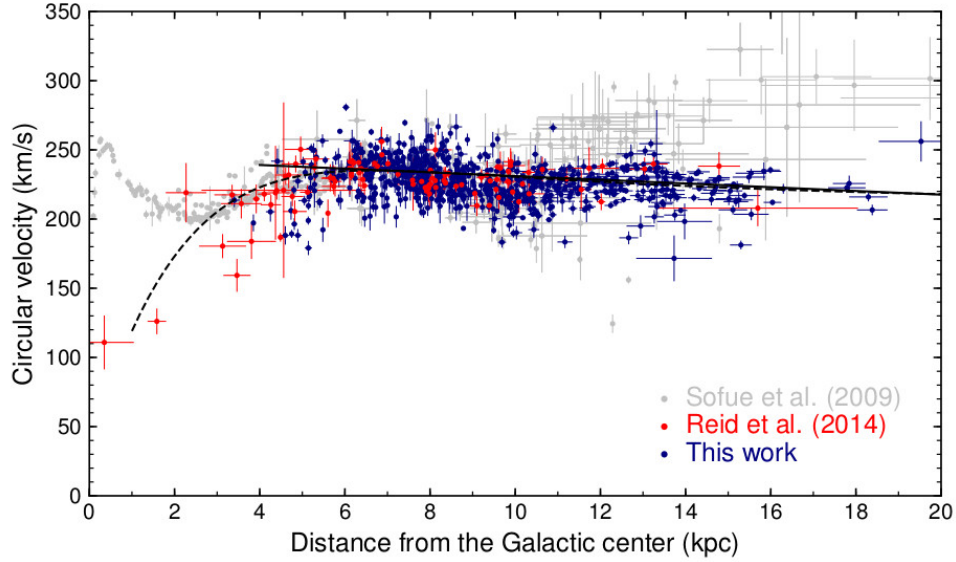


Figura 2.3: Curva de Rotación de la Vía Láctea [19].

Si las estrellas en una galaxia siguieran la mecánica Newtoniana, su velocidad debería caer conforme su distancia al radio aumenta y observaríamos curvas de rotación con una notable caída, sin embargo, las observaciones de galaxias espirales arrojan curvas de rotación planas. Los datos más confiables pertenecen a nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, en la Figura 2.3 se muestra la curva de rotación de nuestra galaxia que también es plana.

También se pueden construir curvas de rotación para los sistemas planetarios como nuestro propio sistema solar, como se muestra en la Figura 2.4, para esto se gráfica la velocidad orbital de los planetas en contra de su distancia al sol, este tipo de sistemas tienen curvas de rotación que obedecen a la mecánica Newtoniana, es decir que los planetas siguen: $v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$, estas curvas de rotación (no planas) se llaman Keplerianas, sin embargo, en las galaxias no se observan curvas de rotación Keplerianas (excepto en casos particulares como galaxias súper difusas), las estrellas orbitando en galaxias describen curvas de rotación planas, en donde para radios grandes la velocidad orbital no decae e incluso puede crecer. Se asume que en las galaxias la mayor parte de la masa se encuentra cerca del centro galáctico, sin embargo las observaciones indican que esto es incorrecto. Cuando los perfiles de masa de las galaxias se obtienen a partir de la distribución de estrellas y las relaciones masa-luz en los discos estelares, se encuentra que estos perfiles no coinciden con las masas derivadas a partir de las curvas de rotación observadas y la ley de la gravedad, entonces se toma como una solución a este problema el asumir una distribución de materia oscura que forma un halo alrededor de la galaxia, este halo de materia oscura puede ser mucho más grande que el radio galáctico del material observable.

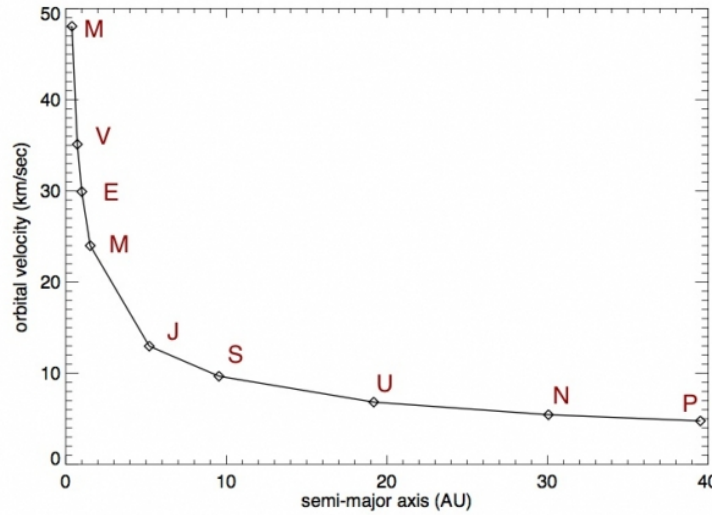


Figura 2.4: Curva de rotación del sistema solar [20].

Conforme más evidencia que apuntaba a la existencia de la materia oscura se acumulaba, se comenzaron a proponer candidatos para poder explicar esta materia faltante, uno de estos primeros candidatos fueron los MACHOs (massive aurora compact halo objects) [21], estos candidatos consisten de objetos astronómicos de materia bariónica de baja luminosidad como: planetas, enanas marrones, enanas rojas, estrellas de neutrones y agujeros negros, sin embargo, el consenso actual es que este tipo de objetos no pueden constituir más que una minúscula fracción de la materia oscura en el Universo, la teoría del Big Bang no permite la creación de suficientes bariones como para explicar toda la materia oscura en el Universo [22], además de observaciones en el fondo de radiación de microondas y en cúmulos de galaxias indican que los MACHOs no son buenos candidatos de materia oscura.

Las curvas de rotación de galaxias apuntan a la existencia de una estructura de materia oscura alrededor de las galaxias, pero en 1982 Mordehai Milgrom [23] con la motivación de explicar las curvas de rotación galácticas propuso una modificación a la ecuación de gravitación universal de Newton argumentando que la gravedad Newtoniana se comportaba de manera diferente para aceleraciones muy pequeñas como en las regiones exteriores en galaxias, esta fue la primera propuesta de modelos de gravedad modificada como hipótesis para explicar la materia oscura, sin embargo, el modelo MOND (Modified Newtonian Dynamics) de Milgrom es meramente empírico y no obedece leyes de conservación; en 2004 Jacob Bekenstein formuló un nuevo modelo de gravedad modificada a partir del principio de mínima acción y que por lo tanto sigue leyes de conservación, este modelo lo llamó TeVeS (Tensor Vector Scalar gravity) [24] y reproduce curvas de rotación planas al igual que MOND, sin embargo estos modelos de gravedad modificada no son consistentes con las colisiones de cúmulos de galaxias, ni con la detección de ondas gravitacionales en el Ligo. TeVeS tampoco se ajusta bien al fondo de radiación de microondas (Figura 2.5).

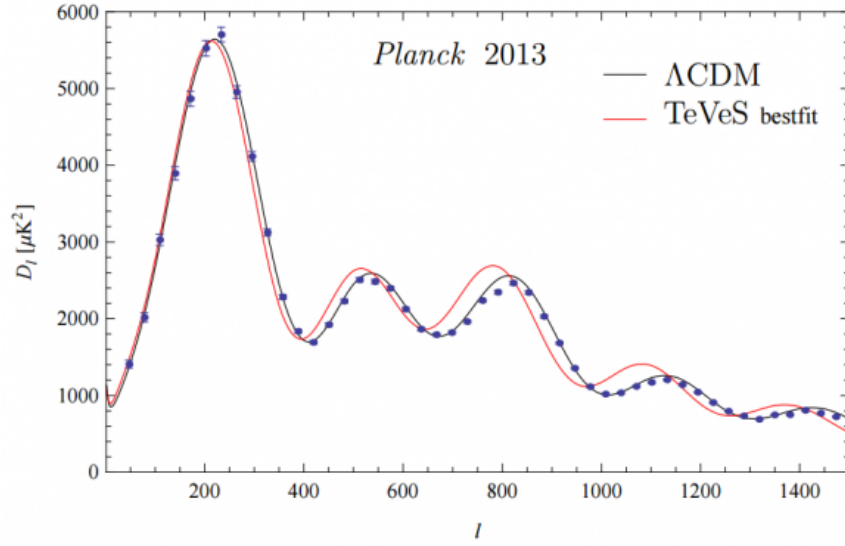


Figura 2.5: El espectro de potencias del fondo de radiación de microondas con datos de Planck 2013 [25] en comparación con el mejor ajuste del modelo TeVeS (línea roja) tomado de: [26].

Estos retos para los modelos de gravedad modificada y todos los éxitos experimentales que ha tenido la relatividad general nos permiten tomar a la relatividad general (y su límite Newtoniano) como el modelo de gravedad que mejor describe nuestro Universo. A partir de la relatividad general y de asumir isotropía y homogeneidad se construye el modelo estándar de la cosmología que posee mucha evidencia experimental a su favor, pero también cuenta con retos, uno de ellos siendo la naturaleza de la materia oscura.

Capítulo 3

Modelo Estándar de la Cosmología

El modelo estándar de la cosmología o el modelo Λ CDM tiene en cuenta 3 componentes en el Universo: una constante cosmológica denotada por Λ asociada con la energía oscura y la expansión acelerada del universo, la materia oscura fría (Cold Dark Matter) y una componente de materia ordinaria como lo son la radiación y las partículas bariónicas. Este modelo cosmológico usa a la relatividad general como la teoría correcta de la gravedad a escalas cosmológicas y se puede usar la mecánica Newtoniana como un límite a la relatividad general. El modelo Λ CDM surgió a fines de la década de 1990, después de un tiempo en el que las propiedades observadas del universo parecían inconsistentes y no había un consenso sobre la composición de la densidad de energía del universo; el modelo incluye una expansión del espacio métrico que está bien documentada con el corrimiento hacia el rojo de líneas de emisión o absorción espectral en la luz de galaxias distantes. Aunque esta expansión aumenta la distancia entre objetos, no aumenta el tamaño de los objetos en el espacio (por ejemplo, las galaxias). También permite que las galaxias distantes se alejen unas de otras a velocidades mayores que la velocidad de la luz; la expansión local es menor que la velocidad de la luz, pero la expansión sumada a través de grandes distancias puede exceder la velocidad de la luz.

La expansión del Universo esta parametrizada por un factor de escala $a(t)$ definido para el tiempo actual como $a(t_0) = 1$, con t_0 siendo la edad del Universo. La evolución del Universo puede ser descrita con las ecuaciones de Friedmann [27] en términos de densidad de energía, presión, curvatura y la constante cosmológica, estas ecuaciones son derivadas a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, utilizando la métrica Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. Esta métrica se deriva asumiendo que el principio cosmológico es válido, esto es, el universo a escalas cosmológicas es isotrópico y homogéneo. La isotropía quiere decir que las propiedades del Universo no dependen de la dirección en la que se observe y la homogeneidad que cualquier punto del Universo luce igual y tiene las mismas propiedades, lo anterior para escalas lo suficientemente grandes ($\text{Mpc} \times 10^3$).

La métrica F-L-R-W toma en cuenta 3 posibles métricas del Universo que son espacialmente isotrópicas y homogéneas (con excepción de geometrías que tienen agujeros como lo son los toros), estas métricas corresponden a un Universo cerrado (forma esférica), plano y abierto (hiperboloide). Existe amplia evidencia como: [28] y [29] que indica que nuestro

Universo es plano. Tenemos que para una métrica plana (Minkowski) y en coordenadas cartesianas:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} , \quad (3.1)$$

también tenemos que el Universo se está expandiendo, de acuerdo a el factor de escala $a(t)$ esto quiere decir que conforme pasa el tiempo, las bases $\vec{e}_i \rightarrow a(t)\vec{e}_i$. Lo anterior no entra en conflicto con el principio cosmológico debido a que este reescalamiento en la métrica ocurre en todos los puntos del Universo y esto conserva al principio cosmológico.

Realizando un cambio de coordenadas y considerando las posibles geometrías del Universo, $k = 1$ para un Universo cerrado, $k = 0$ para un Universo plano y $k = -1$ para un Universo abierto:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(a(t))^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a(t)r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a(t)r \sin(\theta))^2 \end{vmatrix} , \quad (3.2)$$

ahora tomando el tensor de energía-momento para un fluido perfecto en un marco de referencia donde el fondo de radiación de microondas no tiene corrimiento al rojo y la velocidad promedio de la masa a grandes escalas es 0.

$$g_{\nu}^{\mu} = \begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{vmatrix} , \quad (3.3)$$

tenemos que ρ es la densidad de masa, p es presión, r está asociada a la coordenada radial del espacio-tiempo, c es la velocidad de la luz, G es la constante de gravitación Universal, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es la curvatura escalar, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y Λ es la constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} , \quad (3.4)$$

llegamos a la ecuación de Friedmann (3.5) que se obtiene a partir de la componente 00 de (3.4):

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3} . \quad (3.5)$$

La segunda ecuación de Friedmann se obtiene de multiplicar a (3.4) por $g^{\mu\nu}$ de manera que el primer término se contrae a el escalar de Ricci y el tensor de energía-momento se convierte a un escalar T , entonces se llega a la segunda ecuación de Friedmann (3.6).

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad . \quad (3.6)$$

La ecuación (3.5) describe la tasa de expansión del Universo y la ecuación (3.6) describe la aceleración en la expansión del Universo.

Es común encontrar en discusiones sobre las ecuaciones de Friedmann que solo se le llama ecuación de Friedmann a la ecuación (3.5) y también usualmente se deriva junto a la ecuación (3.6) una tercera ecuación que describe la evolución en la densidad de energía del Universo, esta ecuación que formalmente no es llamada ecuación de Friedmann se obtiene de derivar respecto a t la ecuación (3.5) y sustituir el resultado en la ecuación (3.6), entonces se llega a:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \quad , \quad (3.7)$$

el término de densidad ρ incluye los diferentes contribuyentes a la densidad de materia-energía en el Universo que son: Materia bariónica (bar), Radiación (rad), Materia Oscura (dm) y Energía Oscura (de)

$$\rho = \rho_{\text{(bar)}} + \rho_{\text{(rad)}} + \rho_{\text{(dm)}} + \rho_{\text{(de)}} \quad , \quad (3.8)$$

la ecuación de Friedmann nos permite obtener el parámetro de Hubble:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad , \quad (3.9)$$

y la constante de Hubble H_0 siendo el valor actual del parámetro de Hubble.

En un Universo dominado por materia se tiene que:

$$\rho = \frac{\rho_{m_0}}{a^3} \quad , \quad (3.10)$$

donde ρ_{m_0} es la densidad de materia actual. Entonces la tasa de expansión se puede describir con el parámetro de Hubble: $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, donde \dot{a} representa la derivada del factor de escala respecto al tiempo.

Es relevante definir un valor especial de la densidad con el cual el Universo tiene curvatura 0, se toma Λ y k como 0 y entonces se tiene la densidad crítica actual:

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8.5 \times 10^{-27} \text{kgm}^{-3} \quad . \quad (3.11)$$

Y también se define el parámetro de densidad como el cociente entre la densidad observada y la densidad crítica:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} \quad , \quad (3.12)$$

Se tiene que en nuestro Universo:

$$\Omega = \Omega_{(\text{bar})} + \Omega_{(\text{rad})} + \Omega_{\text{cdm}} + \Omega_{\text{de}} \quad . \quad (3.13)$$

Diferentes valores de Ω describen distintos Universos:

- $\Omega > 1$ en el caso de un Universo dominado por materia el valor de Ω es mayor a 1 y la interacción gravitacional de la materia en este Universo es suficiente para contrarrestar la expansión y eventualmente el Universo colapsaría a una singularidad.
- $\Omega < 1$ se trata de un Universo abierto que se expande por siempre.
- $\Omega = 1$ los términos asociados a la expansión y a la densidad son iguales y el Universo tiene una geometría plana, si no hay energía oscura la expansión es no acelerada.
- La opción preferida debido a las observaciones, el Universo contiene materia Oscura en una cantidad mucho mayor a la materia ordinaria y entonces se tiene que la expansión es acelerada.

Las ecuaciones de Friedmann tienen soluciones exactas si se definen ecuaciones de estado adecuadas, usualmente se usa la ecuación de estado de un fluido ideal donde:

$$p = \rho w c^2 \quad , \quad (3.14)$$

donde w es una constante que es relevante debido a que su valor puede describir un Universo dominado por diferentes componentes, por ejemplo $w = 0$ corresponde a un Universo dominado por materia y entonces $a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$. Para el caso de un Universo plano ($k = 0$) se llega a la solución:

$$a(t) = a_0 t^{2/3(w+1)} \quad . \quad (3.15)$$

La ecuación (3.14) en realidad se trata de una familia de soluciones donde w determina el tipo de Universo, para un valor de $w = 1/3$ describe un Universo dominado por radiación y se llega a un factor de escala:

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (3.16)$$

El modelo estándar de la cosmología como ya se menciono utiliza las ecuaciones de campo de Einstein (y su límite Newtoniano en ciertos casos) y una componente de materia oscura y otra componente más de energía oscura para describir el Universo, sin embargo, en los últimos años este modelo ha sido sujeto a muchas críticas debido a sus fallas al ajustarse a

las observaciones que son cada vez más confiables, también se han realizado numerosas simulaciones computacionales que de igual manera han mejorado considerablemente gracias a avances tecnológicos recientes; desde la década de los ochenta se presentan problemas con el modelo Λ CDM como el problema de formación de galaxias y de cúmulos galácticos que teóricamente requerían un valor menor de la constante de Hubble que el observado.

Uno de los logros más notables del modelo Λ CDM es la predicción de las oscilaciones acústicas de bariones que fueron observadas con un buen ajuste en 2005 en [30].

El modelo Λ CDM proporciona una explicación de las siguientes propiedades del cosmos:

- La existencia y estructura del fondo cósmico de microondas.
- La estructura a gran escala en la distribución de las galaxias.
- Las abundancias observadas de hidrógeno, helio y litio.
- La expansión acelerada del universo observada en la luz de galaxias distantes y supernovas.

3.0.1. Retos del modelo estándar de la cosmología

La comparación del modelo con observaciones es exitosa a gran escala, pero tiene problemas a escalas subgalácticas, prediciendo demasiadas galaxias enanas y demasiada materia oscura en las regiones más internas de galaxias [31].

Uno de los retos más importantes en el estudio de la materia oscura es la falta de detección directa o indirecta de una partícula con las propiedades predichas por extensiones del modelo estándar de la física de partículas para una partícula no relativista de materia oscura (cold dark matter), o bien como se mencionará más adelante, partículas con las masas predichas por el modelo de materia oscura de campo escalar. Han habido un gran número de experimentos y millones de dólares invertidos en detectores directos o indirectos y hasta la fecha no ha habido detecciones de partículas de materia oscura.

Recientemente el principio cosmológico sobre el cual está construida la cosmología ha sido sujeto a críticas: [32, 33] argumentan que existen evidencias que a escalas lo suficientemente grandes la isotropía se viola y por lo tanto el principio cosmológico no es válido y por lo tanto las ecuaciones de Friedmann son obsoletas, esto hace que la validez del modelo Λ CDM sea cuestionada; la Agencia espacial Europea a cargo de la misión Planck argumenta que las anisotropías presentadas en datos de la misión Planck son lo suficientemente relevantes como para cuestionar el principio cosmológico, sin embargo, la validez del principio cosmológico sigue siendo tema de debate.

También existen posibles violaciones en la homogeneidad del Cosmos, simulaciones de N-cuerpos con el modelo Λ CDM en [34] parecen mostrar que el Universo es homogéneo a escalas de $\approx 250 Mpc$, sin embargo hay varias estructuras (Sloan Great Wall de 423 Mpc,

the Hercules–Corona Borealis Great Wall $2000 - 3000 Mpc$, The Giant Arc $1000 Mpc$) que contradicen estas simulaciones, pero esta inconsistencia se podría deber a errores en la simulaciones al momento de asumir que la materia oscura es una partícula fría de interacción débil.

Otro problema que no puede ser ignorado es la llamada “tensión de Hubble”, se trata de la diferencia entre el valor de la constante de Hubble medida localmente y su valor inferido a partir del fondo de radiación de microondas [35]. El modelo Λ CDM presenta suficientes problemas como para considerar nuevos modelos cosmológicos o por lo menos describir a la materia oscura no como una partícula fría, pero candidatos como MACHOS, modificaciones a la gravedad, agujeros negros primordiales no son suficientes para explicar todas las observaciones, entonces se busca otro tipo de partícula como candidato de materia oscura. Los problemas anteriormente mencionados tienen que ver con inconsistencias entre el modelo Λ CDM y observaciones, pero no son los únicos problemas con este modelo, también existe el problema cosmológico del litio [36], posibles violaciones en el principio de equivalencia [37, 38], sin embargo de mayor relevancia para este trabajo son las inconsistencias que surgen al asumir que la materia oscura es una partícula masiva no relativista y estas son las siguientes:

- Cusp Core.- Existe una discrepancia entre los perfiles de densidad de materia oscura fría teóricos y los perfiles de densidad observados en galaxias, particularmente en galaxias pequeñas y de bajo brillo superficial, en donde simulaciones de N-cuerpos que asumen que la materia oscura es una partícula fría predicen picos en la densidad central de las galaxias y esto no se observa en galaxias [39].
- El problema de las galaxias satélites.- Simulaciones numéricas que utilizan materia oscura fría muestran que galaxias del tamaño de la vía láctea ($26.8 kpc$) deberían tener un mayor número (varios ordenes de magnitud) de galaxias satélites que las que se observan en realidad alrededor de 11 galaxias orbitan a la vía láctea y las simulaciones predicen alrededor de 500 galaxias enanas que orbitan alrededor de la vía Láctea, [40].
- El problema de los planos satelitales de Galaxias.- En Galaxias como la Vía Láctea y la galaxia Andrómeda se observa que las galaxias satélites orbitan en discos planos (de manera similar a la materia bariónica en los discos galácticos), las simulaciones entran en conflicto con estas observaciones, ya que predicen que las galaxias satélites deberían estar distribuidas aleatoriamente alrededor de sus galaxias madre.
- Problema de la barra rápida.- Un gran número de galaxias observadas presentan barras centrales de movimiento rápido, en el paradigma Λ CDM estas barras deberían frenarse debido a la fricción dinámica con el Halo galáctico [41].
- Problema de la morfología galáctica.- Alrededor del 80 % de galaxias observadas presentan discos galácticos sin ausencia de bulbos galácticos, esto presenta un problema para el modelo debido a que este predice que las galaxias tienen una evolución

jerárquica y que las galaxias más grandes deberían formarse al fusionarse galaxias más pequeñas, estas colisiones forman bulbos galácticos (De nuevo se utilizan simulaciones de N-cuerpos con materia oscura fría [42]).

- El problema de la pequeña escala.- Simulaciones hidrodinámicas de N-cuerpos con materia oscura fría predicen la formación de muchas galaxias enanas y de estructuras de escalas sub-galácticas, estas predicciones entran en conflicto con las observaciones [43, 44].

Los problemas anteriores se presentan como contradicciones entre simulaciones de N-cuerpos con materia oscura fría y observaciones. Ambas observaciones y simulaciones computacionales se han vuelto más confiables durante los últimos años, sin embargo, estas tensiones entre el modelo Λ CDM y las observaciones no desaparecen, entonces surge la necesidad de intentar explicar la naturaleza de la materia oscura como una partícula con propiedades diferentes y que pueda resolver los problemas antes mencionados en el modelo Λ CDM.

Capítulo 4

Modelo de Campo Escalar

La materia oscura de campo escalar (SFDM por sus siglas en inglés) es la hipótesis de que las propiedades de la materia oscura pueden representarse mediante un campo escalar relativista con dos parámetros ajustados, masa y auto interacción, dotado de un potencial escalar. En este modelo, la materia oscura consiste en una partícula ultraligera con una masa de alrededor de 10^{-22} eV cuando no hay auto interacción y si hay auto interacción, se permite un rango de masas más amplio. La incertidumbre en la posición de una partícula es mayor que su longitud de onda Compton, una partícula con una masa de 10^{-22} eV tiene una longitud de onda Compton de alrededor de 1,3 años luz, entonces para algunas estimaciones razonables de la masa de partículas y la densidad de la materia oscura no tiene sentido hablar sobre las posiciones y los momentos de las partículas individuales debido a que la materia oscura ultraligera se parecería más a una onda que a una partícula, y los halos galácticos serían sistemas gigantes de un condensado Bose-Einstein autogravitante, entonces la materia oscura se podría describir como un condensado de Bose-Einstein de partículas ultraligeras de campo escalar.

En el modelo SFDM se asume un tensor de energía momento para el campo escalar de la forma

$$T_{\mu\nu} = \Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\Phi^{,\sigma}\Phi_{,\sigma} + 2V(\Phi)) \quad . \quad (4.1)$$

El modelo de materia oscura de campo escalar reproduce perfiles de densidad en galaxias similares a los del modelo Λ CDM con la diferencia de que los perfiles de materia oscura de campo escalar predicen perfiles de densidad donde la densidad central es plana (se evita el problema cusp-core).

Se han considerado varios potenciales como $V(\Phi) = m^2\phi^2 + \lambda\phi^4$ o el potencial mas sencillo que considera la masa $V(\Phi) = m^2\phi^2$. El potencial en (4.1) en unidades naturales donde $\hbar = c = 1$ está dado por

$$V(\Phi) = \frac{m_\Phi^2}{8\pi G\lambda^2} \left[\cosh(\sqrt{8\pi G}\lambda\Phi) - 1 \right] \quad . \quad (4.2)$$

Los parámetros libres del modelo son λ representando la auto interacción y m_Φ siendo la masa de los bosones de campo escalar que se encuentra mínimamente acoplado a la gravedad. Los valores de λ y m_Φ que hacen que el modelo de materia oscura de campo escalar se

ajuste a las observaciones a escalas cosmológicas son: 20 y 10^{-23} eV respectivamente. Uno de los problemas con el modelo Λ CDM es que este modelo predice la formación de muchas galaxias enanas y de estructuras de escalas sub-galácticas y este tipo de estructuras no se observan tan frecuentemente como se predice, este es uno de los varios problemas que el modelo de materia oscura de campo escalar arregla, el principio de incertidumbre evita la formación de estructuras más pequeñas que $1/m_\Phi \approx 10pc$.

El modelo SFDM ha creado una gran expectativa por resolver el problema de la materia oscura, el campo escalar no sólo da la densidad de energía correcta para la materia requerida en las galaxias para predecir las curvas de rotación observadas, pero se obtiene la correcta distribución de materia oscura en las galaxias.

El modelo de Materia Oscura de Campo escalar explica:

- La evolución de los parámetros de densidad de los componentes del Universo.
- Curvas de rotación y perfiles de densidad central de galaxias.
- La masa crítica para el colapso de un campo escalar real se ajusta a la masa observada en Halos galácticos.
- El campo escalar evita la creación de subestructuras.

4.1. Estrellas de Bosones

Las estrellas de Bosones estudiadas son soluciones del sistema de ecuaciones Einstein-Klein-Gordon (EKG) con un potencial que depende de la masa del campo escalar y de un parámetro de auto interacción [45]. Las soluciones se obtienen asumiendo simetría esférica, condiciones de regularidad en el origen, planitud asintótica en el espacio (la planitud asintótica es una propiedad geométrica de un espacio-tiempo en el que la materia está distribuida en una región compacta y a grandes distancias la forma geométrica de la región se aproxima a un espacio-tiempo de Minkowski) y también se asume que el campo escalar es armónico $\Phi(r, t) = \phi(r) \exp[-i\omega t]$ estas soluciones se llaman configuraciones de equilibrio, son regulares y no presentan horizontes de eventos.

La estabilidad de las estrellas de bosones se ha estudiado para valores distintos de λ en [45] y bajo diferentes tipos de perturbaciones (radiales infinitesimales y masivas) y se ha encontrado que existen configuraciones de equilibrio que pueden convertirse en configuraciones estables o colapsar gravitacionalmente a configuraciones con horizontes de sucesos o bien se dispersan. La explicación se toma de [45]

Se tiene que la acción que da lugar a las estrellas de bosones es de la forma:

$$I = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \left[\sqrt{-g} \frac{1}{2} \left(\hbar^2 g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + m^2 c^2 |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^2 \right) \right] \quad . \quad (4.3)$$

Con las ecuaciones de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad , \quad (4.4)$$

donde el tensor de energía-momento es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \hbar^2 (\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi^* + \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\hbar^2 g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi^* + m^2 c^2 |\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2} |\Phi|^2) \quad . \quad (4.5)$$

La dinámica del campo escalar está dada por las ecuaciones de Klein-Gordon.

$$\left(\square - \frac{\lambda}{\hbar^2} |\Phi|^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi = 0 \quad , \quad (4.6)$$

$$\left(\square - \frac{\lambda}{\hbar^2} |\Phi|^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi^* = 0 \quad , \quad (4.7)$$

con

$$\square = (1/\sqrt{-g}) \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu] .$$

Se tiene que la acción es invariante a un cambio de fase $\Phi \rightarrow \Phi e^{i\sigma}$ y entonces existe una corriente de Noether que implica una conservación en el número de partículas

$$j^\nu = \frac{i\hbar}{2c} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Phi^* \partial_\mu \Phi - \Phi \partial_\mu \Phi^*) \quad , \quad (4.8)$$

con el número de partículas siendo:

$$N = \int j^0 d^3x \quad . \quad (4.9)$$

Se tiene que las estrellas de bosones cuentan con simetría esférica y las configuraciones de equilibrio se obtienen al resolver las ecuaciones (4.4), (4.6) y (4.7) y al asumir un campo escalar de la forma:

$$\Phi(r, t) = \phi(r) \exp[-i\omega t] \quad , \quad (4.10)$$

se utiliza también un espacio-tiempo estático con simetría esférica y la métrica de Schwarzschild (que describe el campo gravitatorio para una masa esférica) con un elemento de línea:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad , \quad (4.11)$$

en la ecuación (4.11) α y a son funciones de r y las ecuaciones a resolver son las componentes $\{tt\}$ y $\{rr\}$ de las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuación de Klein-Gordon, entonces se puede formar un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y para resolver el sistema, se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\bar{r} = mr \quad , \quad \bar{t} = \omega t \quad , \quad \bar{\phi} = \sqrt{4\pi G} \phi \quad , \quad \hat{\alpha} = \alpha \frac{m}{w} \quad , \quad \Lambda = \frac{\lambda}{m^2 4\pi G} \quad . \quad (4.12)$$

Entonces se llega al sistema:

$$\sigma = \bar{\phi}' \quad , \quad (4.13)$$

$$\sigma' = \bar{\phi} \left(\frac{a'}{a} - \frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}} - \frac{2}{r} \right) - \bar{\phi} \frac{a^2}{\bar{\alpha}^2} + a^2 (1 + \Lambda \bar{\phi}^2) \bar{\phi} \quad , \quad (4.14)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{1 - a^2}{2\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{2} \left[\bar{\phi}^2 \frac{a^2}{\bar{\alpha}^2} + \sigma^2 + a^2 (\bar{\phi}^2 + \frac{1}{2} \Lambda \bar{\phi}^4) \right] \quad , \quad (4.15)$$

$$\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}} = \frac{a^2 - 1}{\bar{r}} + \frac{a'}{a} - \bar{r} a^2 \bar{\phi}^2 (1 + 1/2 \Lambda \bar{\phi}^2) \quad . \quad (4.16)$$

Las estrellas de bosones son objetos aislados, entonces se tiene que $\bar{\phi}(\bar{r} \rightarrow \infty) = 0$ y las demás cantidades deberían ser finitas en $\bar{r} = 0$ también se busca que las soluciones sean regulares en el origen, para esto se exige que $a(\hat{r} = 0) = 1$ y que todas las demás cantidades sean finitas en $\hat{r} = 0$, en $\bar{r} = 0$ se elige arbitrariamente el valor del campo escalar $\bar{\phi}(\bar{r} = 0) = \phi_0$ y su derivada se hace igual a 0 para garantizar suavidad en el origen.

La masa de las estrellas de bosones se puede calcular si se considera que se tratan de objetos localizados tal que en el vacío su métrica se aproxima asintóticamente a la métrica de Schwarzschild y entonces se tiene:

$$M = \frac{1}{2} \bar{r}_{\max} \left[1 - \frac{1}{a^2(\bar{r}_{\max})} \right] \frac{m_{pl}^2}{m} \quad , \quad (4.17)$$

donde m_{pl} es la masa de Planck y \bar{r}_{\max} es el radio máximo para el cual se resuelven las ecuaciones.

Las estrellas de bosones también se pueden estudiar con las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon si se desea tener en cuenta efectos relativistas como se hace en [46], en [47] se estudian estrellas de bosones con un número $l > 0$ asociado al momento angular y se encuentra que las estrellas de bosones con $l > 0$ presentan un radio más compacto que las estrellas de bosones con $l = 0$. Existen también estudios que analizan estrellas de bosones con multi-estados y estados excitados, en [48] se encuentra que estrellas de bosones de dos estados son estables ante pequeñas perturbaciones radiales, a pesar de que estrellas de bosones de un estado excitado son inestables. En [49] se modelan curvas de rotación galácticas con estrellas de bosones Newtonianas descritas por el sistema Schrödinger-Poisson y a pesar de que este modelo solo tiene dos parámetros libres se encuentra un buen ajuste con los datos experimentales. También se estudian en: [50, 51, 52, 52, 53, 54]. Las estrellas de bosones reproducen curvas de rotación planas con un muy buen ajuste a datos experimentales, como se muestra en la figura 4.1.

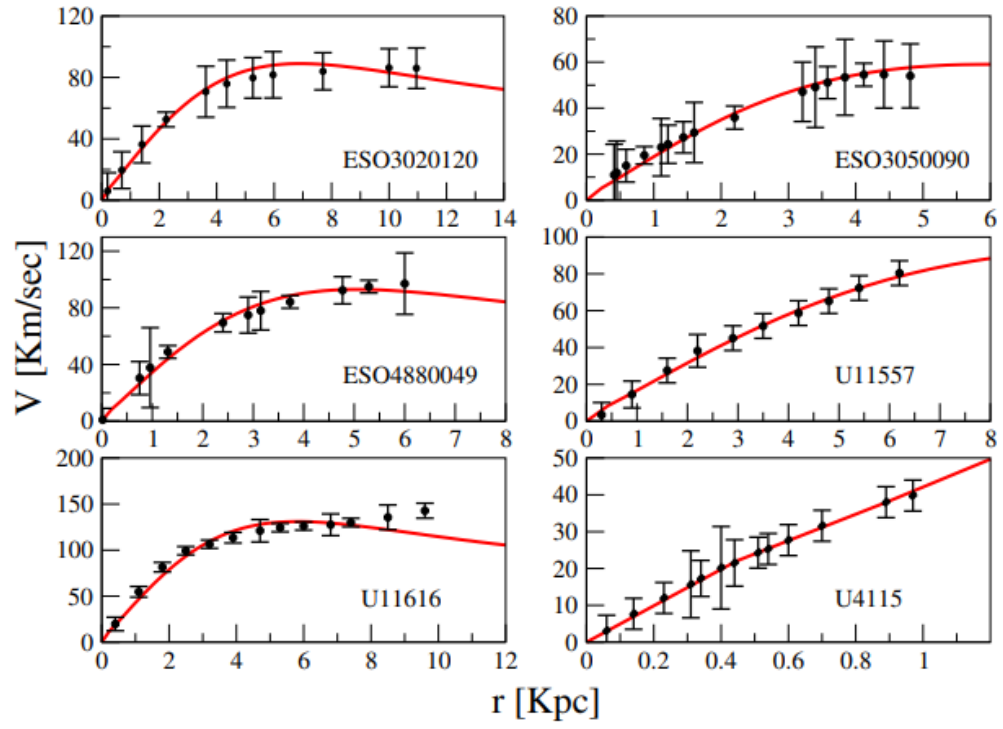


Figura 4.1: Mejor ajuste de perfiles de densidad de estrellas de bosones tomado de [49].

4.2. Derivación del perfil de densidad Bohmer & Harko

Uno de los perfiles de densidad utilizados en este trabajo es el perfil de Bohmer & Harko, este perfil se obtiene de ecuaciones que describen un condensado Bose-Einstein compuesto de partículas ultraligeras de campo escalar. Las ecuaciones dinámicas que describen la evolución del fluido de materia oscura auto gravitante, se pueden escribir en la forma de la ecuación de Schrödinger acoplada a la ecuación de Poisson que describe la gravedad Newtoniana.

En el sistema cuántico de N bosones, la mayoría de ellos se encuentran en el mismo estado cuántico, se puede entonces utilizar directamente el Hamiltoniano del sistema de muchas partículas para realizar el cálculo del estado base, sin embargo, esto puede resultar demasiado costoso, entonces se puede utilizar la aproximación de campo medio para describir el condensado, que involucra separar la contribución del condensado en el operador del campo bosónico.

A continuación se presenta la derivación del perfil de densidad tomada de [55].

Se parte de el Hamiltoniano 4.18 que describe la interacción de los bosones confinados a un potencial externo V_{ext} , está dado en el formalismo para describir sistemas cuánticos de muchos cuerpos en teoría cuántica de campos por:

$$\hat{H} = \int d\vec{r} \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{rot}(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\Psi}^+(\vec{r}) \hat{\Psi}^+(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}') \quad , \quad (4.18)$$

de donde tenemos que $\hat{\Psi}(\vec{r})$ y $\hat{\Psi}^+$ son los operadores de campo de bosones que crean y aniquilan partículas en la posición \vec{r} respectivamente y $V(\vec{r} - \vec{r}')$ es el potencial entre dos cuerpos, V_{rot} es el potencial asociado a la rotación del condensado dado por:

$$V_{rot}(\vec{r}) = f_{rot}(t) \frac{mw^2}{2} r^2 \quad , \quad (4.19)$$

donde w es la velocidad angular del condensado, $f_{rot}(t)$ es una función que tiene en cuenta la posible variación en el tiempo para el potencial rotacional.

Ahora se utiliza la aproximación de campo medio y se tiene que para un gas en un volumen V un BEC ocurre en el estado de una partícula con momento 0: $\Psi_0 = 1/\sqrt{V}$. El operador de campo se reescribe como: $\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sqrt{N/V} + \hat{\Psi}'(\vec{r})$.

Se puede tratar al operador $\hat{\Psi}'(\vec{r})$ como una pequeña perturbación y proceder a primer orden con las excitaciones de los gases Bose.

Se tiene un operador de campo general en la representación de Heisenberg

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \hat{\Psi}'(\vec{r}, t) \quad , \quad (4.20)$$

donde $\psi(\vec{r}, t)$ es el valor de expectación del operador de campo $\psi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \rangle$ o bien la función de onda de el condensado, se trata de un campo clásico con $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ y se tiene la condición de normalización

$$N = \int \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad , \quad (4.21)$$

con N siendo el número de partículas en el condensado. Se tiene entonces que la ecuación de movimiento para el condensado es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{rot}}(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \quad . \quad (4.22)$$

Si se reemplaza a $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ por la función de onda del condensado ψ se llega a la aproximación a orden cero de la ecuación de Heisenberg. En un gas frío y diluido solo las colisiones binarias a bajas energías son relevantes, estas colisiones están caracterizadas por parámetro de longitud de dispersión, entonces es posible reemplazar la interacción partícula-partícula $V(\vec{r}' - \vec{r})$ por la interacción efectiva $\lambda \delta(\vec{r}' - \vec{r})$ en donde la constante de acoplamiento λ esta relacionada con la longitud de dispersión a mediante $\lambda = 4\pi\hbar^2 a/m$. Con el uso del potencial efectivo en la integral de la ecuación (4.22) arroja $\lambda |\psi(\vec{r}, t)|^2$.

Con el objetivo de describir de manera más general los BEC, asumimos un término arbitrario no lineal $g(|\psi(\vec{r}, t)|^2)$ donde

$$\rho = |\psi(\vec{r}, t)|^2 \quad . \quad (4.23)$$

La densidad de probabilidad ρ esta normalizada de acuerdo a $\int d^3\vec{r} \rho = N$.

Entonces llegamos a la ecuación generalizada de Gross-Pitaevskii que describe a un condensado Bose-Einstein rotando es:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{rot}}(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + g'(|\psi(\vec{r}, t)|^2) \right] \psi(\vec{r}, t) \quad . \quad (4.24)$$

La masa de las partículas es m y se asume que V_{ext} es el potencial gravitacional V y satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho_m \quad , \quad (4.25)$$

en donde $\rho_m = m\rho$ es la densidad de masa dentro del BEC.

Las propiedades del BEC descrito por la ecuación (4.22) se pueden entender más fácilmente si se utiliza la representación de Madelung para la función de onda (4.26) con $S(\vec{r}, t)$ siendo la acción.

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\vec{r}, t)\right) \quad , \quad (4.26)$$

sustituyendo (4.26) en (4.24) se puede desacoplar a (4.24) en un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \quad , \quad (4.27)$$

$$\rho_m \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P \left(\frac{\rho_m}{m} \right) - \rho_m \nabla \left(\frac{V_{\text{rot}}}{m} \right) - \rho_m \nabla \left(\frac{V_{\text{ext}}}{m} \right) - \nabla \cdot \sigma^Q \quad , \quad (4.28)$$

donde se introdujo un potencial

$$V_Q = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (4.29)$$

y σ^Q esta asociado con el tensor de esfuerzo del fluido cuántico. La velocidad del fluido cuántico es

$$\vec{v} = \frac{\nabla S}{m}, \quad (4.30)$$

y se denota a la presión del fluido en términos de la densidad de masa $\rho_m = m\rho$ dentro del condensado

$$P \left(\frac{\rho_m}{m} \right) = g' \left(\frac{\rho_m}{m} \right) \frac{\rho_m}{m} - g \left(\frac{\rho_m}{m} \right) \quad . \quad (4.31)$$

El procedimiento anterior es una aproximación de fluidos, al utilizar la representación de Madelung (4.26) se llega a ecuaciones de Euler cuánticas.

Se tiene que el campo de velocidades es irrotacional y satisface $\nabla \times \vec{v} = 0$, el potencial cuántico tiene la propiedad:

$$\rho \nabla_i V_Q = \nabla_j \left(-\frac{\hbar^2}{4m} \rho \nabla_i \nabla_j \ln \rho \right) = \nabla_j \sigma_{ij}^Q \quad , \quad (4.32)$$

donde σ_{ij}^Q es el tensor de energía-momento cuántico que tiene unidades de presión y es una contribución anisotrópica a la ecuaciones de movimiento.

La ecuación de movimiento del BEC ideal llega a tomar la forma de la ecuación de continuidad y de las ecuaciones hidrodinámicas de Euler. Entonces el BEC puede ser descrito como un gas cuya densidad y presión están relacionados por la ecuación de estado barotrópica (4.33) donde a esta asociada a la longitud de dispersión de las partículas,

$$R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}} \quad . \quad (4.33)$$

Entonces para un BEC estático e ideal, se tiene que $\vec{v} = 0$ y entonces de la ecuación (4.28) se obtiene

$$V_Q + V_{\text{rot}} + V_{\text{ext}} + g' = \text{constante} \quad , \quad (4.34)$$

aplicando ∇^2 se tiene

$$\nabla^2(V_Q + V_{\text{rot}} + g') + \nabla^2 V_{\text{ext}} = 0 \quad . \quad (4.35)$$

Para el caso en que el condensado con un término no lineal de la forma $g(\rho_m) = k\rho_m^2/2$ con $k = \sqrt{Gm^3/\hbar^2 a}$ en presencia de un campo gravitacional se tiene que el potencial generalizado $V_{\text{gen}} = -V_Q - V_{\text{rot}} - k\rho_m$ satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V_{\text{gen}} = 4\pi G \rho_m \quad , \quad (4.36)$$

si el potencial cuántico se ignora, la densidad de masa del condensado es descrita por la ecuación tipo Helmholtz

$$\nabla^2 \rho_m + \frac{4\pi G}{k} \rho_m + \frac{w^2}{k} = 0 \quad . \quad (4.37)$$

Ahora, si el número de partículas en el BEC es lo suficientemente grande, el término de presión cuántica se vuelve relevante solamente cerca de la frontera del condensado (es mucho más pequeño que el término de interacción no lineal), por lo tanto, el término del tensor cuántico se puede ignorar, a esta aproximación se le llama aproximación Thomas-Fermi que se usa extensivamente en el estudio de condensados Bose-Einstein, esta aproximación se vuelve más exacta conforme el número de partículas en el condensado aumenta. La aproximación Thomas-Fermi también corresponde al límite clásico, ignorando los términos que incluyen potencias de \hbar o bien en la ecuación de movimiento ignorar los términos con $\nabla\rho$ y ∇S .

Entonces, tenemos que en el BEC todas las cantidades físicas son independientes del tiempo, además si se hace $v_{\text{rot}} = 0$, se llega a que las ecuaciones que describen al condensado en un potencial gravitacional V son:

$$\nabla P\left(\frac{\rho_m}{m}\right) = -\rho_m \nabla\left(\frac{V}{m}\right) \quad , \quad (4.38)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho_m \quad , \quad (4.39)$$

estas ecuaciones se relacionan mediante la ecuación de estado $P = P(\rho_m)$ y con condiciones de frontera apropiadas. Si se asume que el término no lineal en (4.24) es de la forma:

$$g(\rho) = \alpha \rho^\Gamma \quad , \quad (4.40)$$

en donde α y Γ son constantes positivas, sigue que la ecuación de estado para el BEC es la ecuación politrópica:

$$P(\rho_m) = \alpha(\Gamma - 1)\rho_m^\Gamma = K\rho_m^\Gamma \quad , \quad (4.41)$$

donde $K = \alpha(\Gamma - 1)$ y ahora si se escribe a $\Gamma = 1 + 1/n$ con n siendo un índice politrópico y entonces la estructura del BEC es descrita por la ecuación Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0 \quad , \quad (4.42)$$

donde θ es una variable adimensional que sigue $\rho_{cm} = \rho_{cm} \theta^n$ y ξ es adimensional y sigue $r = \left[\frac{(n+1)\alpha}{4\pi Gn} \right]^{1/2} \rho_{cm}^{(1-n)/2} \xi$ y ρ_{cm} es la densidad de masa central del condensado. Entonces el radio y la masa del condensado están dados por (4.43) y (4.44) respectivamente.

$$R = \left[\frac{(n+1)\alpha}{4\pi Gn} \right]^{1/2} \rho_{cm}^{(1-n)/2} \xi_1 \quad , \quad (4.43)$$

$$M = 4\pi \left[\frac{(n+1)\alpha}{4\pi Gn} \right]^{3/2} \rho_{cm}^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\theta'(\xi)| \quad , \quad (4.44)$$

y ξ_1 define la presión 0 y la densidad 0 en $\theta(\xi_1) = 0$.

En la aproximación estándar de condensados Bose-Einstein, el término no lineal es:

$$g(\rho) = \frac{u_0}{2} |\psi|^4 = \frac{u_0}{2} \rho^2 \quad , \quad (4.45)$$

donde $u_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ y la ecuación de estado es:

$$P(\rho_m) = U_0 \rho_m^2 \quad , \quad (4.46)$$

con:

$$U_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m^3} \quad . \quad (4.47)$$

Entonces la solución a la ecuación $\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^n = 0$ se puede obtener de manera analítica y es

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi} \quad , \quad (4.48)$$

entonces, de la ecuación 4.48 y re introduciendo unidades de (4.42) se obtiene la distribución de la densidad de materia oscura en condensado Bose-Einstein y se tiene:

$$\rho_{BH}(r) = \rho_0 \frac{\sin kr}{kr} \quad . \quad (4.49)$$

La ecuación (4.49) es el perfil de densidad de Bohmer y Harko, este perfil evita el problema de cusp-core presente en el perfil NFW y la naturaleza ondulatoria del condensado evita la formación de estructura para tamaños más pequeños que la longitud de onda del condensado (debido al principio de incertidumbre) solucionando así el problema de la formación de estructura de pequeña escala que presenta el modelo Λ CDM.

Capítulo 5

Perfiles de Densidad

En esta sección se explican los perfiles de densidad utilizados en este trabajo. Se ajustaron parámetros de 5 perfiles de densidad, los perfiles de densidad son funciones que dependen del radio y describen la densidad del halo galáctico de materia oscura. De los 4 perfiles de densidad utilizados, los perfiles Psuedo-Isotérmico y de Einasto son perfiles empíricos.

5.1. Perfil de Bohmer y Harko

Los modelos de gravedad modificada reproducen curvas de rotación planas, sin embargo, no son suficientes para explicar todas las observaciones que indican la existencia de materia oscura y el modelo estándar de la cosmología también tiene problemas que no se pueden ignorar, el perfil Bohmer & Harko [55] nace de el modelo de materia oscura de campo escalar y busca reproducir curvas de rotación planas que eviten el problema del cusp-core. El perfil se obtiene de las ecuaciones no relativistas Gross-Pitaevskii [56] al usar la representación de Madelung de la función de onda y de realizar la aproximación por fluidos. El perfil Bohmer y Harko es.

$$\rho_{BH}(r) = \rho_0 \frac{\sin kr}{kr} \quad , \quad (5.1)$$

en la ecuación (5.1) $k = \sqrt{Gm^3/\hbar^2 a}$, a es la longitud de dispersión y $\rho_0 = \rho_{BH}(0)$ es la densidad central del condensado. El perfil de masa del Halo galáctico asumiendo simetría esférica es $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2 dr$, entonces se llega a

$$M_{BH}(r) = \frac{4\pi\rho_0}{k^2} r \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) \quad , \quad (5.2)$$

entonces a partir de la ecuación (5.2) es posible llegar a la velocidad orbital de una partícula de prueba moviéndose en el Halo galáctico utilizando $v^2(r) = \frac{GM(r)}{r}$,

$$v_{orb}(r) = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0}{k^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right)} \quad . \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) es la ecuación a la cual se ajustaron las curvas de rotación experimentales. Los parámetros libres son k y ρ_0

Se tiene que para $r \rightarrow 0$, $v_{orb}^2 \rightarrow 0$ y en la frontera del Halo R_{BH} , la densidad del BEC es despreciable, $\rho_{BH}(R_{BH}) = 0$ y $kr \rightarrow \pi$, estas condiciones dan el radio del condensado como

$$R_{BH} = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{G m^3}} \quad . \quad (5.4)$$

La masa total del condensado es

$$M_{BH} = m_{BH}(R_{BH}) = \frac{4}{\pi} R_{BH}^3 \rho_0 \quad . \quad (5.5)$$

Al igual que las curvas de rotación observadas son planas, el perfil Bohmer & Harko arroja una velocidad orbital cerca de la frontera del condensado que tiende a una constante dada por

$$v_{orb}^2(R) = \frac{4G\rho_0 R_{BH}^2}{\pi} \quad . \quad (5.6)$$

5.2. Perfil Navarro-Frenk-White

El perfil NFW es un perfil de densidad que describe la distribución espacial de masa de materia oscura fría en halos galácticos, este perfil fue construido a partir de simulaciones de N-cuerpos utilizando, mecánica Newtoniana y el modelo Λ CDM por Julio Navarro, Carlos Frenk y Simon White [57]. Los perfiles de densidad de materia oscura en los cúmulos de galaxias se pueden medir directamente mediante lentes gravitacionales y concuerdan bien con los perfiles NFW predichos [58].

El perfil NFW viene dado por:

$$\rho_{NFW}(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left(1 + \frac{r}{R_s}\right)^2} \quad , \quad (5.7)$$

de donde ρ_0 y R_s varían con cada Halo y son los parámetros ajustados, siendo ρ_0 la densidad del universo al momento de que el Halo colapsará y R_s^2 el radio característico. La masa dentro de el radio máximo R_{max} es:

$$M = \int_0^{R_{max}} 4\pi r^2 \rho(r) dr = 4\pi \rho_0 R_s^3 \left(\ln \left(\frac{R_s + R_{max}}{R_s} \right) + \frac{R_s}{R_s + R_{max}} - 1 \right) \quad , \quad (5.8)$$

si tomamos el borde del halo como el radio virial, R_{vir} que está relacionado con el "parámetro de concentración" c , y el radio de escala a través de:

$$R_{vir} = cR_s \quad , \quad (5.9)$$

el valor específico de c es aproximadamente 10 o 15 para la Vía Láctea y puede variar entre 4 y 40 para halos de diferentes tamaños. La masa dentro de un radio virial:

$$M = 4\pi\rho_0 R_s^3 \left(\ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \right) \quad , \quad (5.10)$$

esto se puede usar para definir un halo de materia oscura en términos de su densidad media:

$$\rho(r) = \frac{\rho_{halo}}{3A_{NFW}x(c^{-1} + x)^2} \quad , \quad (5.11)$$

con la densidad promedio del halo siendo:

$$\rho_{halo} = \frac{M}{(4/3\pi R_{vir}^3)} \quad , \quad (5.12)$$

$$A_{NFW} = \ln(1+c) - \frac{c}{1+c} \quad , \quad (5.13)$$

$$x = \frac{r}{R_{vir}} \quad . \quad (5.14)$$

El perfil NFW cuenta con dos parámetros libres: R_s y ρ_0 que son los parámetros ajustados para cada una de las 26 curvas de rotación de las galaxias de bajo brillo superficial estudiadas.

Las curvas de rotación generadas por el perfil NFW se obtienen integrando la ecuación (5.7) respecto al radio y se obtiene la ecuación (5.15).

El perfil NFW cuenta con dos parámetros libres: R_s y ρ_0 que son los parámetros ajustados para cada una de las 26 curvas de rotación de las galaxias de bajo brillo superficial estudiadas.

Las curvas de rotación generadas por el perfil NFW se obtienen integrando la ecuación (5.7) respecto al radio y se obtiene la velocidad orbital (5.15)

$$v_{orb} = \sqrt{4\pi G \rho_0 R_s^3} \sqrt{1/r \left[\ln(1 + r/R_s) - \frac{r/R_s}{1 + r/R_s} \right]} \quad . \quad (5.15)$$

Las observaciones de regiones internas de galaxias brillantes como la Vía Láctea y M31 (galaxia Andrómeda) parecen ser compatibles con el perfil NFW, pero esto está abierto a debate. El perfil de materia oscura de NFW no es consistente con las observaciones de regiones internas de las galaxias de bajo brillo superficial, que tienen menos masa central de lo previsto. Esto se conoce como el "core cusp problem". Actualmente se debate si esta discrepancia es consecuencia de la naturaleza de la materia oscura o de los procesos dinámicos durante la formación de galaxias.

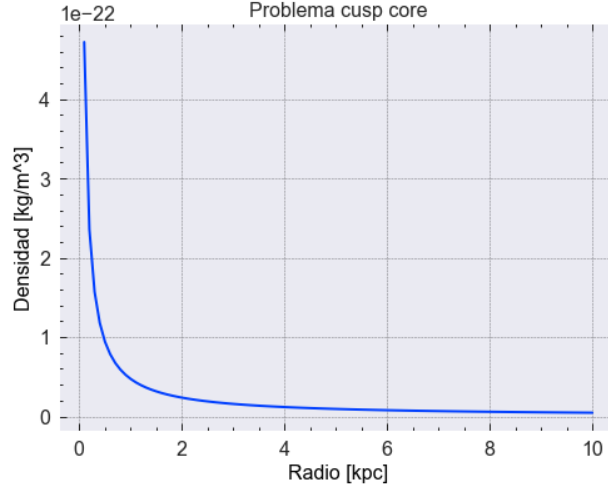


Figura 5.1: Comportamiento del perfil de densidad NFW a radios pequeños

En la Figura 5.1 se observa, el problema cusp-core presente en el modelo Λ CDM, calculamos el límite de r tendiendo a 0 en la ecuación (5.7) y observamos que la densidad crece dramáticamente, es decir existe un pico en la densidad central. Para realizar esta gráfica se utilizaron los parámetros del Halo de materia oscura de la galaxia ESO3020120.

5.3. Perfil Pseudo-isotérmico

El perfil Pseudo-isotérmico [59] es un perfil empírico que asume que el Halo tiene una distribución esférica con una densidad aproximadamente igual a la de una esfera isotérmica y cuenta con dos parámetros independientes, que son: R_c y ρ_0^{PI} ; el perfil de densidad está dado por la ecuación (5.16).

$$\rho(r) = \frac{\rho_0^{PI}}{1 + (r/R_c)^2} \quad , \quad (5.16)$$

donde R_c es el radio de escala y ρ_0^{PI} es la densidad central del Halo. La velocidad orbital como función del radio viene dada por:

$$v(r)_{orb} = \sqrt{4\pi G \rho_0^{PI} R_c^2} \left(1 - \frac{R_c}{r} \arctan \left(\frac{r}{R_c} \right) \right) \quad . \quad (5.17)$$

Existen perfiles de densidad tipo cusp, que presentan picos en la densidad central como el perfil NFW y perfiles de densidad tipo core, con una densidad central plana, el perfil pseudo-isotérmico es un perfil tipo core y su densidad sigue: $\rho \propto r^{-2}$.

5.4. Perfil de Einasto

El perfil de Einasto [60] al igual que los demás perfiles de densidad describe como varía la densidad de un sistema esférico respecto a la distancia a su centro, este perfil de densidad es empírico y cuenta con 3 parámetros independientes a diferencia de los perfiles NFW, B&H y perfil pseudo-isotérmico que cuentan solamente con dos parámetros independientes. Se ha encontrado [61] que el perfil de Einasto se ajusta mejor a galaxias observadas que perfiles de densidad de 2 parámetros y se ha sugerido como el nuevo perfil de densidad de materia oscura estándar al comparar el ajuste a curvas de rotación [62]. Para obtener curvas de rotación o bien la velocidad orbital, es necesario realizar integrales numéricas. El perfil de Einasto esta dado por:

$$\rho(r) = \rho_s \exp \left(-dn \left(\left(\frac{r}{r_s} \right)^{1/n} - 1 \right) \right) , \quad (5.18)$$

donde: r_s es el radio de la esfera que contiene la mitad de la masa total, ρ_s es la densidad de masa en $r = r_s$, dn es una constante que ajusta la mitad de la masa a r_s , n es un número mayor a cero llamado el índice de Einasto, el perfil de Einasto puede exhibir comportamiento tipo cusp y tipo core dependiendo del valor de n , índices grandes $n > 4$ corresponden a comportamiento tipo cusp y $n < 4$ corresponde a perfil tipo core. En el contexto de un halo de materia oscura:

$$\rho(r) = \rho_2 \exp \left(-2n \left(\left(\frac{r}{r_2} \right)^{1/n} - 1 \right) \right) , \quad (5.19)$$

donde ρ_2 y r_2 corresponden a un crecimiento que sigue: $\rho(r) \propto r^{-2}$.

5.5. Perfil de densidad de Bohmer y Harko modificado

En la derivación del perfil de densidad de Bohmer y Harko se realizan varias aproximaciones y se ignora un término involucrado a un potencial cuántico que se vuelve relevante cerca de la frontera del condensado. El perfil B&H falla en ajustarse bien en galaxias grandes con núcleos brillantes. Con los puntos anteriores como motivación, buscamos proponer una modificación al perfil de B&H para tener un perfil de densidad de materia oscura de campo escalar generalizado que pueda describir un mayor número de galaxias.

La masa como función del radio es:

$$M(r) = \frac{4\pi\rho_k}{k^2} \ln \left(1 + \frac{r}{R_k} \right)^2 \left(\frac{\sin(kr)}{(kr)} - \cos(kr) \right) , \quad (5.20)$$

con $k = \sqrt{Gm^3/\hbar^2 a}$, a siendo longitud de dispersión, ρ_k siendo la densidad central del condensado y R_k siendo un radio crítico en el que términos ignorados al derivar el perfil

de Bohmer& Harko son relevantes. La velocidad orbital al cuadrado siendo:

$$v^2(r) = \ln \left(1 + \frac{r}{R_k} \right) \sqrt{\frac{4\pi G \rho_k}{k^2} \left(\frac{\sin(kr)}{(kr)} - \cos(kr) \right)} \quad . \quad (5.21)$$

Capítulo 6

Datos Utilizados

Los datos experimentales utilizados en este trabajo fueron publicados en [1], estos datos se obtuvieron con los telescopios du Pont de 2.5m (Las Campanas Observatory) y el telescopio Mayall de 4m (Kitt Peak Observatory). En [1] se observaron 50 galaxias de bajo brillo superficial de las cuales 36 son de suficiente calidad para generar curvas de rotación y para el ajuste de parámetros de este trabajo, se escogieron los datos de 26 galaxias con la mejor calidad en las observaciones.

Al observar una galaxia se tiene que un lado de ella las estrellas polvo y gas se alejan de la Tierra debido a la rotación de la galaxia y por lo tanto existe un corrimiento al rojo, mientras que del otro lado giran en la otra dirección, es decir, se acercan y presentan un corrimiento al azul y se toma el centro galáctico como referencia para tener en cuenta la velocidad y corrimiento de la galaxia en general. Los datos observados de las galaxias pueden y suelen ser asimétricos entre sí (respecto al centro galáctico) por lo tanto para construir las curvas de rotación se tiene que el centro galáctico esta bien definido por la coincidencia en el pico en la emisión de $H\alpha$ con el pico en las líneas de emisión de estrellas en el núcleo galáctico, entonces se promedian los datos de ambos lados del centro galáctico para tener una velocidad orbital, debido a lo anterior, la incertidumbre se estima solamente en el eje y o bien el eje de la velocidad orbital la incertidumbre proviene de errores en la medición, inclinación e incertidumbres asimétricas.

6.1. Hipótesis de disco mínimo

Los datos utilizados son de galaxias de bajo brillo superficial, este tipo de galaxias son de especial interés ya que se cree que este tipo de galaxias están constituidas principalmente de materia oscura como se argumenta en [1, 63].

La densidad superficial máxima de estrellas en las galaxias de bajo brillo superficial es típicamente menor a $100M_{\odot}\text{pc}^{-2}$ [64], sin embargo presentan velocidades orbitales terminales comparables con esas galaxias de mayor brillo superficial, entonces ambos tipos de galaxias siguen la misma relación Tully-Fisher, esto se interpreta como que las galaxias de bajo brillo superficial son dominadas por la componente de masa de la materia oscura en el Halo galáctico. La relación Tully-Fisher [65] es una relación empírica entre la luminosidad

intrínseca L o masa de una galaxia espiral y su tasa de rotación W , con α siendo una constante mayor a 0

$$L \propto W^\alpha \quad , \quad (6.1)$$

entonces esta falta de dependencia de punto cero de galaxias de diferentes brillos superficiales a la relación Tully-Fisher se interpreta como el hecho de que la materia oscura es la componente dominante en las curvas de rotación galácticas a todos los valores del radio.

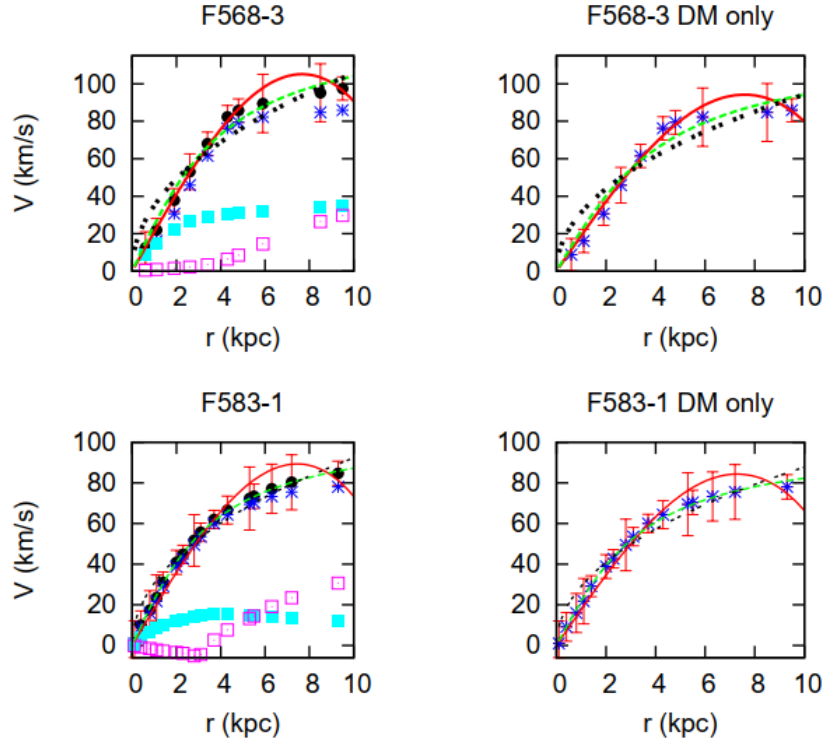


Figura 6.1: Curvas de rotación de las galaxias F568-3 y F583-1 en donde se muestran las diferentes contribuciones a las curvas de rotación.

En la Figura 6.1 tomada de [66] se nota como la contribución de la materia bariónica es muy pequeña y la diferencia en los ajustes tomando solo materia oscura y tomando materia bariónica con materia oscura es mínima. Los puntos negros con barras de error son los datos observados, la materia oscura se muestra en asteriscos azules, la componente del disco galáctico se muestra en cuadrados cían y la contribución del gas en cuadrados magenta; las curvas de rotación de la izquierda tienen ajuste de tres perfiles de densidad asumiendo válida la hipótesis de disco mínimo y en las curvas de la derecha se ignora la contribución de bariones y solo se toma en cuenta la contribución de materia oscura.

Capítulo 7

Metodología

El ajuste de parámetros se realizó computacionalmente en Python utilizando el algoritmo MCMC afín invariante [67] implementado en Python con emcee en [68].

7.1. Regresión no lineal por mínimos Cuadrados

Para comparar modelos teóricos, uno busca utilizar herramientas matemáticas para estudiar el ajuste entre observaciones y las ecuaciones de los modelos teóricos, aquí entra en juego una de las pruebas más utilizadas para saber que ecuación o modelo se ajusta mejor a un conjunto de datos experimentales y se trata de la prueba de χ^2 , se trata de una medida de la discrepancia entre datos experimentales que denotaremos como O_n y un modelo teórico M_n teniendo en cuenta el error en los datos experimentales σ :

$$\chi^2 = \sum_n \frac{(O_n - M_n)^2}{\sigma_n^2} . \quad (7.1)$$

Entre mas pequeño es el valor de χ^2 mejor es el ajuste de un modelo al conjunto de datos, sin embargo, 3 de los perfiles cuentan con dos parámetros libres (NFW, Pseudo-Isotérmico y B&H) y 1 perfil (Einasto) cuenta con 3 parámetros libres, por lo tanto queremos tener en cuenta los grados de libertad de los 4 diferentes modelos y el peso de los errores en los datos al momento de comparar los ajustes, entonces usamos la ecuación (7.2) donde i es el número de observaciones y j es el número de parámetros.

$$\chi^2_\nu = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{\chi^2}{i - j} , \quad (7.2)$$

con la ecuación (7.2) se compararon los ajustes de los 4 perfiles de densidad en las 26 galaxias y se reportaron estos resultados en la tabla de ajuste por mínimos cuadrados en el anexo.

Para comparar el perfil de densidad con mejor ajuste a las observaciones, es necesario encontrar los parámetros óptimos para cada galaxia, es decir los parámetros que arrojen un valor mínimo de χ^2 para encontrar dichos parámetros es posible realizar una regresión no lineal por mínimos cuadrados, este método nos arroja un punto para cada parámetro, sin embargo, este método puede no ser la mejor alternativa debido a que los parámetros que

se encuentran pueden no ser los mejores, debido a aproximaciones intrínsecas en el método que son explicadas en el Anexo, por lo tanto se recurrió a métodos de Monte Carlo, estos métodos nos arrojan no un punto para los parámetros óptimos, si no, una región de mayor probabilidad para los parámetros, así podemos estudiar las regiones a donde converge el método, tomando pasos entre estados lo suficientemente pequeños para así garantizar los mejores parámetros posibles con una muy buena exactitud. Los métodos de Monte Carlo son de gran interés debido a su versatilidad y debido al hecho que pueden ser utilizados para modelos complicados y con muchos parámetros independientes, en los cuales no es posible o práctico utilizar el método de mínimos cuadrados. El algoritmo MCMC utilizado en este trabajo requiere que se proponga un estado inicial para los parámetros (región en el espacio de parámetros donde creemos a priori que se encuentra la región de mayor probabilidad), entonces para ahorrar tiempo de computo se utilizaron los valores de parámetros óptimos arrojados por una regresión no lineal por mínimos cuadrados como valores iniciales para el algoritmo, en muchos casos el algoritmo MCMC arrojó mejores parámetros y en muchos otros arrojó el mismo valor a 5 cifras decimales. En el anexo se pueden encontrar la tabla de los mejores ajustes de mínimos cuadrados.

7.2. Monte Carlo vía cadenas de Markov afín invariante.

El método Monte Carlo vía cadenas de Markov afín invariante es el algoritmo implementado en python por emcee y fue utilizado para ajustar los parámetros de los perfiles de densidad de materia oscura; para explicar este método es necesario explicar varios conceptos de estadística Bayesiana tomados de [69, 70, 71].

Los métodos de Markov-Chain Monte Carlo son un conjunto de técnicas computacionales basadas en el muestreo aleatorio y empleadas para hallar soluciones aproximadas de una gran variedad de problemas que surgen en diversos campos de la ciencia. Los métodos MCMC (Markov-Chain Monte Carlo) son un proceso inherentemente Bayesiano que permiten generar muestras de distribuciones de probabilidad a posterior y poder estimar cantidades de interés aprovechando la convergencia de una cadena o varias cadenas de Markov.

Muchos problemas en cosmología, en astrofísica y en la física en general han implementado algoritmos MCMC, para estimar parámetros o resolver integrales numéricas, muchos modelos suelen ser muy costosos de calcular computacionalmente, además, es posible que existan muchos parámetros libres, para estos casos es de gran utilidad apoyarse en los algoritmos MCMC, en el caso de este trabajo el uso de métodos MCMC sirvió para garantizar la exactitud en los parámetros.

Algoritmo Metropolis Hastings

El algoritmo Metropolis Hastings (nombrado por Metropolis et al. (1953), [72] y Hastings (1970), [73]) es uno de los algoritmos derivados de los métodos MCMC más utilizados, el algoritmo Metropolis Hastings es un algoritmo de muestreo que busca explorar un espacio de estados utilizando una cadena de Markov que se mueve de acuerdo a una probabilidad de transición de manera que se arrojan estados cada vez más probables, hasta que se converge a los valores más probables del espacio de parámetros, que para este trabajo fueron los parámetros de los perfiles de densidad. La razón de la popularidad del algoritmo Metropolis Hastings [74] se debe a su simplicidad, a su versatilidad y al hecho de que provee “atajos” en casos donde algoritmos genéricos de muestreo pueden tener problemas y ser más lentos en comparación.

Las cadenas de Markov construyen una distribución de probabilidad posterior de manera progresiva explorando el espacio de estados X hasta que todas las regiones de interés se han evaluado y la cadena llega a una distribución estacionaria.

Consideremos la distribución de probabilidad objetivo \mathcal{P} definida en un espacio de estados X y que es computable hasta una constante, $\mathcal{P}(x) \propto \hat{\mathcal{P}}(x)$, entonces el algoritmo propone construir una cadena de Markov ergódica y estacionaria respecto a \mathcal{P} en \mathcal{X} , es decir, si $X^{(t)} \approx \mathcal{P}(x)$, entonces $X^{(t+1)} \approx \mathcal{P}(x)$ y por lo tanto converge hacia \mathcal{P} .

Es necesario también considerar una densidad condicional (Kernel candidato) q y la transición de un valor a otro de la cadena $X(t)$ al tiempo t y su valor al tiempo $t + 1$ y dado $X^t = x^t$ el algoritmo Metropolis Hastings en pseudo-código sigue:

-
- 1.- Tomar una propuesta $Y \approx Q(Y; X(t))$
 - 2.- $q \leftarrow [p(Y)Q(X(t)); Y]/[p(X(t))Q(Y; X(t))]$
 - 3.- $r \leftarrow R \approx [0, 1]$
 - 4.- **if** $r \leq q$ **then**
 - 5.- $X(t + 1) \leftarrow Y$
 - 6.- **else**
 - 7.- $X(t + 1) \leftarrow X(t)$
 - 8.- **end if**

Es decir, dada la posición $X(t)$ se toma una muestra Y de la distribución de transición $Q(Y; X(t))$ y se acepta la muestra con probabilidad:

$$\rho(x, y) = \min \left(\frac{\hat{\mathcal{P}}(y) q(x|y)}{\hat{\mathcal{P}}(x) q(y|x)}, 1 \right).$$

La transición conserva a \mathcal{P} estacionaria si la cadena es irreducible, o bien, si q es lo suficientemente probable como para alcanzar cualquier región de X . Si q siempre es positiva, el hecho de contar con un paso tipo acepto-rechazo nos permite convertir la densidad de probabilidad condicional q a una generación que preserve a \mathcal{P} como una distribución de probabilidad estacionaria.

El algoritmo Metropolis-Hastings puede presentar desventajas debido al hecho de que las muestras están correlacionadas y un conjunto de muestras cercanas estarán correlacionadas unas con las otras y estas no serán un reflejo correcto de la distribución, entonces uno puede encontrarse con el problema de que el tamaño del muestreo efectivo puede ser significativamente más pequeño que el número de muestras en realidad tomadas, lo anterior puede llevar a errores importantes. Se espera que el algoritmo converga si $t \rightarrow \infty$ por lo que el tiempo de convergencia puede ser lento comparado con otros algoritmos, se prefiere un tiempo de convergencia pequeño debido a la reducción del costo computacional con un número pequeño de iteraciones al computar probabilidades necesarias para un buen grado de exactitud.

7.2.1. MCMC afín invariante

El algoritmo Metropolis-Hastings (revisar anexo para una explicación más completa de los métodos de Monte Carlo) es de gran importancia y utilidad en la inferencia Bayesiana, sin embargo, el método derivado de MCMC utilizado en este trabajo fue el algoritmo MCMC afín invariante implementado en Python con la paquetería emcee. La idea general del algoritmo emcee es parecida a la del algoritmo Metropolis-Hastings y como su nombre lo indica, se utilizan cadenas de Markov donde el desempeño del algoritmo no se ve afectado por transformaciones afines en el espacio; este algoritmo es sencillo de construir y puede ser más eficiente que algoritmos MCMC tradicionales en distribuciones sesgadas, además de que ha sido ampliamente probado y utilizando en diversos trabajos. El algoritmo fue propuesto por: Jonathan Goodman y Jonathan Weare en 2010, [67] y fue implementado en Python por: Daniel Foreman-Mackey et al. en 2013, [68].

Si consideramos una densidad de probabilidad de la forma:

$$\mathcal{P}_\lambda(x) = \lambda^{-n} \mathcal{P}(\lambda x) \quad , \quad (7.3)$$

se encuentra que para valores de λ muy grandes o muy pequeños, los algoritmos de muestreo tradicionales pueden tener dificultades, por lo tanto es útil utilizar algún algoritmo de muestreo en donde la densidad \mathcal{P}_λ sea independiente de λ , es entonces que Jonathan Goodman y Jonathan Weare proponen una familia de algoritmos de muestreo MCMC que cuentan con la propiedad de ser afines invariantes a transformaciones, una transformación afín invariante es un mapeo invertible de $\mathbb{R}^{(n)}$ a $\mathbb{R}^{(n)}$ de la forma $y = Ax + b$ y si X tiene densidad de probabilidad $\mathcal{P}(x)$, entonces $Y = AX + b$ tiene una densidad de probabilidad:

$$\mathcal{P}_{A,b}(y) = \mathcal{P}_{A,b}(Ax + b) \propto \mathcal{P}(x) \quad . \quad (7.4)$$

Consideremos que los algoritmos de muestreo MCMC generales pueden describirse de la forma:

$$X(t+1) = R(X(t), \xi(t), \mathcal{P}) \quad , \quad (7.5)$$

donde $X(t)$ es el estado o la muestra después de t iteraciones, $\xi(t)$ es la secuencia de variables aleatorias independientes y distribuidas idénticamente y \mathcal{P} es la densidad de probabilidad. Este tipo de algoritmos se consideran afín invariantes si al aplicarle cualquier transformación del tipo $Ax + b$ tenemos:

$$R(Ax + b, \xi(t), \mathcal{P}_{A,b}) = AR(x(t), \xi(t), \mathcal{P}) + b \quad , \quad (7.6)$$

para todo x .

Como ya sabemos, un paso en el ensamble de cadenas de Markov es de la forma $X(t) \rightarrow X(t+1)$ y constituye un ciclo en todos los L caminadores del ensamble, o bien, para cada $k = 1, \dots, L$, se actualiza $X_k(t) \rightarrow X_k(t+1)$ y cada caminador X_k se actualiza teniendo en cuenta las posiciones de todos los demás caminadores en el ensamble, todos los caminadores excepto X_k forman un ensamble complementario:

$$X_{[k]}(t) = \left(X_1(t+1), \dots, X_{k-1}(t+1), X_{k+1}(t), \dots, X_L(t) \right) \quad . \quad (7.7)$$

Sea $\mu(d\hat{x}_k, x_k | x_{[k]})$ el kernel de transición y para cada $x_k \in \mathbb{R}^n$ y $x_{[k]} \in \mathbb{R}^{(L-1)n}$, $\mu(\cdot, x_k | x_{[k]})$ es la probabilidad de $X_k(t+1)$ dado que $X_k(t) = x_k$ y $X_{[k]}(t) = x_{[k]}$.

Cada uno de los caminadores se mueve de acuerdo a un re muestreo parcial de manera que la transformación $X(t) \rightarrow X(t+1)$ se conserva la distribución conjunta $\hat{\mathcal{P}}$ si cada caminador se mueve $X_k(t) \rightarrow X_k(t+1)$ conserva la distribución condicional x_k dado $X_{[k]}$, entonces $\mu(\cdot, \cdot | x_{[k]})$ conserva $\mathcal{P} \forall x_{[k]}$ entonces los caminadores son independientes y cada valor propuesto para X_k se rechaza o se acepta.

A este tipo de “pasos” se les llama “stretch moves”. El algoritmo progresa simultáneamente el ensamble de caminadores $S = \{X_k\}$ donde la distribución propuesta para un caminador k está basada en la posición de los caminadores en el ensamble complementario $S_{[k]} = \{X_j \forall j \neq k\}$. La “posición” se refiere a un vector en el espacio N -dimensional del espacio de parámetros. Para mover un caminador en la posición X_k , se toma un caminador X_j aleatoriamente de los caminadores restantes $S_{[k]}$ y se propone la nueva posición:

$$X_k(t) \rightarrow Y = X_j + Z \left(X_k(t) - X_j \right) \quad , \quad (7.8)$$

con Z siendo una variable aleatoria de la distribución $g(Z = z)$, si la propuesta se acepta, se satisface la condición de balance detallado y la probabilidad de aceptación es:

$$q = \min \left(1, Z^{N-1} \frac{p(Y)}{p(X_k(t))} \right) \quad , \quad (7.9)$$

con N siendo la dimensión del espacio de parámetros, el proceso anterior se repite para cada uno de los caminadores del ensamble, una de las cosas más importantes del algoritmo es que la distribución de caminadores en el ensamble complementario lleva consigo información útil sobre la densidad \mathcal{P} esto adapta cada “paso” para llegar a la distribución objetivo.

Algoritmo stretch move (actualización de un paso en pseudo-código):

- 1.- **for** $k = 1, \dots, K$
- 2.- Tomar un X_j aleatorio del ensamble $S_{[k]}(t)$
3. $z \leftarrow Z \approx g(z)$, $g(z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} & \text{if } z \in \left(\frac{1}{a}, a\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- 4.- $Y \leftarrow X_j + z[X_k(t) - X_j]$
- 5.- $q \leftarrow z^{N-1}p(Y)/p(X_k(t))$
- 6.- $r \leftarrow R \approx [0, 1]$
- 7.- **if** $r \leq q$, $q = \min\left(1, Z^{N-1} \frac{p(Y)}{p(X_k(t))}\right)$ **then**
- 8.- $X_k(t+1) \leftarrow Y$
- 9.- **else**
- 10.- $X_k(t+1) \leftarrow X_k(t)$
- 11.- **end if**
- 12.- **end for**

En el paso 3, a es un parámetro de escala y la línea 5 suele ser computacionalmente costosa, para remediar lo último, podemos dividir el ensamble total en: $(S^{(0)} = \{X_k, \forall k = 1, \dots, K/2\})$ y $S^{(1)} = \{X_k, \forall K/2 + 1, \dots, K\}$, al mismo tiempo podemos actualizar a todos los caminadores en $S^{(0)}$ utilizando el algoritmo stretch move basándonos en las posiciones de los caminadores en $S^{(1)}$ esto elimina el bucle interno ya que este se puede correr en paralelo, a este nuevo algoritmo se le llama The parallel stretch move.

The parallel stretch move (Pseudo-código)

- 1.- **for** $i \in \{0, 1\}$
- 2.- **for** $k = 1, \dots, K/2$

- 3.- //Este bucle se puede hacer en paralelo para toda k
- 4.- Tomar un X_j aleatorio del ensamble $S^{(\sim i)}(t)$
- 5.- $X_k \leftarrow S_k^{(i)}$
- 6.- $z \leftarrow Z \sim g(z), g(z) \propto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} & \text{if } z \in \left(\frac{1}{a}, a\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- 7.- $Y \leftarrow X_j + z[X_k(t) - X_j]$
- 8.- $q \leftarrow z^{n-1}p(Y)/p(X_k(t))$
- 9.- $r \leftarrow R \sim [0, 1]$
- 10.- **if** $r \leq q = \min\left(1, Z^{N-1} \frac{p(Y)}{p(X_k(t))}\right)$ **then**
- 11.- $X_k(t + 1/2) \leftarrow Y$
- 12.- **else**
- 13.- $X_k(t + 1/2) \leftarrow X_k(t)$
- 14.- **end if**
- 15.- **end for**
- 16.- $t \leftarrow t + 1/2$
- 17.- **end for**

Definir la convergencia y juzgar el desempeño de un algoritmo pueden ser problemas difíciles de resolver, sin embargo, podemos utilizar el tiempo de autocorrelación y la fracción de aceptación que son herramientas con la cuales podemos cuantificar el desempeño del algoritmo. La fracción de aceptación a_f es como su nombre lo indica, la fracción de pasos propuestos que son aceptados, no hay ningún consenso sobre cual es la tasa de pasos aceptados ideal, pero es evidente que si $a_f \sim 0$, casi todos los pasos propuestos son rechazados, esto quiere decir que la cadena tendrá un número de muestras independientes muy pequeño y por lo tanto el muestreo no será una buena representación de la densidad objetivo, por otro lado si $a \sim 1$, casi todos los pasos son aceptados y entonces la cadena se movió de manera aleatoria sin considerar la distribución objetivo y de nuevo el muestreo no es representativo de la distribución posterior.

El tiempo de autocorrelación es una medida de el número de evaluaciones de la función de densidad de probabilidad posterior que se requieren para producir muestras indepen-

dientes y entre más grande es el tiempo de autocorrelación, más muestras se tomaron para producir un muestreo representativo de la densidad objetivo. La paquetería emcee cuenta con funciones integradas para calcular tanto el tiempo de autocorrelación, como la fracción de aceptación.

La varianza de un muestreo de N muestras $\theta^{(n)}$ de $p(\theta)$ es

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \text{Var}_{p(\theta)}[f(\theta)] \quad , \quad (7.10)$$

y el error decrece como $1/\sqrt{N}$ conforme se generan más muestras. Para el algoritmo de emcee, se tiene que las muestras no son independientes, entonces el error es en realidad:

$$\sigma^2 = \frac{T_f}{N} \text{Var}_{p(\theta)}[f(\theta)] \quad , \quad (7.11)$$

con T_f siendo el tiempo integrado de autocorrelación de la cadena $f(\theta^{(n)})$, entonces el número efectivo de muestras es N/T_f y se puede pensar a T_f como el número de pasos necesarios para generar la distribución objetivo.

El tiempo integrado de autocorrelación se define como:

$$T_f = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \rho_f(t) \quad , \quad (7.12)$$

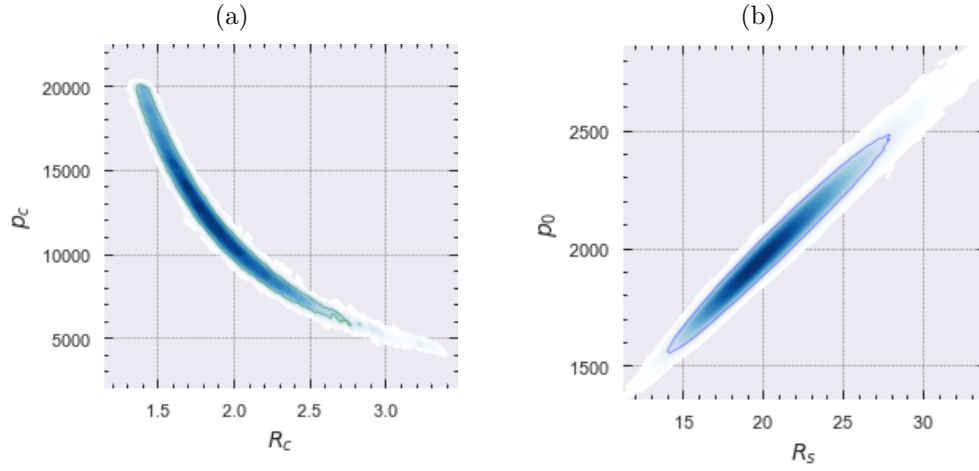
con ρ_f siendo la función de auto correlación del proceso estocástico (revisar anexo) que generó la cadena de f . Se puede estimar T_f utilizando:

$$\hat{T}_f = \sum_{t=-N}^N \hat{\rho}_f(t) = 1 + 2 \sum_{T=1}^M \hat{\rho}_f(T) \quad , \quad (7.13)$$

para algún $M \ll N$, introducir M reduce la varianza del estimador de $\rho_f(T)$. En [75] se recomienda correr cadenas más largas que $1000 T_f$, pero emcee puede utilizar cadenas paralelas lo que reduce la varianza y en [68] se encuentra que correr cadenas más largas que $50 T_f$ es suficiente para un buen funcionamiento del algoritmo.

La covarianza mide la variabilidad conjunta de dos variables aleatorias, es decir nos muestra la dependencia de las variables, la covarianza puede ser positiva, negativa o 0 en el caso de que no haya correlación entre las variables.

Figura 7.1: (a) Ejemplo de covarianza negativa, $\text{Cov}(R_c, \rho_c) < 0$ utilizando el perfil de densidad pseudo-isotérmico y galaxia U6614. (b) Covarianza positiva, $\text{Cov}(R_s, \rho_0) > 0$ utilizando el perfil NFW y galaxia U6614



Las distribuciones de probabilidad posterior como las de la figura 7.1 nos muestran la covarianza de los valores probables en el espacio de parámetros y nos muestra la convergencia de la cadena indicada por la intensidad del color, es decir, las regiones más claras en el espacio de parámetros representan regiones de baja probabilidad para los parámetros y las regiones más oscuras representan los valores más probables para los parámetros, estas gráficas se realizaron con la paquetería GetDist [76]. En los ejes (x,y) están los parámetros que se ajustaron y los priors utilizados corresponden a la longitud de los ejes.

En la Figura 7.2 se muestran las distribuciones de probabilidad conjuntas y los histogramas (suavizados) de los valores más probables para los parámetros individuales que se observan como curvas Gaussianas. Los valores más probables se encuentran encima de el pico de las Gaussianas.

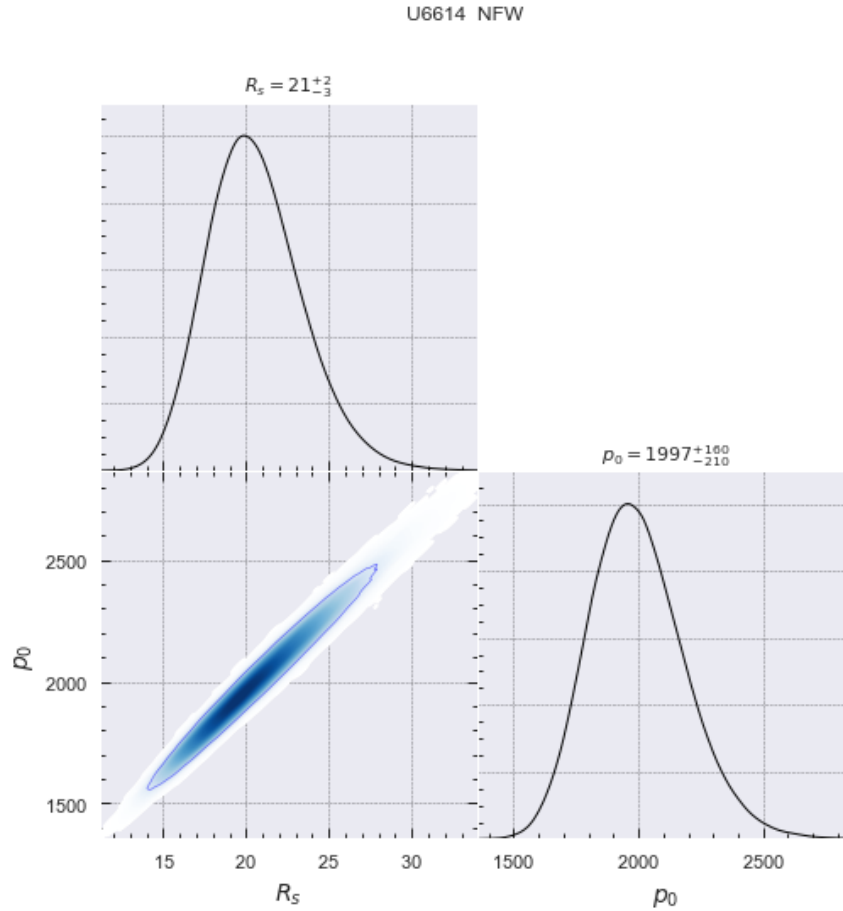


Figura 7.2: Distribución de probabilidad de los 2 parámetros en el perfil de densidad NFW.

Se puede graficar de igual manera los valores que toman los parámetros con cada paso (Figura 7.3), esta información esta codificada en las distribuciones de probabilidad de los parámetros individuales.

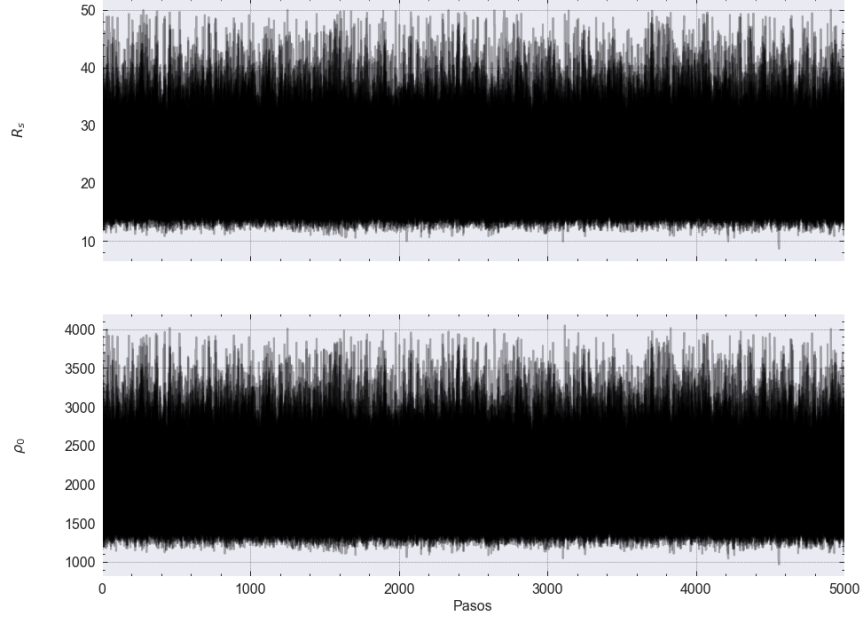


Figura 7.3: Valores por cada paso de los caminadores, en el eje x se muestran los 5000 pasos que se usaron y en el eje y los valores de los parámetros en cada paso de la galaxia U11454, perfil NFW.

También podemos analizar la fracción de aceptación de los caminadores, como se muestra en la Figura 7.4, como se mencionó antes, si la fracción de aceptación $a_f \sim 0$, casi todos los pasos propuestos son rechazados, esto quiere decir que la cadena tendrá un número de muestras independientes muy pequeño y por lo tanto el muestreo no será una buena representación de la densidad objetivo, por otro lado si $a \sim 1$, casi todos los pasos son aceptados y entonces la cadena se movió de manera aleatoria sin considerar la distribución objetivo y de nuevo el muestreo no es representativo de la distribución posterior.

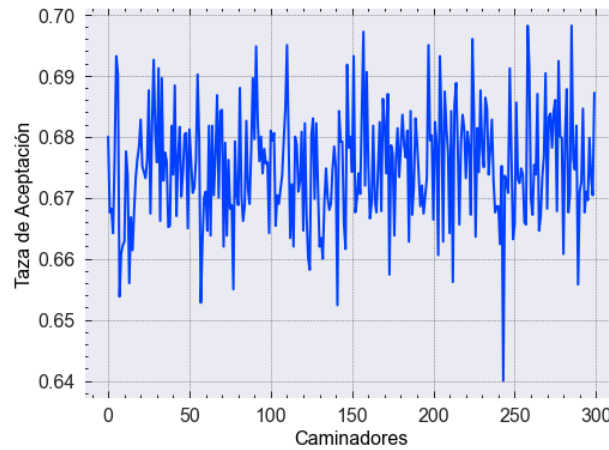


Figura 7.4: Fracción de aceptación de los caminadores con el perfil NFW, y el valor de la taza de aceptación promedio fue de 0.71.

Al correr los algoritmos de MCMC afín invariante se tuvo en cuenta el tiempo de autoco-

relación, en esta galaxia y perfil en particular el tiempo de autocorrelación fue de 31.62 segundos y se utilizó la galaxia ESO4880049 con el perfil de densidad NFW. Al utilizar emcee se encuentran regiones en el espacio de parámetros de alta probabilidad, entonces podemos graficar la curva de rotación con los perfiles de densidad evaluados en los parámetros más probables y representar en la zona sombreada en gris las posibles curvas de rotación generadas por parámetros tomados de la región de mayor probabilidad, como se muestra en la Figura 7.5. Las tasas de aceptación y tiempos de auto correlación se muestran en el Cuadro 10.2 en el Anexo.

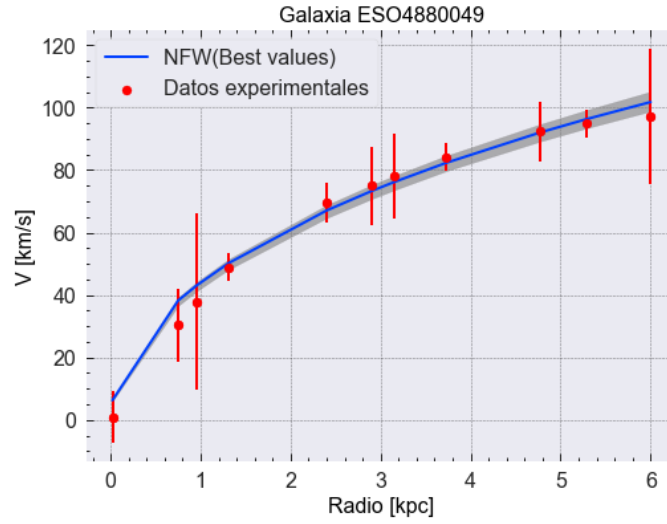


Figura 7.5: Se muestra en gris la región más probable de los parámetros que generan curvas de rotación.

Las distribuciones de probabilidad posteriores se pueden utilizar como herramientas para encontrar problemas al momento de correr el código, por ejemplo en la literatura se reporta que para el perfil de Einasto, el índice de Einasto n varía de 0 a 8, entonces esto se utilizó como información a priori al escoger los priors de los parámetros, si por ejemplo no conociéramos el hecho de que n tiene cotas bien definidas al correr suficientes galaxias nos hubiéramos dado cuenta del hecho que n varía de 0 a 8. En la figura 7.6 se muestra como priors malos afectan las distribuciones de probabilidad posterior y esto puede llevar a que el algoritmo pierda tiempo explorando el espacio de parámetros en regiones donde sabemos no existen estados de alta probabilidad.

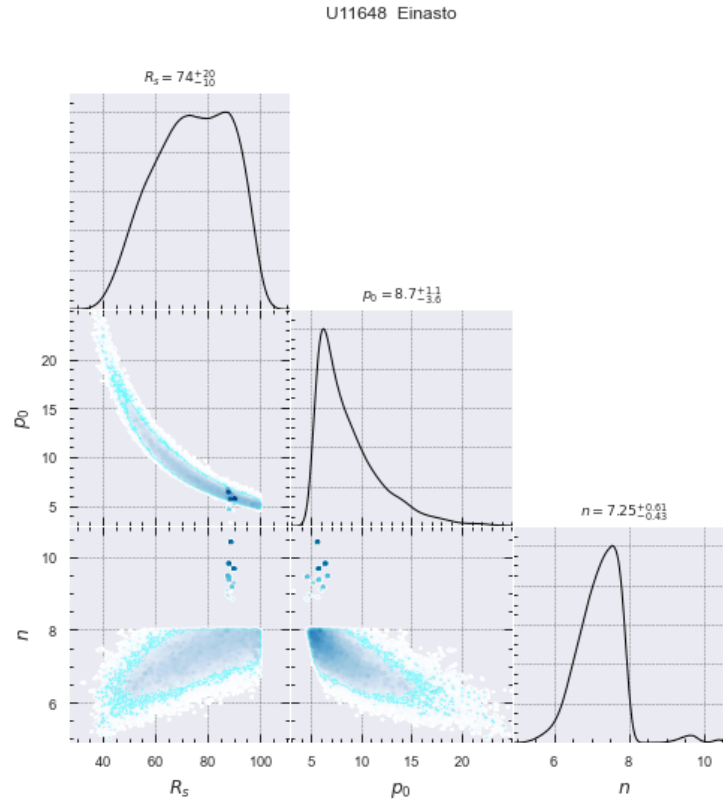


Figura 7.6: Los valores que toma n al correr el código permiten escoger mejores priors y correrlo de nuevo.

El perfil de densidad NFW presentó en muchas ocasiones degeneración en los valores óptimos de los parámetros, es decir, en varias galaxias se encontraron múltiples conjuntos de parámetros con valores iguales de χ^2 en estos casos se tomaron los parámetros que tuvieran más sentido físico, en ciertos casos el algoritmo podía arrojar valores de densidad y radio exageradamente grandes, este comportamiento también se puede observar en las distribuciones de probabilidad posteriores.

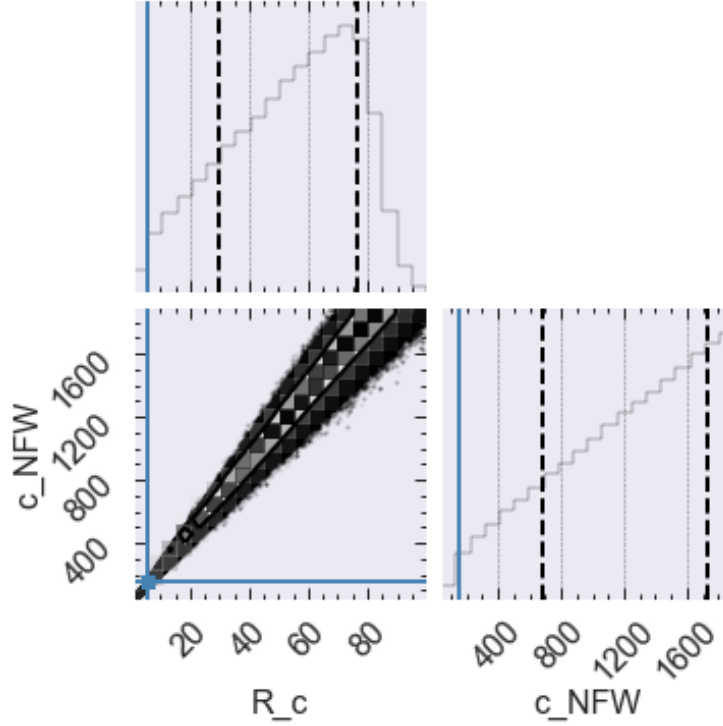


Figura 7.7: Degeneración en los parámetros del perfil NFW en la galaxia ESO1200211.

La Figura 7.7 fue realizada con la paquetería `corner.py` [77] sin suavizado para poder visualizar mejor la degeneración en los parámetros del perfil NFW, el cuadrado azul intersectado por las rectas azules representa el estado al que convergió el algoritmo, sin embargo, en las distribuciones de los parámetros individuales se observa que ninguno de los dos parámetros es de buena probabilidad. Para esta corrida de emcee se utilizaron priors pequeños, lo que resultó en una exploración deficiente del espacio de parámetros y se observa que hay muchas regiones de alta probabilidad, entonces tenemos muchos estados con valores de parámetros muy diferentes que arrojan valores de χ^2 muy parecidos o iguales. Si se escogen priors muy grandes el algoritmo puede arrojar parámetros sin sentido físico, es decir, podemos obtener densidades y radios exageradamente grandes (en el contexto de Halos de materia oscura). Para los casos donde varias familias de parámetros tuvieran la misma χ^2 se escogieron los valores de parámetros más pequeños.

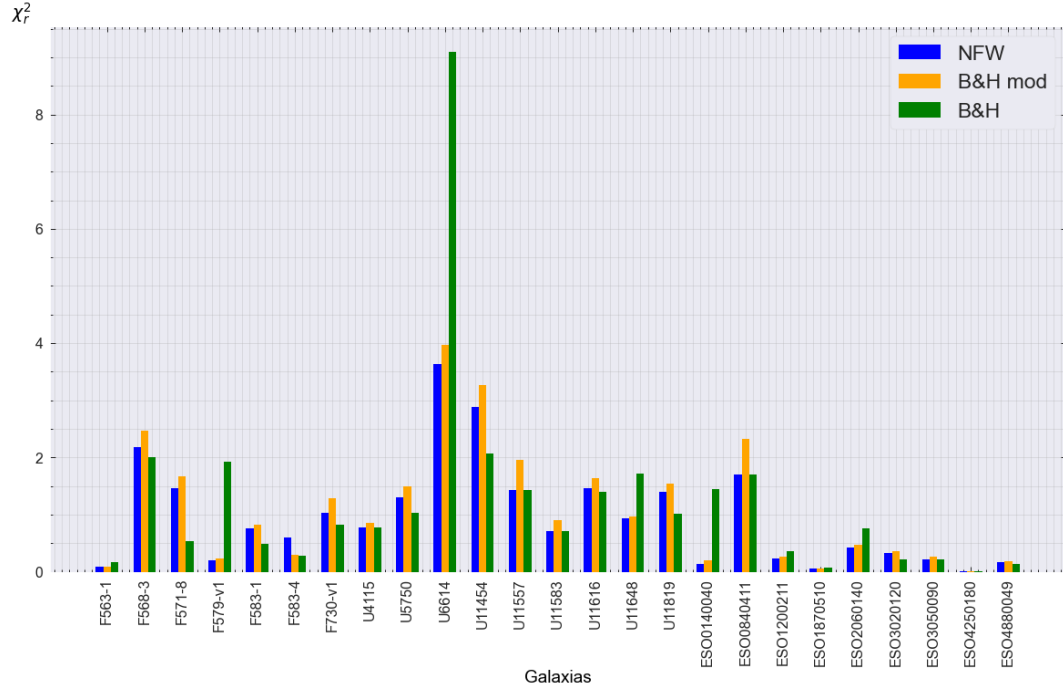
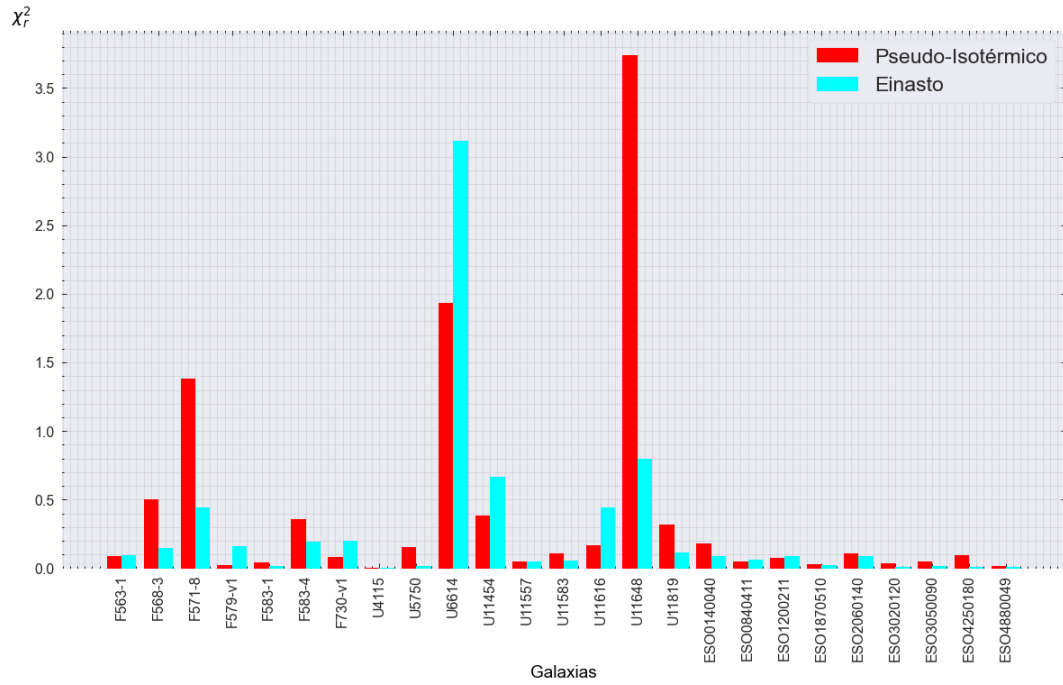
Capítulo 8

Resultados

En este capítulo se presentan las curvas de rotación obtenidas y en el Cuadro 8.1 se presentan los valores de χ_r^2 obtenidos por emcee. Uno de los objetivos de este trabajo fue el de comparar el ajuste de los perfiles de densidad con los datos experimentales, con este fin se realizaron las figura 8.1 y 8.2 que contienen la información del cuadro 8.1; en la Figura 8.1 se muestra una comparación de valores de χ_r^2 para los perfiles de densidad NFW, B&H y el perfil propuesto B&H modificado, en el eje x se colocan las diferentes galaxias estudiadas en este trabajo y en el eje y se tienen los valores de χ_r^2 , las barras de diferentes colores representan los diferentes perfiles de densidad. En la Figura 8.2 se muestran comparaciones de los valores de χ_r^2 para los perfiles de densidad empíricos. Las figuras para la comparación de ajustes se separaron en dos gráficas para una mejor visualización. En el Anexo se presenta la tabla de χ_r^2 obtenida por regresión no lineal por mínimos cuadrados y la tabla de tiempos de autocorrelación y tasas de aceptación que se encontraron al correr el algoritmo de MCMC afín invariante.

En las distribuciones de probabilidad que se obtuvieron observamos la degeneración de los parámetros del perfil de densidad Navarro-Frenk-White, debido a esta degeneración de parámetros se escogieron priors pequeños, para evitar perder tiempo de computo mientras los caminadores exploran la región del espacio de parámetros con valores sin sentido físico, esta elección de priors implica que para ciertos casos no se exploran por completo los parámetros probables y esto se observa en el fuerte sesgo de las distribuciones de probabilidad de las figuras: (8.4.4), (8.4.10), (8.4.11), (8.4.21) y (8.4.22).

El espacio muestral es de 26 galaxias, en las cuales al comparar el ajuste entre estos los perfiles, se encontró que el perfil B&H tuvo un mejor ajuste en 17 galaxias esto es, se ajustó mejor que el perfil NFW en 65.38 % de las galaxias, el perfil NFW tuvo mejor ajuste en 9 galaxias o 34.61 % de las galaxias, se encontró que el perfil B&H tuvo un peor ajuste que el perfil NFW en galaxias tipo bulbo o con núcleos brillantes como lo son las galaxias: F579-v1, U6614, U11748, ESO0140040, en particular los peores ajustes de cualquier galaxia son las galaxias U6614 y U11748, en estas dos galaxias el peor ajuste pertenece al perfil B&H, cabe resaltar que los perfiles empíricos también tuvieron malos ajustes y esto se le puede atribuir al hecho de que se ignora la contribución de bariones, y estas galaxias son tipo bulbo con anillo espiral (U6614) y tipo irregular con núcleo brillante (U11748), esta última galaxia con el peor ajuste también es la galaxia más grande estudiada en este trabajo con el último dato de la curva de rotación a 60kpc del centro galáctico. En los perfiles empíricos se encontró al igual que con demás perfiles que las galaxias U6614 y U11748 tuvieron los peores ajustes, entonces parece ser que el mal ajuste en estas dos galaxias tiene que ver con problemas en la galaxia y no con los perfiles de densidad al ignorar la contribución de masa de los bariones. El perfil de Einasto tuvo el mejor ajuste en 17 galaxias y el peor ajuste en 9. Una comparación gráfica de el ajuste de los perfiles de densidad se encuentra en las figuras 8.1 y 8.2 presentadas a continuación.

8.0.1. χ_r^2 de los perfiles de densidadFigura 8.1: Comparación de valores de χ_r^2 para los perfiles NFW, B&H y B&H modificadoFigura 8.2: Comparación de valores de χ_r^2 para los perfiles empíricos: Einasto y Pseudo-Isotermico.

χ_r^2 obtenida con emcee						
Galaxia	Comentarios	NFW	B&H	B&H mod	P-iso	Einasto
F563-1	Tipo Magallanes, Irregular	0.0926	0.1677	0.0954	0.0871	0.0986
F568-3	Espiral con barra magallanica	2.1849	1.9993	2.4727	0.5055	0.1471
F571-8	De canto	1.4539	0.5396	1.6672	1.3825	0.4455
F579-v1	Núcleo, brazos floclantes	0.2056	1.923	0.2342	0.0253	0.1621
F583-1	Tipo Magallanes, Irregular	0.7587	0.487	0.8244	0.0418	0.0176
F583-4	Difusa	0.6031	0.2853	0.2879	0.3588	0.1908
F730-v1	Espiral	1.027	0.816	1.2813	0.0829	0.1987
U4115	Nudosa y difusa	0.781	0.7797	0.8625	0.0039	0.0021
U5750	Con barra Magallanica	1.3095	1.0373	1.4869	0.1523	0.0159
U6614	De bulbo con anillo espiral	3.6377	9.0949	3.970	1.936	3.1139
U11454	Espiral Difusa, núcleo pequeño	2.887	2.064	3.2733	0.3821	0.6649
U11557	Espiral Difusa, núcleo pequeño	1.4276	1.424	1.950	0.0514	0.0476
U11583	Tenue con barra Magallanica	0.7148	0.7125	0.9095	0.1056	0.058
U11616	Difusa irregular	1.4601	1.3952	1.6329	0.1707	0.4445
U11648	Irregular	0.9405	1.7203	0.9638	3.7389	0.801
U11748	Irregular, núcleo brillante / barra?	3.546	56.710	4.0699	5.7194	3.6098
U11819	Difusa	1.3973	1.013	1.5485	0.316	0.117
ESO0140040	De bulbo, brazos espirales apretados	0.1418	1.4489	0.1964	0.1804	0.0861
ESO0840411	De canto	1.7051	1.6953	2.3257	0.0498	0.0654
ESO1200211	Difusa con barra Magallanica	0.2386	0.3564	0.2626	0.078	0.0867
ESO1870510	Espiral irregular, floclante	0.0569	0.0697	0.0632	0.0284	0.0211
ESO2060140	Espiral	0.4202	0.7581	0.4657	0.1058	0.0897
ESO3020120	Espiral / barra?	0.3284	0.2112	0.3612	0.0339	0.0104
ESO3050090	Espiral con barra	0.2175	0.2166	0.2699	0.048	0.0189
ESO4250180	Espiral abierta con barra	0.0127	0.0125	0.0149	0.0951	0.0074
ESO4880049	Inclinada con barra Magallanica	0.1648	0.1387	0.1879	0.0171	0.0094

Cuadro 8.1

8.0.2. Análisis de χ_r^2

En este trabajo se comparan modelos con 2 y 3 parámetros libres, además cada galaxia cuenta con un número diferente de datos experimentales y hay diferentes errores en dichos datos, por lo tanto es conveniente utilizar la χ^2 reducida que tiene en cuenta el número de grados de libertad:

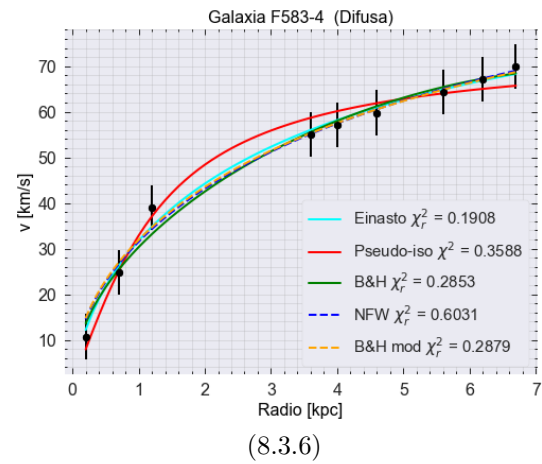
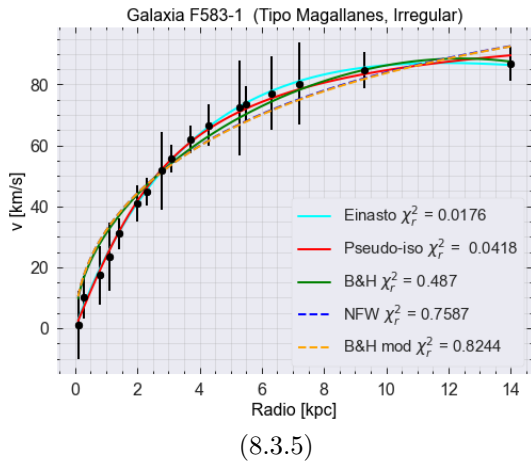
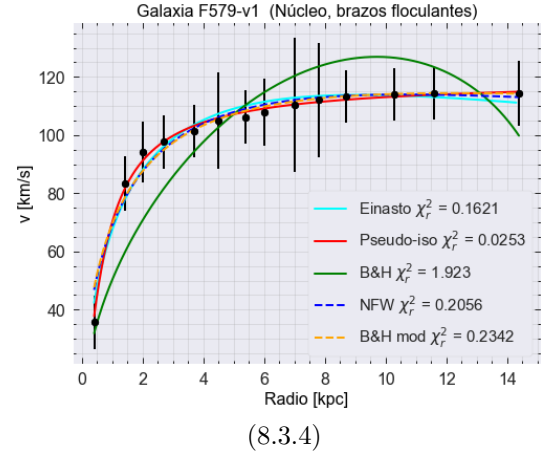
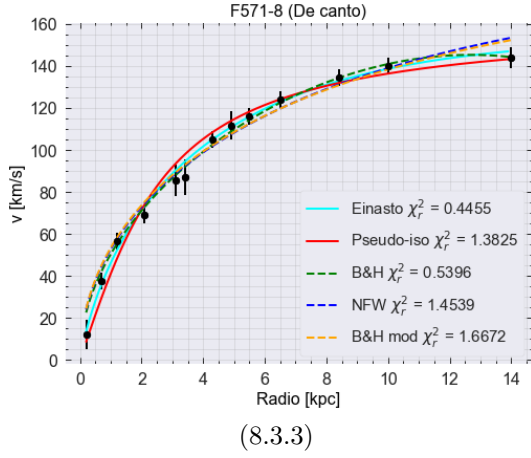
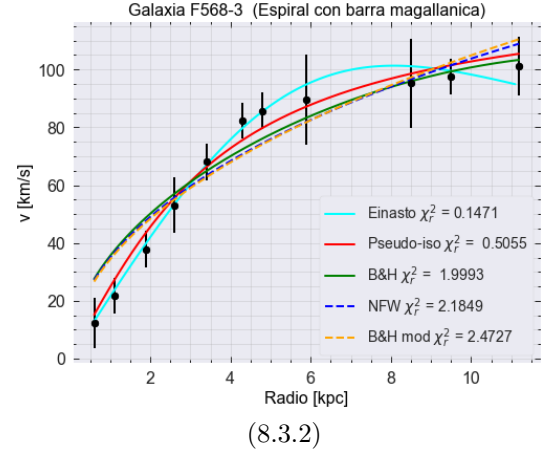
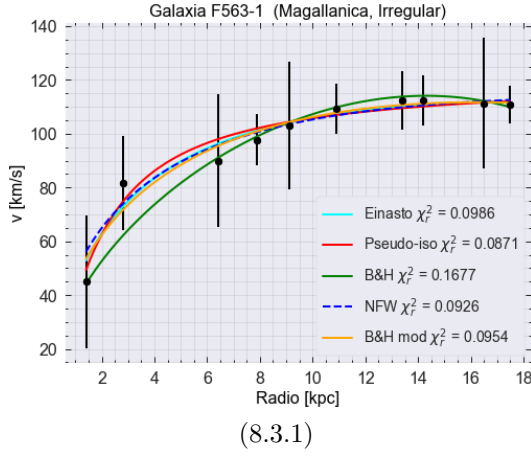
$$\chi_\nu^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{\chi^2}{i-j} \quad , \quad (8.1)$$

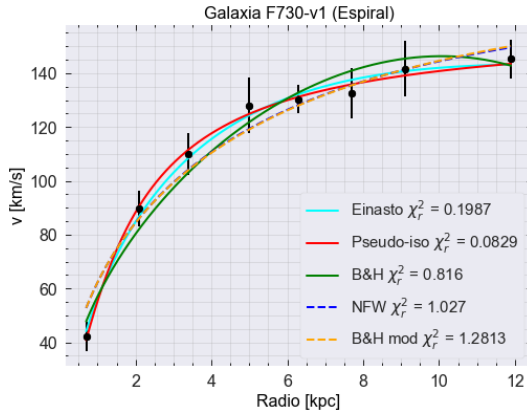
se busca que el valor de χ_ν^2 o como se expresa más adelante χ_r^2 sea lo más cercano a 1, tenemos que los datos experimentales están sujetos a errores y por lo tanto la χ_r^2 también estará sujeta a errores o ruido y si su valor es cercano a 1 significa que el ajuste es bueno y que el ajuste entre datos experimentales y teóricos esta de acuerdo con la varianza en los errores, si el valor de χ_r^2 esta alejado de 1, tenemos un mal ajuste y el modelo no reproduce los datos experimentales o también puede significar que la varianza del error se ha subestimado al realizar el ajuste. Por último, tenemos que para valores de χ_r^2 muy pequeños el modelo se sobre ajusta a los datos, esto quiere decir que los errores tienen un peso muy grande o los modelos pueden ser muy complejos, sin embargo se concluye que los ajustes con valores mucho menores a 0 se deben a errores grandes en los datos experimentales.

8.0.3. Curvas de Rotación

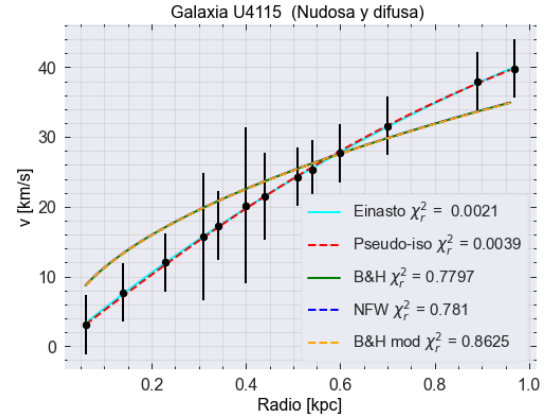
A continuación se presentan las curvas de rotación generadas con los parámetros de emcee de los 5 perfiles de densidad, con el NFW siendo la curva azul, el perfil B&H en verde, en cian el perfil de Einasto, en rojo el perfil pseudo isotérmico y en naranja el perfil B&H modificado; los puntos en negro con barras de error son los datos experimentales de las curvas de rotación (de Blok, McGaugh, & Rubin 2001). Estas figuras nos permiten observar el ajuste con los datos experimentales, los tamaños de las galaxias, el comportamiento que exhiben los distintos perfiles de densidad y las magnitudes de los errores en los datos experimentales, es importante tener en cuenta los errores de los datos al estudiar el ajuste, debido a que en algunas galaxias, varios perfiles de densidad se ajustan a los datos de manera que las curvas de rotación teóricas se encuentran dentro de las barras de error (como es el caso en las figuras: (8.3.20), (8.3.21), (8.3.23), (8.3.24), (8.3.25) y (8.3.26)), esto hace que se comparen modelos sobre-ajustados, entonces el error en los datos experimentales es más grande que la diferencia entre los diferentes modelos (perfiles de densidad), cuando esto sucede es complicado decir de manera conclusiva que modelo tiene un mejor ajuste.

Curvas de Rotación:

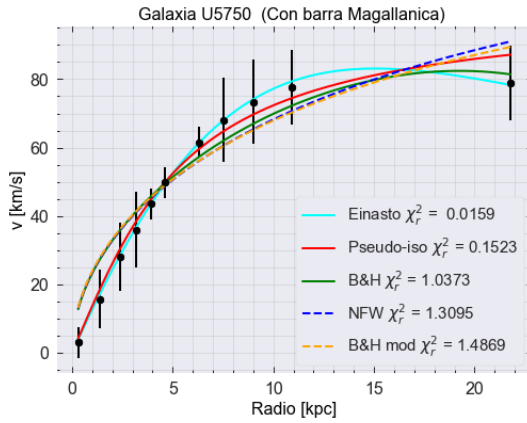




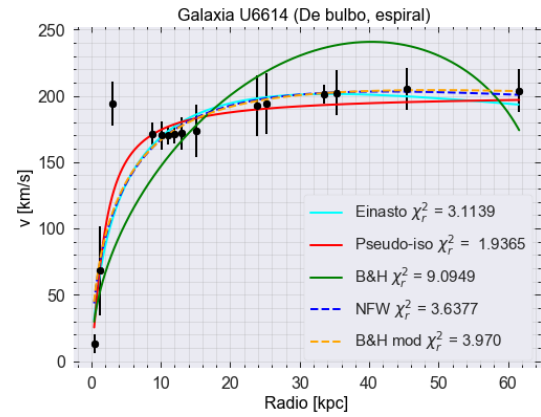
(8.3.7)



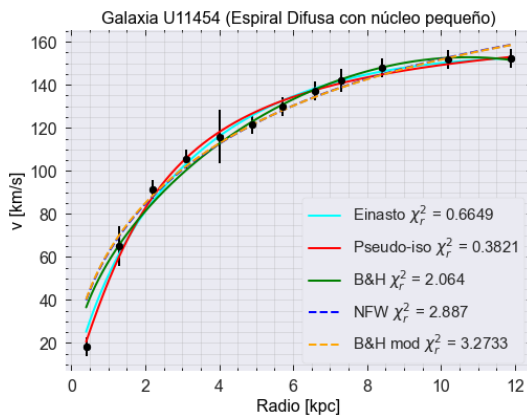
(8.3.8)



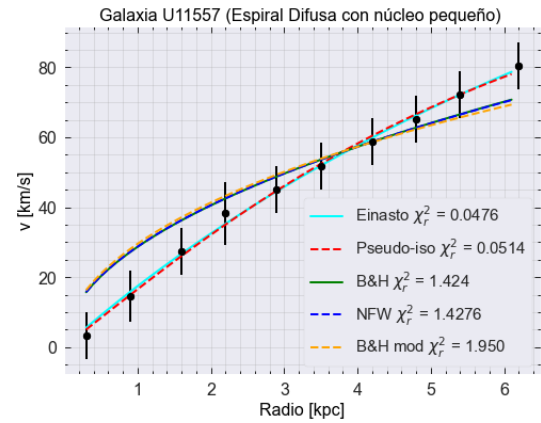
(8.3.9)



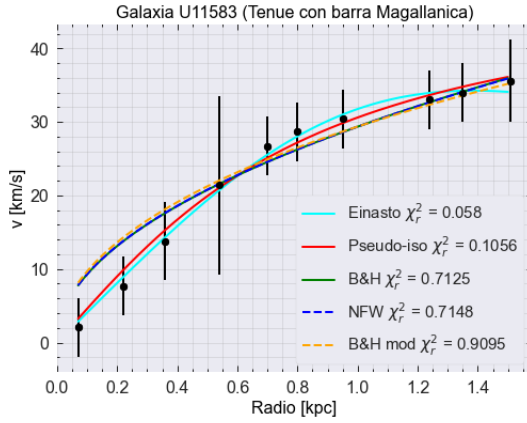
(8.3.10)



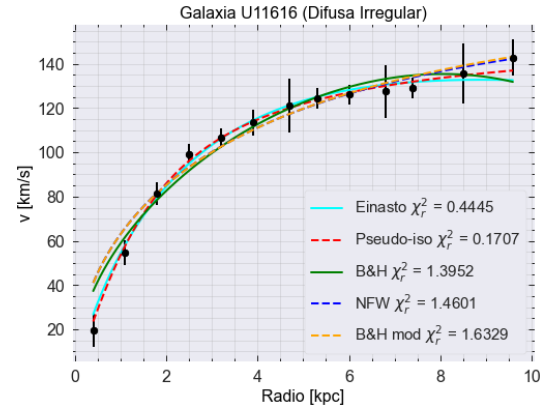
(8.3.11)



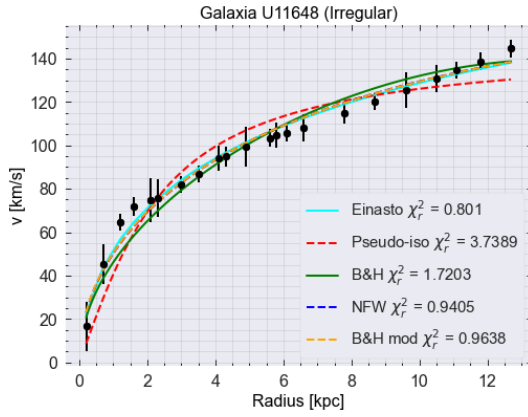
(8.3.12)



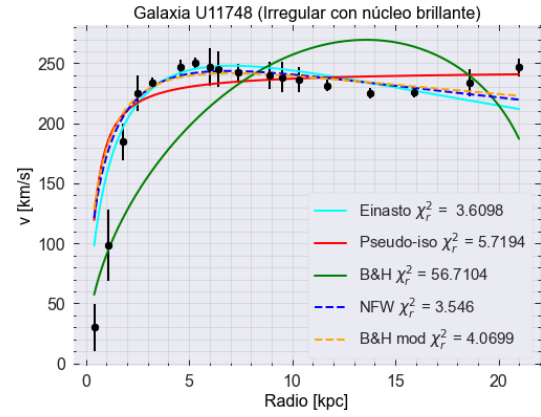
(8.3.13)



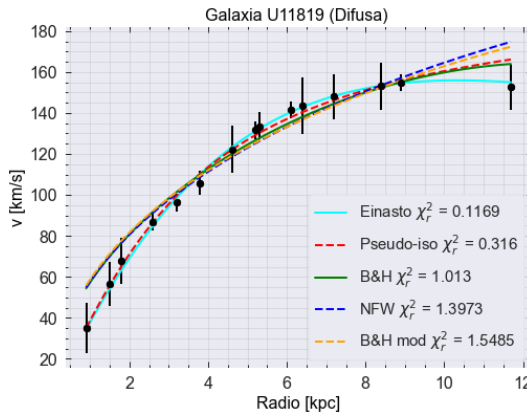
(8.3.14)



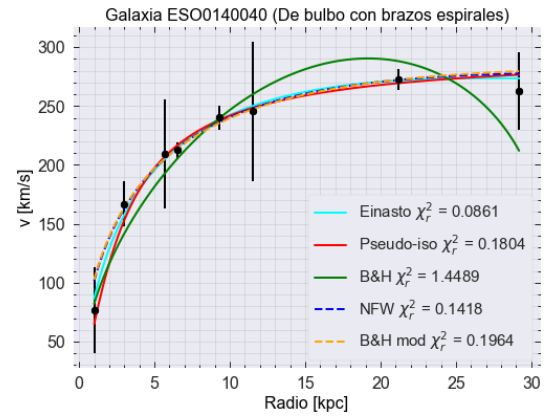
(8.3.15)



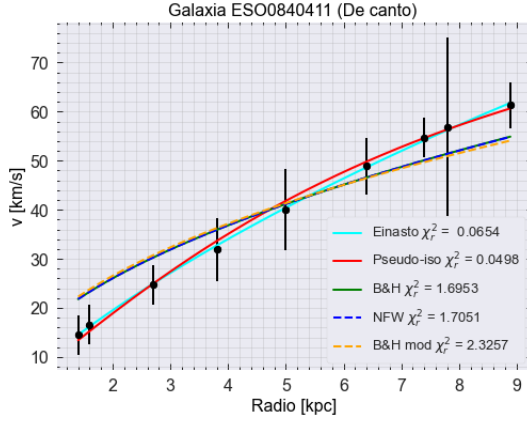
(8.3.16)



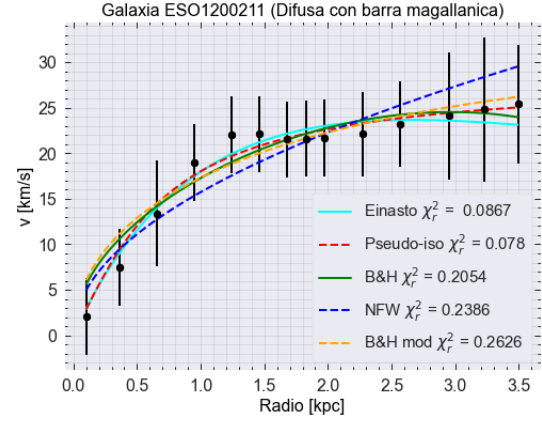
(8.3.17)



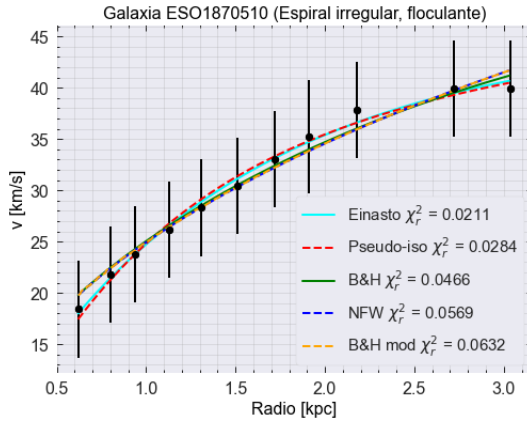
(8.3.18)



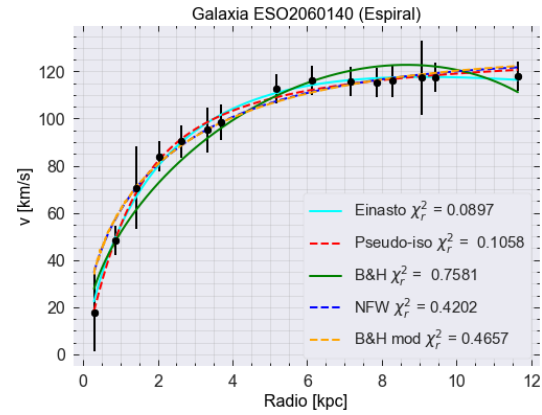
(8.3.19)



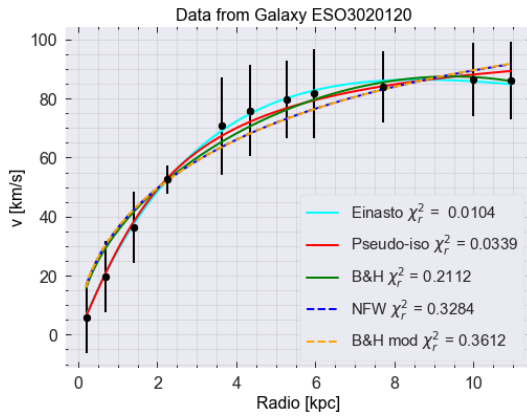
(8.3.20)



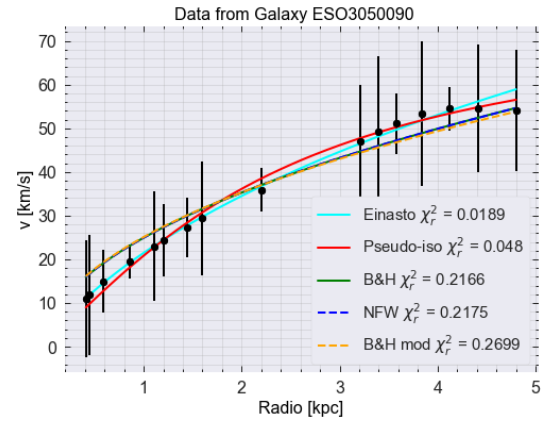
(8.3.21)



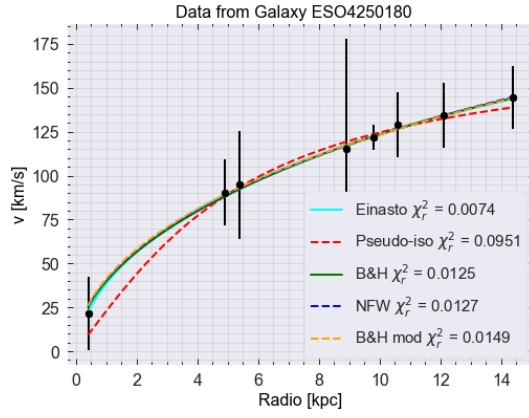
(8.3.22)



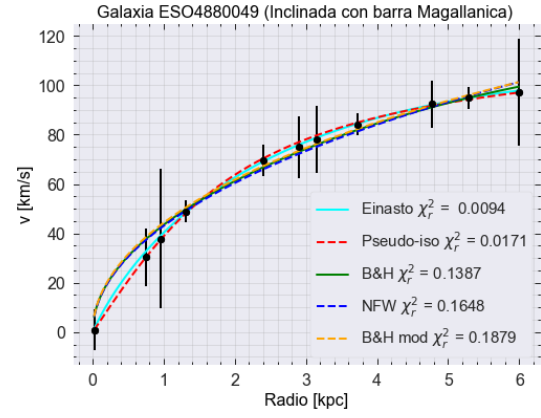
(8.3.23)



(8.3.24)



(8.3.25)

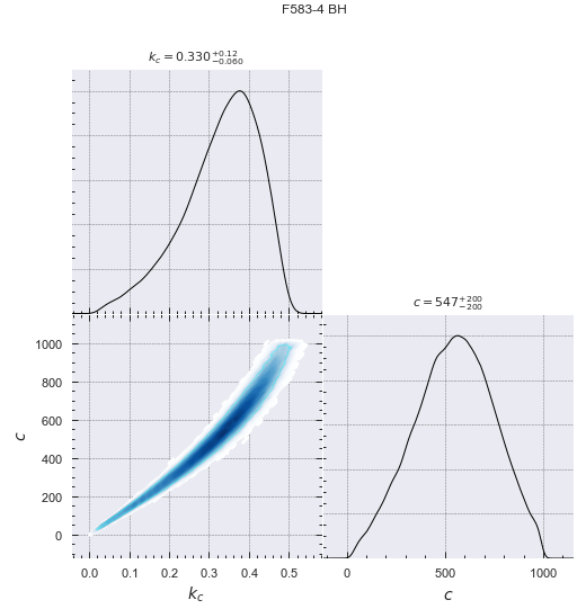
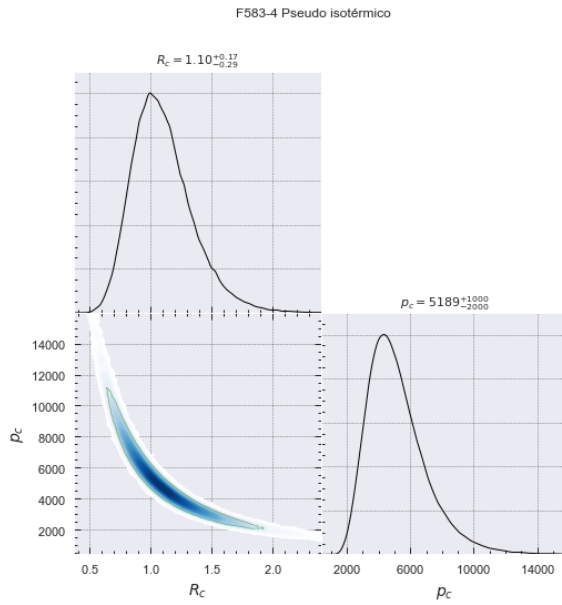


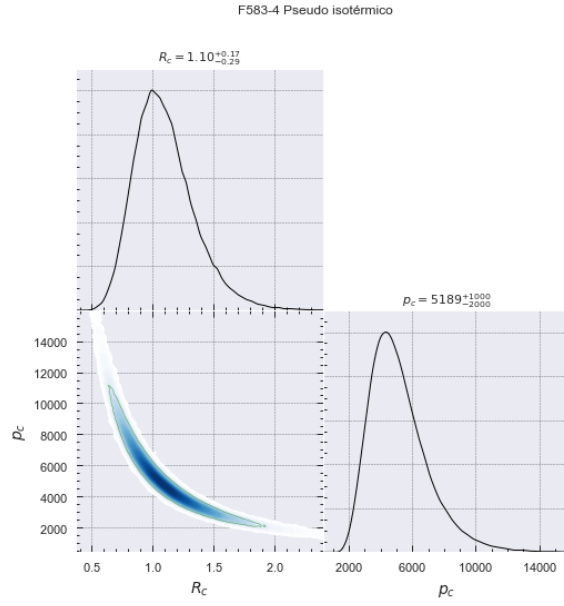
(8.3.26)

8.0.4. Distribuciones de probabilidad

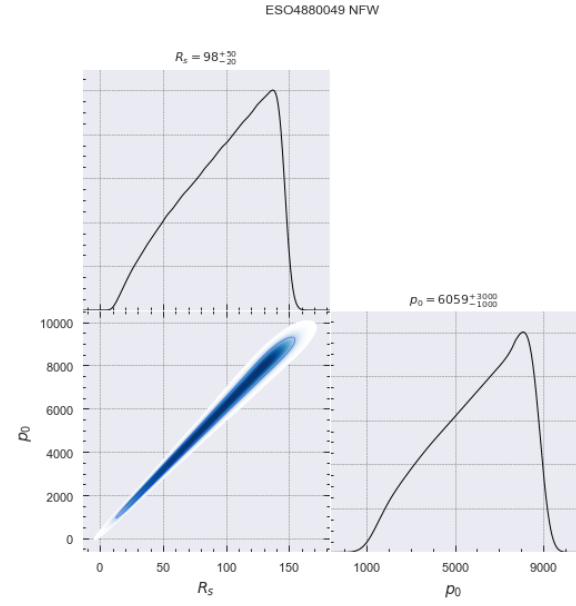
En esta sección se presentan las distribuciones de probabilidad de los 5 perfiles de densidad.

En las figuras (8.4.4), (8.4.10), (8.4.11) se puede observar un fuerte sesgo en las distribuciones de probabilidad y una caída pronunciada en la probabilidad de los parámetros, esto indica que el algoritmo no exploró por completo todo el espacio de parámetros, en estos casos hubo una degeneración en los parámetros y se decidió no explorar por completo el espacio de parámetros debido a que para valores muy grandes de ellos, dejan de tener significado físico en el contexto de Halos de materia oscura, es decir radios críticos y densidades centrales exageradamente grandes y para ahorrar tiempo de computo. En las figuras (8.4.21), (8.4.22) y (8.4.24) que son las distribuciones de probabilidad correspondientes al perfil de Bohmer y Harko modificado observamos que existe una región pequeña con alta probabilidad y una región más grande con buena probabilidad en la cual los parámetros toman valores más grandes, pero la χ^2 no cambia dramáticamente.

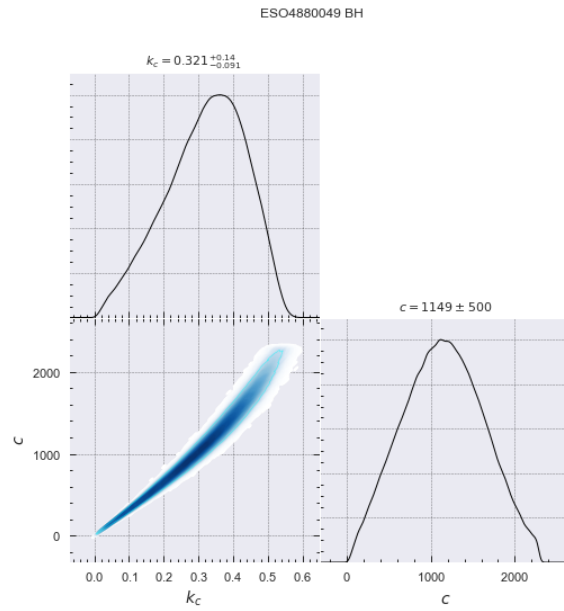




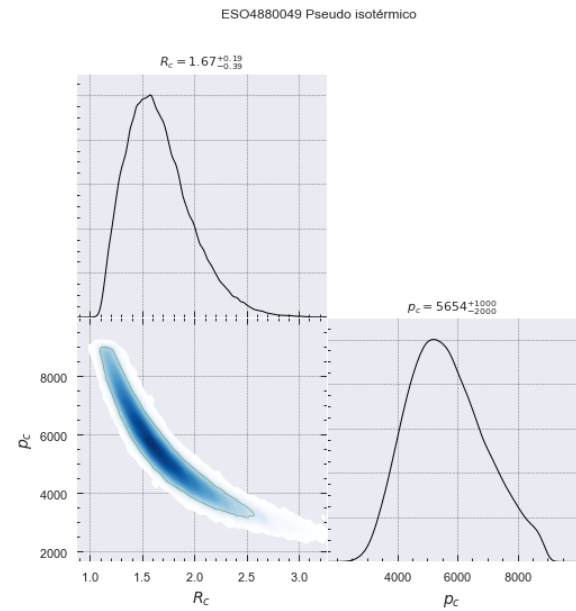
(8.4.3)



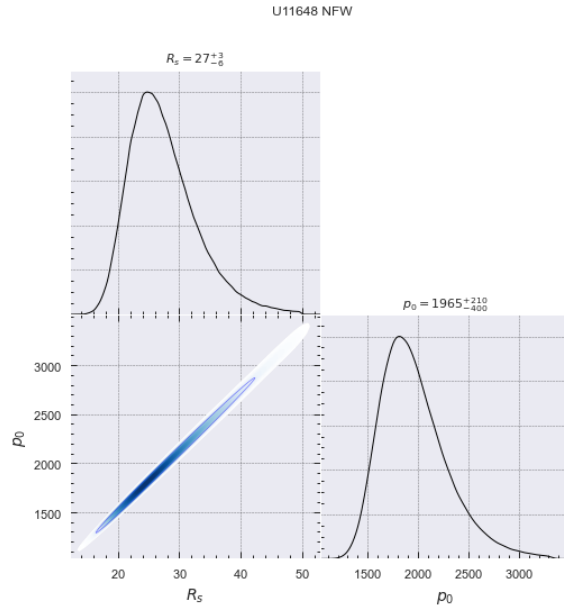
(8.4.4)



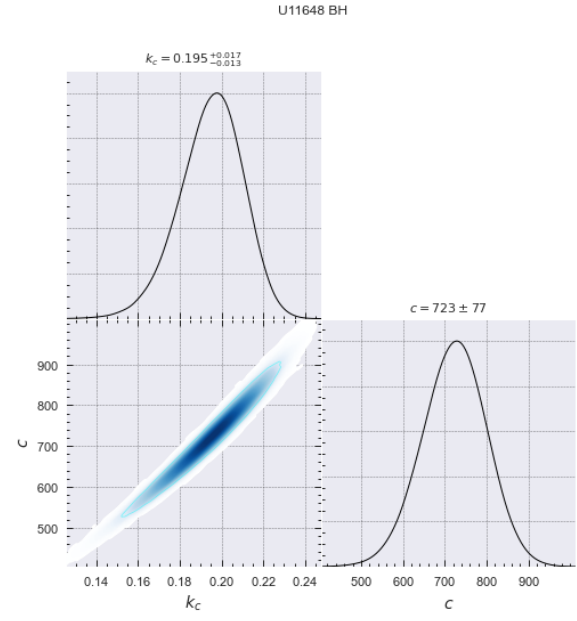
(8.4.5)



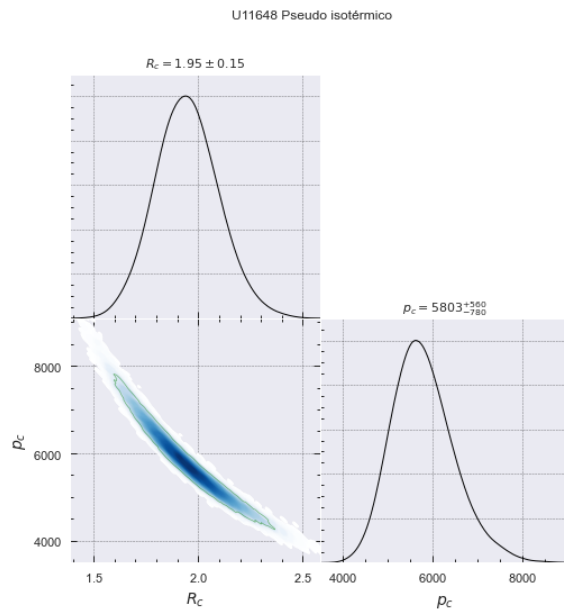
(8.4.6)



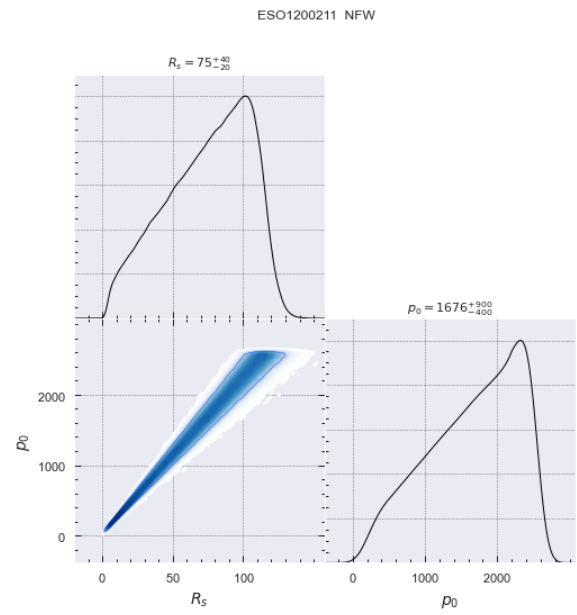
(8.4.7)



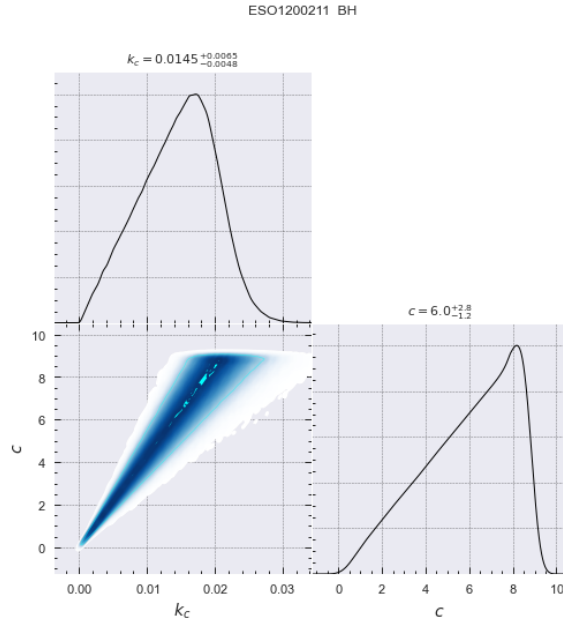
(8.4.8)



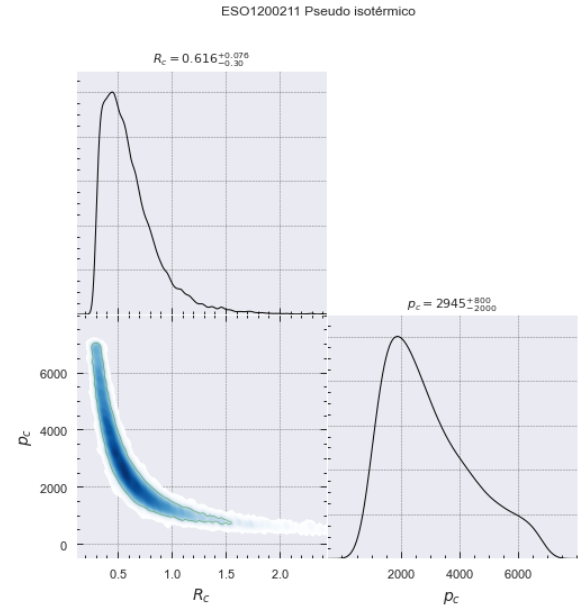
(8.4.9)



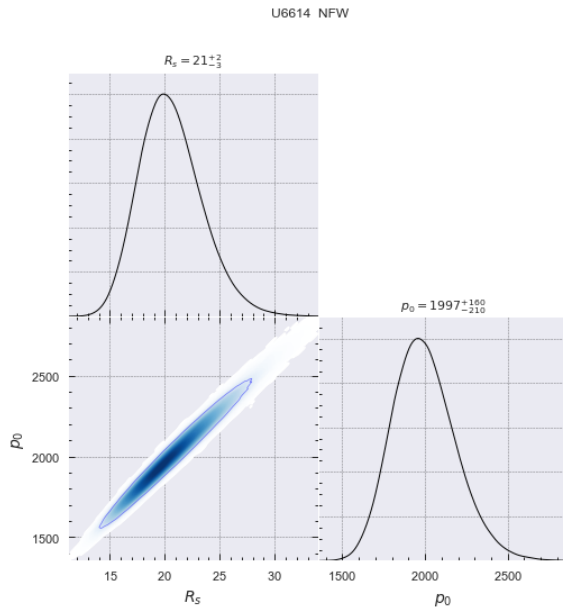
(8.4.10)



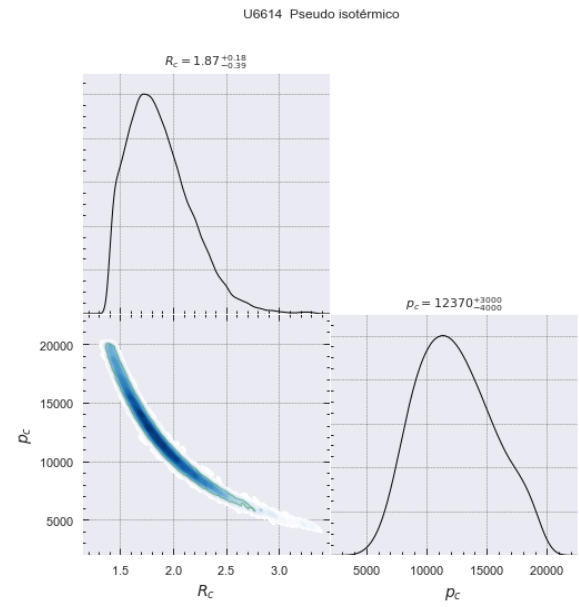
(8.4.11)



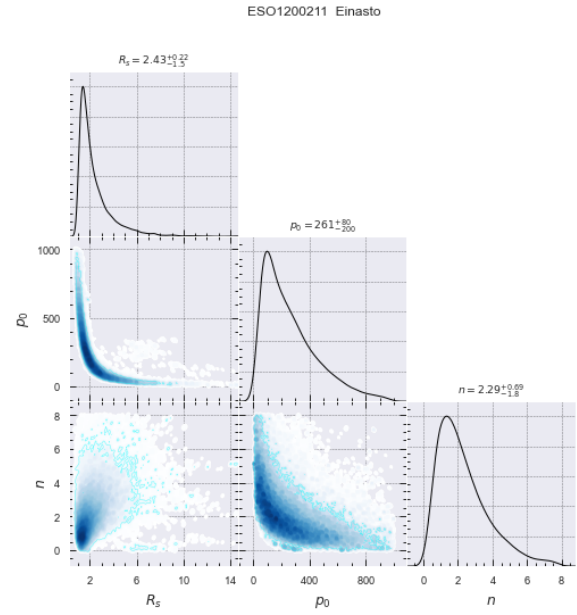
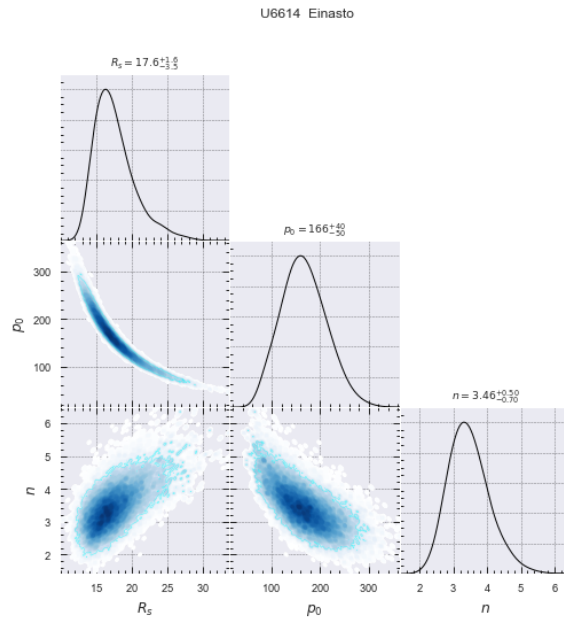
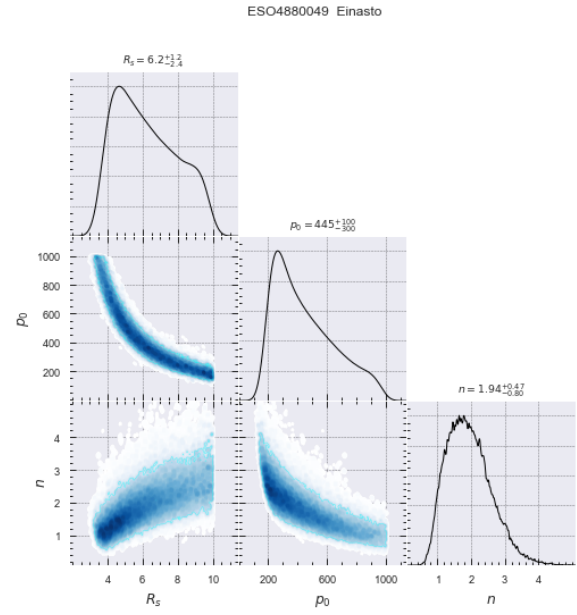
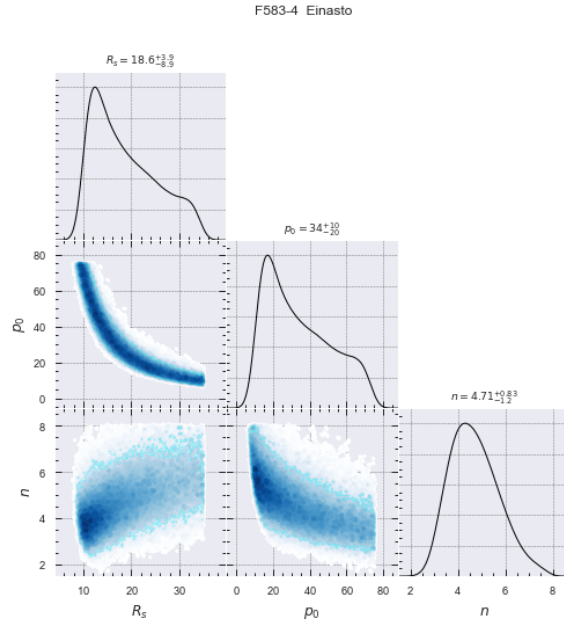
(8.4.12)

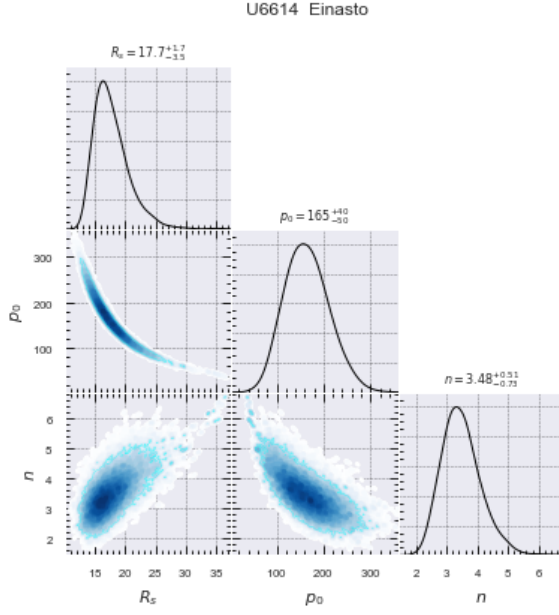


(8.4.13)

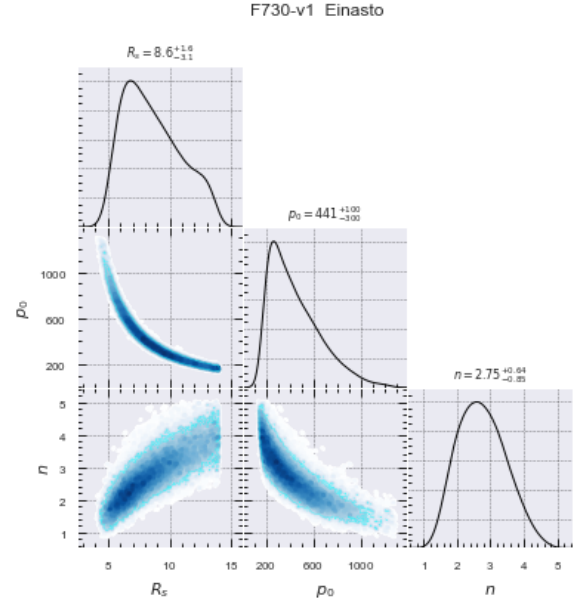


(8.4.14)

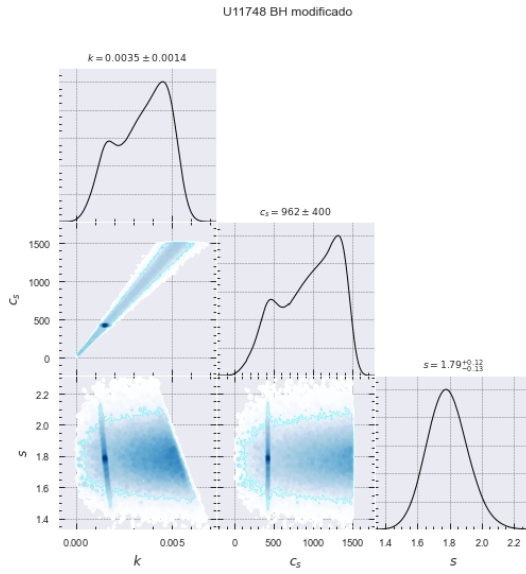




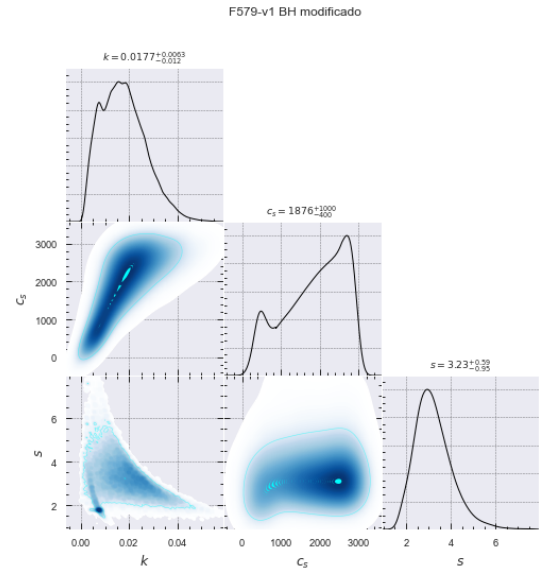
(8.4.19)



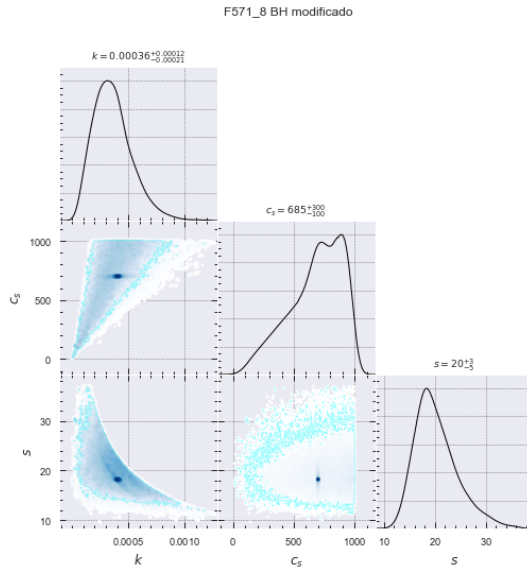
(8.4.20)



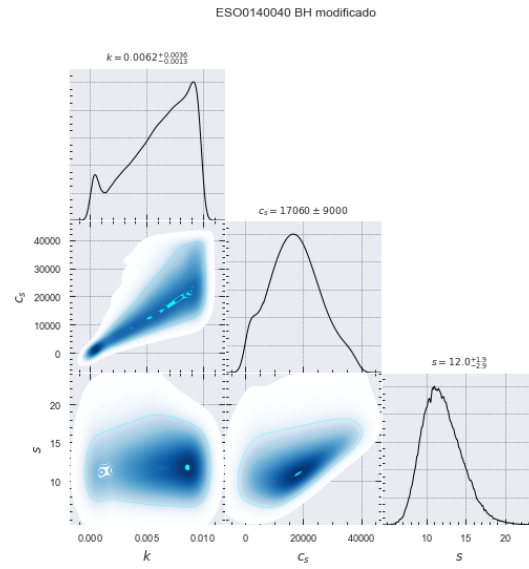
(8.4.21)



(8.4.22)



(8.4.23)



(8.4.24)

Capítulo 9

Conclusiones

Se ajustaron 26 galaxias de bajo brillo superficial y se asumió cierta la hipótesis de disco mínimo, entonces se tiene que las galaxias utilizadas en este trabajo son dominadas por su componente de materia oscura. Se encontró que de los 5 perfiles de densidad el perfil de Einasto tuvo en general un mejor ajuste que los otros 3 perfiles de densidad, esto es de esperarse debido a la naturaleza empírica de este perfil y debido al hecho de que cuenta con 3 parámetros libres; el análisis de χ_r^2 nos indica que este perfil está sobre ajustado a los datos, esto quiere decir que el modelo puede ser complejo o que los errores en los datos son muy grandes, se concluye que este sobre ajuste se debe a los pocos puntos experimentales que hay por cada galaxia y debido a que la magnitud de los errores puede ser grande en ciertas galaxias. El otro perfil empírico, el perfil pseudo isotérmico también presenta un problema de sobre ajuste a los datos y cuenta con menos grados de libertad que el perfil de Einasto.

De mayor interés son los perfiles NFW y B&H debido a que ambos perfiles representan diferentes tipos de partículas como candidatos de materia oscura el perfil NFW una partícula fría y el perfil B&H un boson ultra-ligero. El perfil B&H se ajustó bien en galaxias pequeñas con núcleos no brillantes, en este tipo de galaxias se espera que la hipótesis de disco mínimo sea más válida en comparación con las galaxias grandes con núcleos brillantes, al momento de comparar los ajustes la morfología de las galaxias pareció no ser un factor tan importante como su tamaño o brillo.

A escalas cosmológicas el modelo de materia oscura de campo escalar y el modelo Λ CDM reproducen observaciones muy similares y a escalas galácticas ambos modelos reproducen curvas de rotación con comportamientos similares, el perfil B&H tiene un mejor ajuste que el perfil NFW en un mayor número de galaxias y esto apoya a la hipótesis de que la materia oscura se trata de un boson ultra ligero capaz de formar condensados Bose-Einstein alrededor de galaxias, sin embargo los resultados no son tan contundentes como para concluir de manera inequívoca que la materia oscura en los Halos galácticos se puede describir con el perfil de densidad de Bohmer & Harko. Proponemos un perfil de densidad con el objetivo de describir mejor las galaxias donde el perfil B&H tiene un mal ajuste y encontramos que modificar al perfil B&H con un término tipo logarítmico hace que este perfil se ajuste mejor a galaxias grandes y con núcleos brillantes, en particular con las galaxias: F579-v1, U6614, U11748 y ESO0140040 , pero en galaxias pequeñas el ajuste no

es tan bueno, aunque es comparable con el perfil NFW y B&H. Se encontró que para las galaxias grandes de arriba de 10kpc y de núcleos brillantes la hipótesis de disco mínimo puede no ser valida y entonces para estas galaxias se debería de considerar la contribución de bariones en el disco galáctico. También encontramos que la morfología de las galaxias no es un factor tan importante como lo son la masa y el tamaño de la galaxias al momento de ajustar los perfiles de densidad.

Capítulo 10

Anexo

A continuación se presenta la explicación de el método de regresión no lineal por mínimos cuadrados, después se presenta la explicación a detalle de estrellas de bosones a partir del sistema Schrödinger-Poisson y como se solucionan para encontrar su perfil de densidad, también se presenta la explicación de los métodos numéricos que se utilizan para resolver el sistema S-P.

10.1. Regresión por mínimos cuadrados

Para los propósitos de este trabajo se realizó una regresión no lineal por mínimos cuadrados, este método comparte la misma idea general con la regresión lineal, pero tiene diferencias importantes, una de las más importantes es el hecho de que la regresión no lineal requiere una estimación inicial del valor de los parámetros, a partir de ese valor se itera sucesivamente para encontrar los parámetros óptimos que mejor ajusten una curva o modelo no lineal a un conjunto de datos.

Primero consideremos un conjunto de datos: $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ y consideremos una función $f(x, p)$ que puede depender de una variable x y de m parámetros independientes, es decir: $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ y $m \leq n$.

Al igual que en el caso para un modelo lineal lineal, tenemos residuos r_i

$$r_i = y_i - f(x_i, p) \quad , \quad (10.1)$$

$$S = \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad , \quad (10.2)$$

y se busca minimizar S y ese valor mínimo se encuentra cuando el gradiente es 0,

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = \sum_i r_i \frac{\partial r_i}{\partial p_j} = 0 \quad , \quad (10.3)$$

con $j = 1, \dots, m$

las derivadas $\frac{\partial r_i}{\partial p_j}$ dependen de la variable y y de los parámetros y en general no se puede encontrar una solución cerrada, por lo que a diferencia de la regresión lineal, es necesario introducir unos parámetros iniciales a partir de los cuales se realiza una aproximación sucesiva, el número de iteraciones es k .

$$p_j \approx p_j^{k+1} = p_j^k + \Delta p_j \quad . \quad (10.4)$$

Con cada iteración se realiza una aproximación a primer orden por desarrollo de Taylor.

$$f(x_i, p) \approx f(x_i, p^k) + \sum_j \frac{\partial f(x_i, p^k)}{\partial p_j} (p_j - p_j^k) \quad , \quad (10.5)$$

o bien:

$$f(x_i, p) \approx f(x_i, p^k) + \sum_j J_{ij} \Delta p_j \quad . \quad (10.6)$$

Entonces la matriz Jacobiana J depende de la variable x , de los parámetros y de constantes, y va cambiando con cada iteración.

$$\frac{\partial r_i}{\partial p_j} = -J_{ij} \quad , \quad (10.7)$$

ahora los residuos están dados por:

$$\Delta y_i = y_i - f(x_i, p^k) \quad , \quad (10.8)$$

$$r_i = (y_i - f(x_i, p^k) + (f(x_i, p^k) - f(x_i, p))) \approx \Delta y_i - \sum_{s=1}^m J_{is} \Delta p_s \quad , \quad (10.9)$$

y ahora sustituyendo se tiene:

$$-\sum_{i=1}^n J_{ij} \left(\Delta y_i - \sum_{s=1}^m J_{is} \Delta p_s \right) = 0 \quad , \quad (10.10)$$

que se puede re acomodar en n ecuaciones lineales de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m J_{ij} J_{is} \Delta p_s = \sum_{i=1}^n J_{ij} \Delta y_i \quad . \quad (10.11)$$

Las ecuaciones anteriores construyen las bases para realizar el ajuste por regresión no lineal por mínimos cuadrados, cabe notar que lo anterior implica que todos los datos son igualmente confiables y en el caso de este trabajo las observaciones tenían diferente magnitud en su error, los datos experimentales tienen la forma:

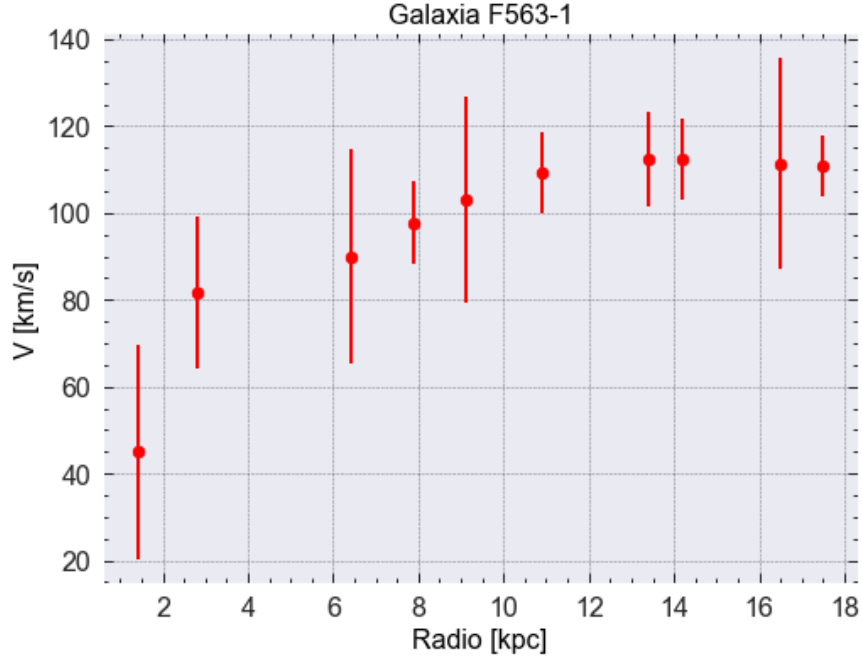


Figura 10.1

En la figura 10.1 se muestra un ejemplo de la distribución de datos experimentales a los que se ajustaron los 4 perfiles de densidad.

Debido a que los datos experimentales tienen diferentes pesos el algoritmo de regresión no lineal buscó minimizar la ecuación (10.12):

$$\chi^2 = \sum_n \frac{(O_n - M_n)^2}{\sigma_n^2} \quad , \quad (10.12)$$

en este caso la función con dos o tres parámetros independientes fueron los diferentes perfiles de densidad, como ejemplo podemos utilizar el perfil NFW que es de la forma:

$$v_{NFW} = \sqrt{4\pi G \rho_0 R_s^3} \sqrt{1/r \left[\ln(1 + r/R_s) - \frac{r/R_s}{1 + r/R_s} \right]} \quad . \quad (10.13)$$

Después de realizar el ajuste de parámetros por regresión no lineal obtenemos la curva con mejor ajuste a nuestros datos experimentales como se muestra en la figura 10.2:

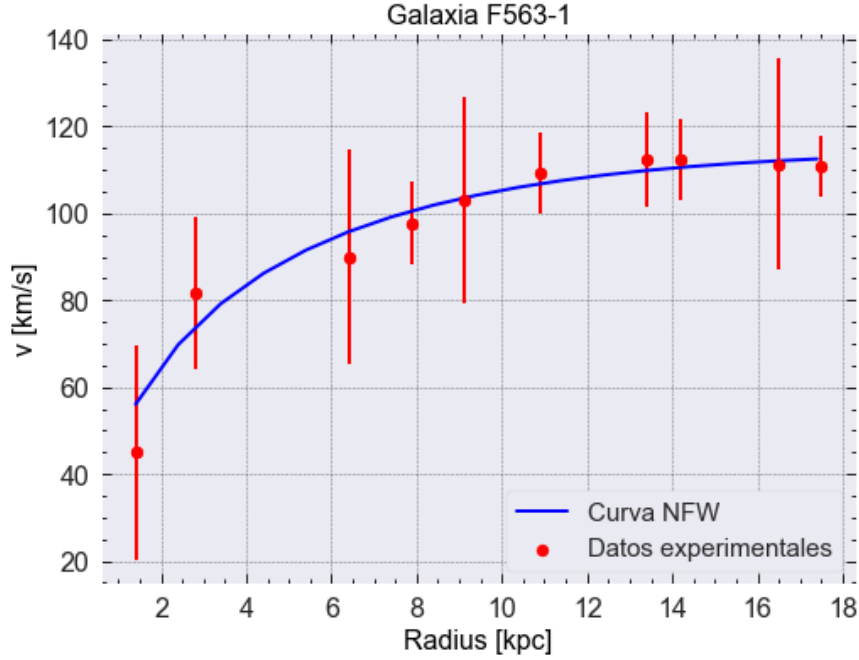


Figura 10.2

10.2. Métodos de Monte Carlo

El teorema de Bayes nos permite calcular la probabilidad de que una hipótesis sea cierta dada cierta información o evidencia y se deduce a continuación.

Teniendo dos eventos A y B y denotando la probabilidad como: \mathcal{P} , tenemos la probabilidad conjunta donde A y B ocurren juntos: $\mathcal{P}(A, B)$ y la probabilidad condicional o de que ocurra A dado que B ocurrió: $\mathcal{P}(A|B)$.

También utilizamos la regla de la suma:

$$\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\neq A) = 1 \quad , \quad (10.14)$$

y la regla del producto:

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(B)\mathcal{P}(A|B) \quad , \quad (10.15)$$

tenemos que:

$$\mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(B, A) \quad , \quad (10.16)$$

entonces tenemos:

$$\mathcal{P}(B, A) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A) \quad , \quad (10.17)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A, B) = \mathcal{P}(B)\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B, A) \quad , \quad (10.18)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A|B) = \frac{\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A)}{\mathcal{P}(B)} \quad . \quad (10.19)$$

La ecuación (10.19) es la representación de el teorema de Bayes en donde:

$\mathcal{P}(A|B)$ es el posterior.

$\mathcal{P}(A)$ es el prior.

$\mathcal{P}(B|A)$ es el likelihood.

$\mathcal{P}(B)$ es la evidencia.

El psoterior es la probabilidad de que un evento ocurra teniendo en cuenta nueva información o evidencia, o bien es la probabilidad de que un evento A ocurra dado el hecho de que el evento B ocurrió. El prior es la información previa de que ocurra un evento A sin tener en cuenta evidencia y el likelihood es la probabilidad de observar la evidencia B dado el evento A . La evidencia de B es la probabilidad de observar la evidencia sin tener en cuenta nada más.

El objetivo de la estadística Bayesiana es conocer el posterior o la probabilidad posterior, por ejemplo consideremos un lanzamiento de dos dados, y queremos conocer la probabilidad de que los dos dados sumen 8, si tenemos la evidencia de que uno de los dados arrojó un número menor o igual a 4, entonces escribimos:

$$\mathcal{P}(S_8|d_4) \quad , \quad (10.20)$$

que denota la probabilidad de que el evento donde la suma de los dos dados sea 8 ocurra dado que un dado es menor o igual a 4.

$$\Rightarrow \mathcal{P}(S_8|d_4) = \frac{\mathcal{P}(S_8)\mathcal{P}(d_4|S_8)}{\mathcal{P}(d_4)} \quad , \quad (10.21)$$

$\mathcal{P}(S_8)$ tiene un valor de 0.1388888889 debido a que los dos dados pueden arrojar 36 combinaciones diferentes de las cuales 5 de ellas pueden sumar 5, entonces:

$$\mathcal{P}(S_8) = \frac{5}{36} \simeq 13.9\% \quad , \quad (10.22)$$

el likelihood $\mathcal{P}(d_4|S_8)$ es la probabilidad de que un dado arrojó un número menor o igual a 4 dado que la suma de los dados es 8:

$$\mathcal{P}(d_4|S_8) = \frac{3}{5} \quad . \quad (10.23)$$

También tenemos que la evidencia es:

$$\mathcal{P}(d_4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad . \quad (10.24)$$

Finalmente implementando el teorema de Bayes:

$$\mathcal{P}(S_8|d_4) = \frac{(5/36) \times (3/5)}{(2/3)} = \frac{1}{8} \quad . \quad (10.25)$$

Sabemos que la probabilidad de que al arrojar dos dados y observar que uno de los dados arrojó un número menor o igual a 4, la suma de ambos dados sea 8 es de 12.5 %.

En el ejemplo anterior, las probabilidades fueron calculadas como proporciones entre cantidades, sin embargo, en general se requieren Distribuciones de Probabilidad para calcular el posterior; una distribución de probabilidad es una función matemática que da la probabilidad de que una variable aleatoria X sea igual a algún valor x_i , y se escribe como:

$$\mathcal{P}_X(x_i) = \mathcal{P}(X = x_i) \quad , \quad (10.26)$$

el prior $\Pi(\Theta)$ es una distribución de probabilidad que contiene conocimiento a priori sobre los parámetros Θ del modelo teórico, es decir, tenemos que asignar una distribución de probabilidad a cada parámetro. Esto puede ser no trivial de hacer si no tenemos alguna información sobre un parámetro o parámetros dados, en cuyo caso el prior se considera constante. El prior codifica el conocimiento previo sobre los parámetros del modelo. Con acceso a más información, el prior se ve más centrado alrededor de algún valor mas probable (línea azul en la Figura 10.3), mientras que si se tiene menos información, tenemos un prior más amplio (línea roja). Un prior plano es aquel con un valor constante para todo el rango de los parámetros (línea negra), y no se asigna ningún valor preferido a Θ , es decir que todos los valores posibles de los parámetros tienen la misma probabilidad a priori.

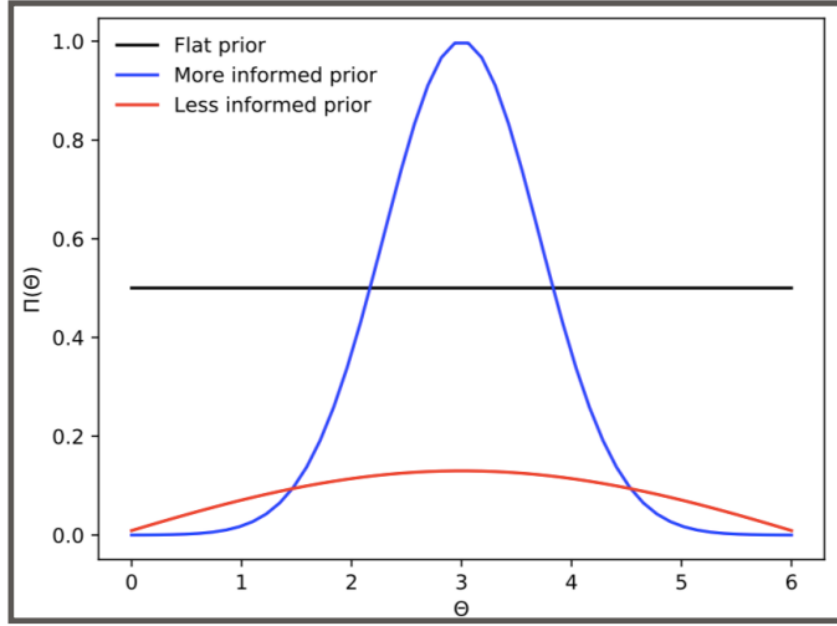


Figura 10.3: FRANCISCO XAVIER LINARES CEDEÑO, Estadística Bayesiana.

El término $\mathcal{P}(D|\Theta)$ comúnmente escrito como $\mathcal{L}(\Theta)$ se conoce como Likelihood, es una función que representa la probabilidad del parámetro Θ para cada valor de los datos D y depende solo de los parámetros ya que tiene que ser evaluada en los datos dados. La maximización de $\mathcal{L}(\Theta)$ constituye un paso crucial en el cálculo de las probabilidades, ya que da los valores de los parámetros que maximizan la probabilidad de acuerdo con los datos evaluados.

Más o menos información en los datos significa tener conocimiento sobre los valores reales de los parámetros; con más información, la probabilidad estará más centrada en algún valor particular de los parámetros que maximizan $\mathcal{L}(\Theta)$, mientras que menos información producirá un Likelihood más disperso.

La evidencia \mathcal{E} o distribución marginal. Puede verse como un factor de normalización, pero también es importante cuando se comparan dos modelos. Se calcula como:

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(D) = \int \Pi(\Theta) \mathcal{L}(\Theta) d\Theta \quad , \quad (10.27)$$

entonces, la evidencia es el Likelihood medio promediado sobre el prior. Al comparar dos modelos para saber cuál es el que mejor describe algún conjunto de datos, se debe calcular la razón de la evidencia de cada modelo.

Debido a que el análisis estadístico que se realiza en este trabajo tiene que ver con la estimación de parámetros de modelos teóricos, el procedimiento a seguir es calcular el posterior y tener entonces como resultado los valores más probables de los parámetros dados los datos experimentales. Podemos reescribir el Teorema de Bayes, con la nueva notación

como sigue:

$$\mathcal{P}(\Theta|D) = \frac{\Pi(\Theta)\mathcal{L}(\Theta)}{\mathcal{E}(D)} \quad . \quad (10.28)$$

Método de Monte Carlo

Los métodos de Monte Carlo son una colección de técnicas computacionales para la solución (generalmente aproximada) de problemas matemáticos, que hacen uso de muestreo aleatorio (generación de números pseudoaleatorios). Estos métodos son útiles para integración numérica, problemas de optimización y sirven también como un procedimiento de prueba de hipótesis. En 1970 Halton dio una definición de los métodos de Monte Carlo, él definió el método de Monte Carlo como: representar la solución de un problema como un parámetro de una población hipotética, y utilizando una secuencia de números aleatorios para construir una muestra de la población, a partir de la cual se pueden obtener estimaciones estadísticas del parámetro”.

Antes de proceder con la explicación es necesario exponer varias definiciones y teoremas.

Valor esperado.-

El valor esperado de alguna función $g(x)$ dependiente de la variable aleatoria X , para el caso en que X adopte valores discretos de una función densidad de probabilidad $p(x)$, se define como:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)p(x) \quad , \quad (10.29)$$

o bien para una variable continua:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \quad . \quad (10.30)$$

Varianza.-

Para una variable aleatoria X con media μ se define la varianza como:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] \quad . \quad (10.31)$$

Covarianza.-

La covarianza de dos variables aleatorias X de media μ_x y Y de media μ_y se define como:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] \quad . \quad (10.32)$$

Ley débil de los grandes números.-

Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ , entonces, si n tiende a infinito y para cada $\epsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) \rightarrow 0 \quad . \quad (10.33)$$

Ley fuerte de los grandes números.-

Bajo las condiciones de la ley débil de los grandes números se tiene que con probabilidad 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu \quad . \quad (10.34)$$

Teorema central del límite.-

Dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas: X_1, X_2, \dots , con media finita μ y varianza finita σ^2 se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < X \right) = \Phi(X) \quad , \quad (10.35)$$

donde $\Phi(X)$ es una distribución Gaussiana.

La ley fuerte de los grandes números es el fundamento para realizar integrales numéricas por el método de Monte Carlo. La definición del valor esperado nos permite interpretar una integral $\int_a^b g(x)dx$ como el valor esperado, μ , de la función $g(x)$ respecto a una distribución de probabilidad uniforme definida para $a \leq x \leq b$; es decir, si:

$$f(x) = \text{Unif}(a, b) = \frac{1}{b-a}$$

Multiplicando por $(b - a)$ se tiene

$$I = \int_a^b g(x)dx = (b - a) \int_a^b g(x)f(x)dx = (b - a)E[g(x)] \quad , \quad (10.36)$$

con: $X \approx \text{Unif}(a, b)$ y después podemos hacer uso de la ley fuerte de números grandes para aproximar el último valor esperado mediante el promedio de una muestra de tamaño n de la variable aleatoria distribuida uniformemente, si se toma a n lo suficientemente grande. Entonces:

$$I = \int_a^b g(x)dx = (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad . \quad (10.37)$$

Entonces se puede utilizar lo anterior para aproximar la solución de una integral no analítica, se debe tener en cuenta que en la práctica n no puede ser infinito, pero se busca que sea lo más grande posible para mejorar la resolución del resultado y también uno debe considerar el algoritmo mediante el cual se generan los números aleatorios para no caer en errores estadísticos. (Las definiciones y teoremas anteriores se tomaron de: [78].

Proceso Estocástico.-

Es un proceso que nos permite caracterizar la evolución de variables aleatorias, una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in T\}$, donde X_t toma valores de un espacio de estados y cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y pueden o no estar correlacionadas entre sí, entonces es posible construir una cadena de Markov que es un proceso estocástico $\{X_n : n \in T\}$ donde:

$$\mathcal{P}(X_n = x | X_0, \dots, X_{n-1}) = \mathcal{P}(X_n = x | X_{n-1}) \quad , \quad (10.38)$$

$\forall n, x$

entonces una cadena de Markov es una sucesión de valores de una variable aleatoria en donde la probabilidad de alcanzar el valor X_n depende únicamente del valor previo X_{n-1} . Esta condición se conoce como la propiedad de Markov.

Probabilidad de transición.-

En una cadena homogénea finita se define la probabilidad de transición de un estado a otro de la cadena como:

$$p_{ij} \equiv P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad , \quad (10.39)$$

con P siendo la matriz de transición con entradas (i, j) .

Para cada i fijo, la serie de valores $\{p_{ij}\}$ son una distribución de probabilidad, ya que en cualquier paso puede ocurrir alguno estados posibles que son mutuamente excluyentes.

Estado recurrente.-

Un estado se llama recurrente si:

$$\mathcal{P}(X_n = i \text{ para algún } n \geq 1 | X_0 = i) = 1 \quad , \quad (10.40)$$

en otro caso, el estado es transitorio.

No se puede extraer mucha información de una cadena de Markov que nunca converge, al aplicar métodos MCMC es necesario que las cadenas de Markov convergan, características importantes de la convergencia de cadenas de Markov son:

Una cadena de Markov es irreducible si para cada par de estados i, j hay una probabilidad positiva de que el proceso transite del estado i al estado j .

Tiempo de recurrencia.-

Si asumimos que $X_0 = i$, el tiempo de recurrencia es:

$$T_{ij} = \min\{n > 0 : X_n = j\} \quad , \quad (10.41)$$

si X_n retorna al estado i , de lo contrario $T_{ij} = \infty$.

Una cadena de Markov se denomina aperiódica si no oscila regularmente entre valores de la variable.

Un estado se llama ergódico si es recurrente, no nulo y aperiódico. Se dice que una cadena en sí misma es ergódica si todos sus estados son ergódicos.

Un vector $\pi = (\pi_i : i \in \mathcal{X})$ cuyas entradas no negativas sumen 1, puede pensarse como un función discreta de probabilidad.

Distribución Estacionaria.-

π es una distribución estacionaria si $\pi = \pi P$. Y se dice que la cadena tiene una distribución límite si:

$$P^n \rightarrow \begin{Bmatrix} \pi \\ \pi \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi \end{Bmatrix}$$

para algún π , es decir si: $\pi_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^n$ existe y es independiente de i .

Se dice que π satisface la condición del balance detallado si:

$$\pi_i p_{ij} = p_{ij} \pi_j.$$

Una cadena de Markov ergódica e irreducible tiene una única distribución estacionaria π . Si g es una función acotada, entonces, con probabilidad 1:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(X_n) \rightarrow \mathbb{E}_\pi(g) \equiv \sum_j g(j) \pi_j \quad , \quad (10.42)$$

que es una generalización de la ley fuerte de los grandes números para cadenas de Markov.

Si π satisface el balance detallado, entonces π es una distribución estacionaria. La explicación se tomó de: [79], [80], [81], [82] y [78].

Un experimento simple para ejemplificar el método de Monte Carlo es considerar gotas de lluvia que caen uniformemente y al azar sobre alguna región cuadrada de espacio, y consideremos también un círculo inscrito dentro de ese cuadrado. Es intuitivo pensar que la probabilidad de que una gota de lluvia caiga en cualquier punto dentro del cuadrado debe ser proporcional al área de esa región e independiente de su ubicación. En consecuencia, la probabilidad, p , de que una gota de lluvia se encuentre dentro del círculo inscrito puede expresarse en términos de sus áreas. Si el cuadrado tiene lados de longitud $2r$, el círculo debe ser de radio r y: $p = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \pi/4$

Entonces habiendo expresado π en función de una probabilidad, podemos estimar su valor con el método de Monte Carlo, no es posible proceder analíticamente ya que para obtener la probabilidad necesitamos información a priori de π que en este caso estamos considerando su valor como completamente desconocido. Intuitivamente, es posible estimar esta probabilidad contando la proporción de gotas de lluvia que se encuentran dentro del círculo: si se observan n gotas de lluvia y m de ellas se encuentran dentro del círculo, entonces se puede estimar el valor de π . (El ejemplo anterior se expone en: [78])

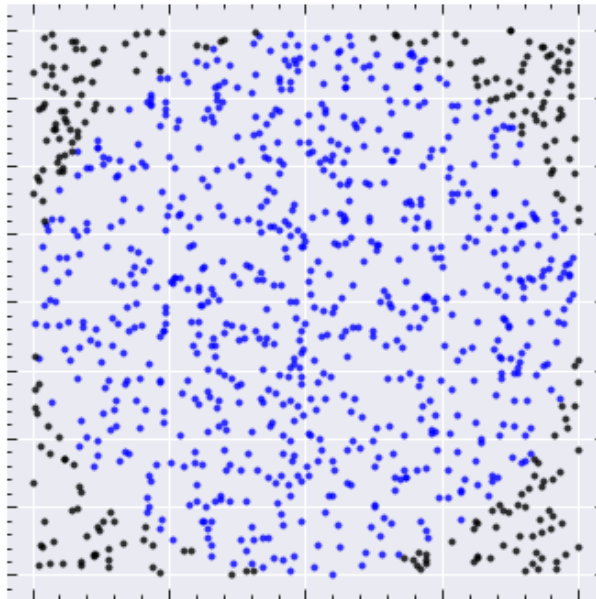


Figura 10.4: Estimación de π con 1000 gotas de lluvia el valor estimado es 3.1480.

Entre más gotas usamos en la estimación, mejor va a ser el resultado, si usamos 1000 gotas tenemos que $\pi = 3.1480$, mientras que para 10000 gotas, $\pi = 3.1388$

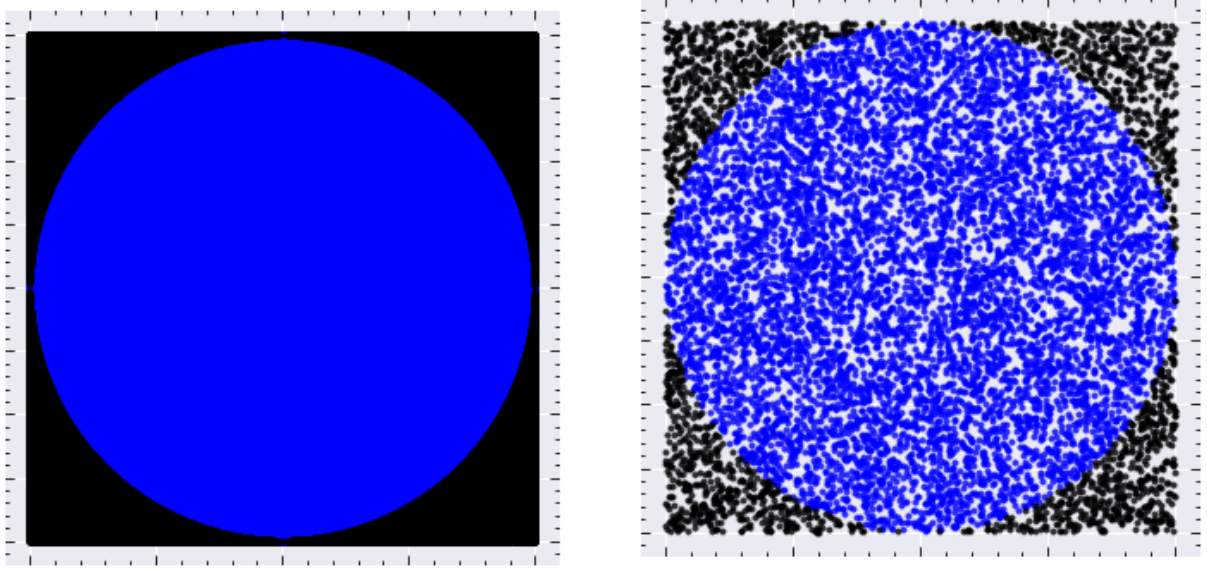


Figura 10.5: En el cuadro de la izquierda se usó: $n = 100000000$ y se obtuvo un valor para $\pi = 3.1416$ y en la derecha con $n = 10000$ se obtuvo $\pi = 3.1388$.

La figura 10.5 es solo un ejemplo de la versatilidad de los métodos de Monte Carlo, se puede estimar el valor de π y es importante tener en cuenta la importancia del número de iteraciones de estos algoritmos.

10.3. El sistema Schrödinger-Poisson

Las ecuaciones Einstein-Klein-Gordon tienen un límite Newtoniano al que se llega siguiendo el formalismo Post-Newtoniano de la gravedad, en este formalismo se utiliza el hecho de que el cociente entre la velocidad característica relativa de las fuentes y la velocidad de la luz, sea muy pequeño, entonces se puede hacer una expansión perturbativa de las ecuaciones de Einstein y son buenas aproximaciones a lo que se esperaría encontrar con las ecuaciones completas. El formalismo Post-Newtoniano o a primer orden límite Newtoniano se ha utilizado para hacer correcciones a la órbita Newtoniana de Mercurio, corroborando la predicción de la Relatividad General y también en cálculos de los sistemas binarios de estrellas. La aproximación consiste en calcular las observables en el sistema de interés. Las ecuaciones de Schrödinger Poisson se reconocen en la literatura como el límite Newtoniano de las ecuaciones Einstein Klein Gordon.

Buscamos encontrar el comportamiento de la velocidad orbital producida por el perfil de densidad de una estrella de bosones en el estado base y en el caso donde esta no presenta rotación, para eso partimos del sistema SP:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + mV\psi \quad , \quad (10.43)$$

$$\nabla^2 V = 4\pi G m^2 \psi^2 \quad . \quad (10.44)$$

Por conveniencia se introducen las variables adimensionales:

$$\psi = \bar{\psi} \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad , \quad r = \bar{r} \frac{\hbar}{\epsilon m c} \quad , \quad \nabla = \bar{\nabla} \frac{\epsilon m c}{\hbar} \quad , \quad V = \bar{V} \epsilon^2 c^2 \quad , \quad (10.45)$$

Entonces sustituimos en la ecuación (10.106) tenemos

$$E \left(\frac{\bar{\psi} \epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \right) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\bar{\nabla} \frac{\epsilon m c}{\hbar} \right)^2 + m \bar{V} \epsilon^2 c^2 \right) \frac{\bar{\psi} \epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad , \quad (10.46)$$

entonces

$$E \bar{\psi} = \left(-\frac{\bar{\nabla}^2}{2} + \bar{V} \right) \bar{\psi} \epsilon^2 c^2 m \quad , \quad (10.47)$$

y se tiene que $E = \bar{E} \epsilon^2 m c^2$

$$\Rightarrow \bar{E} \bar{\psi} = \left(-\frac{\bar{\nabla}^2}{2} + \bar{V} \right) \bar{\psi} \quad . \quad (10.48)$$

Realizando el mismo cambio de variables para la ecuación (10.107) se tiene

$$\bar{\nabla}^2 \left(\frac{m c}{\hbar} \right)^2 \left(\bar{V} \epsilon^2 c^2 \right) = 4\pi G m^2 \left(\bar{\psi}^2 \left(\frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \right)^2 \right) \quad , \quad (10.49)$$

entonces

$$\bar{\nabla}^2 \bar{V} = \bar{\psi}^2 \quad , \quad (10.50)$$

tomando que ψ tiene dependencia radial y que en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad , \quad (10.51)$$

omitiendo las barras tenemos

$$E\phi = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + V\phi \quad , \quad (10.52)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 \phi}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + V\phi = E\phi \quad , \quad (10.53)$$

si tomamos que el valor E es el eigenvalor de la energía y entonces $E \rightarrow \gamma$ y tenemos

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + 2V\phi - 2\gamma\phi \quad , \quad (10.54)$$

para la ecuación de Poisson se tiene

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \phi^2 \quad , \quad (10.55)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dr^2} = \phi^2 - \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} \quad , \quad (10.56)$$

entonces mediante el método de Shooting buscamos condiciones ϕ_0 que forman una familia de soluciones y se introduce una λ de re-escalamiento para recuperar r , ϕ y U , entonces tenemos:

$$r \rightarrow r\lambda \quad , \quad \phi \rightarrow \frac{\phi}{\lambda^2} \quad , \quad U \rightarrow \frac{U}{\lambda^2} \quad , \quad (10.57)$$

entonces tenemos:

$$\frac{1}{\lambda^4} \frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2}{r\lambda^4} + \frac{2}{\lambda^4} \hat{U}\phi \quad , \quad (10.58)$$

$$\frac{1}{\lambda^4} \frac{d^2U}{dr^2} = \frac{\phi^2}{\lambda^4} - \frac{2}{r\lambda^4} \frac{dU}{dr} \quad , \quad (10.59)$$

factorizando $\frac{1}{\lambda^4}$ llegamos al sistema:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + 2(U - \gamma)\phi \quad , \quad (10.60)$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \phi^2 - \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} \quad , \quad (10.61)$$

haciendo los cambios de variable:

$$y_1 = \phi \quad , \quad y_2 = \frac{d\phi}{dr} \quad , \quad (10.62)$$

$$y_3 = U \quad , \quad y_4 = \frac{dU}{dr} \quad , \quad (10.63)$$

$$y_5 = \gamma \rightarrow \frac{dy_5}{dr} = 0 \quad , \quad (10.64)$$

se tiene el nuevo sistema

$$\frac{d^2 y_1}{dr^2} = \frac{dy_2}{dr} = -\frac{2}{r}y_2 + 2y_3y_1 = -\frac{2}{r}y_2 + 2y_1(y_3 - y_5) \quad (10.65)$$

$$\frac{dy_4}{dr} = y_1^2 - \frac{2}{r}y_4 \quad , \quad (10.66)$$

con las condiciones iniciales:

$$\phi_0 = y_1(r=0) = 1 \quad , \quad \phi'_0 = y_2(r=0) = 0 \quad , \quad (10.67)$$

$$U_0 = y_3(r=0) = x_1 \quad , \quad U'_0 = y_4(r=0) = 0 \quad , \quad (10.68)$$

$$\gamma(r=0) = y_5(r=0) = x_2 \quad , \quad (10.69)$$

con condiciones de frontera para $r \rightarrow \infty$ siendo:

$$\phi = y_1 = 0 \quad , \quad U = y_3 = -\frac{M}{r} \quad , \quad (10.70)$$

entonces el sistema a resolver numéricamente tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \\ y'_4 \\ y'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{2}{r}y_2 + 2y_1(y_3 - y_5) \\ y_4 \\ y_1^2 - \frac{2}{r}y_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.71)$$

Y de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 U = 4\pi G m^2 \Psi \Psi^* \quad (10.72)$$

se tiene que la amplitud del campo escalar para las configuraciones Newtonianas es

$$|\Psi| \approx \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad , \quad (10.73)$$

entonces tenemos que un campo escalar Φ es Newtoniano si es de la forma $\Phi = \exp \left[-i/\hbar m c^2 t \Psi(\vec{x}, t) \right]$ y cumple con las derivadas

$$\partial_0 \Psi \approx \epsilon^2 \frac{i}{\hbar} m c \Psi \quad , \quad (10.74)$$

$$\partial_i \Psi \approx \epsilon \frac{i}{\hbar} m c \Psi \quad , \quad (10.75)$$

y el orden de magnitud del campo escalar Newtoniano es

$$|\Phi| \approx \frac{\epsilon^2 c^2}{\hbar \sqrt{4\pi G}} \quad (10.76)$$

de manera habitual, se tiene que la velocidad orbital es

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \quad , \quad (10.77)$$

entonces combinando las ecuaciones anteriores tenemos una velocidad orbital de la forma:

$$v_c^2 = \frac{G}{r} \frac{\epsilon}{m} \int_0^R \phi^2 r^2 d\bar{r} \quad . \quad (10.78)$$

10.4. Metodología para resolver el sistema SP (estrellas de bosones)

Para resolver el sistema de ecuaciones SP se utilizaron el método de Shooting, el método de Runge-Kutta y el método de Newton–Raphson.

10.4.1. Método de Newton–Raphson

El método N-R es un algoritmo que permite realizar un cálculo iterativo y aproximado a las raíces de una función real, se parte de una función $f(x)$, de su derivada $f'(x)$ y de un valor inicial x_0 como raíz de la función. Entonces partiendo del valor inicial se aproxima a la función con su recta tangente, es decir se linealiza la función por la recta tangente a partir de x_0 . La abscisa en el origen de dicha recta será, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método llegue a una convergencia, lo cual no siempre está garantizado, sin embargo, entre más cercano sea el valor de x_0 a la raíz verdadera mejor será la convergencia, esto también se puede complicar si la función cuenta con puntos de inflexión o pendientes grandes cercanas a la raíz. Sea una función $f(x)$ derivable en un intervalo $[a, b]$ y con una raíz cerca del punto $x = x_0$ entonces una primera aproximación a la raíz será:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad , \quad (10.79)$$

dependiendo del poder de computo y del tiempo disponible, se puede escoger la exactitud deseada:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad (10.80)$$

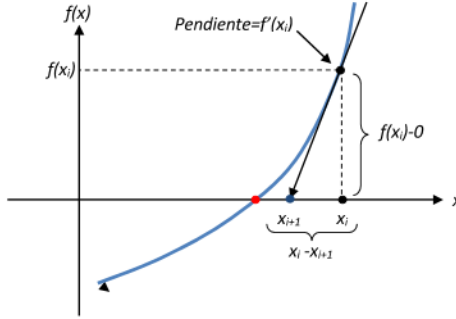


Figura 10.6

En la figura 10.6 se muestra la aproximación a la raíz de una función con su recta pendiente. fuente: Método de Newton-Raphson en Matlab, Miguel Ángel Flores.

Consideremos una función

$$f(x) = x^2 - 4x - 7 \quad , \quad (10.81)$$

con un $x_0 = 5$.

Entonces tenemos como primera aproximación:

$$x_1 = 5 - \frac{5^2 - 4 \times 5 - 7}{2 \times 5 - 4} = \frac{16}{3} \approx 5.33333 \quad , \quad (10.82)$$

Y para x_3

$$x_3 = \frac{319}{60} - \frac{\left(\frac{319}{60}\right) - 4\left(\frac{319}{60}\right) - 7}{2\left(\frac{2319}{60}\right) - 4} \approx 5.31662 \quad . \quad (10.83)$$

Tenemos que para esta función nos podemos detener en el x_3 ya que parece ser que los valores de la raíz convergen a 5.31662, la iteración $x_4 = 5.31662$ entonces se puede usar el valor de 5.317 como raíz de la función. Este ejemplo se tomó de (brilliant.org/wiki/Newton-Raphson-Method).

10.4.2. Método de Runge-Kutta

Es una familia de métodos iterativos para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias, el más común de estos es el método de Runge-Kutta de orden 4, este método nos permite realizar una aproximación a las soluciones de ecuaciones diferenciales

ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial.

Sea $y'(t) = f(t, y(t))$ una ecuación diferencial ordinaria sujeta a la condición inicial (t_0, y_0) el método de Runge-Kutta de orden s es

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad , \quad (10.84)$$

en donde h es el paso por cada iteración entre puntos t_n y t_{n+1} y k_i son los términos de aproximación intermedios, evaluados en de manera local y son de la forma:

$$k_i = f\left(t_n + hc_i, y_n + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \quad , i = 1, \dots, s \quad , \quad (10.85)$$

los coeficientes a_{ij}, b_i, c_i dependen del esquema numérico elegido, por ejemplo para R-K de cuarto orden tenemos que para un problema de valores iniciales:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad (10.86)$$

el método R-K4 toma la forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad , \quad (10.87)$$

con:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (10.88)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (10.89)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (10.90)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad , \quad (10.91)$$

entonces el valor (y_{n+1}) depende del valor anterior y_n más el producto de h por una pendiente estimada de la forma:

$$m = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \quad , \quad (10.92)$$

entonces el error por paso es de orden $O(h^5)$ y el error total acumulado y la convergencia del método son de orden $O(h^4)$. Consideremos un caso sencillo donde tenemos la ecuación: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y deseamos encontrar la solución $y(x)$, naturalmente existe una solución analítica de la forma $f(x, y) = \frac{dy}{dx} = x^2$ y consideramos condiciones iniciales: $x_0 = 1$ y

$y_0 = 1$ la solución es $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$ y buscamos comparar la solución analítica con la solución que obtenemos del método R-K4, entonces tenemos que conocer el valor de $y = y_0$ para algún valor inicial $x = x_0$ y después movernos de esa condición inicial usando pasos de un tamaño adecuado Δx y después buscamos conocer el valor en el cambio de y por cada paso en x con el cambio por paso dado por $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$.

Si utilizamos el valor de $h = \Delta x = 0.1$ obtenemos numéricamente la solución y entonces la comparamos con la solución analítica en la figura 10.7

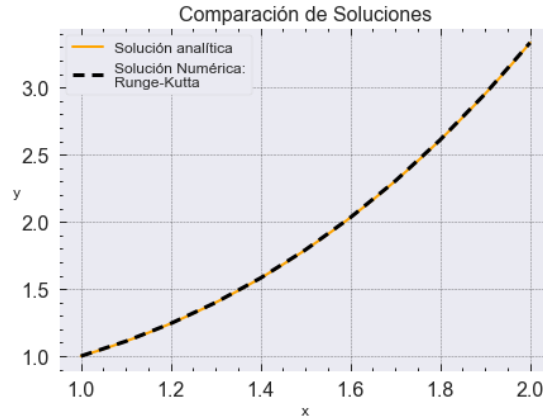


Figura 10.7: Comparación de las soluciones analítica y numérica con el método RK4 para la ecuación $\frac{dy}{dx} = x^2$.

10.4.3. Método de Shooting

El sistema de ecuaciones para estrellas de bosones en estado base implica encontrar condiciones iniciales teniendo condiciones de frontera, se utiliza entonces el método de Shooting para transformar valores de frontera en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a condiciones iniciales, también se trata de un método iterativo que depende de un valor inicial. Se busca encontrar condiciones iniciales partiendo de una estimación inicial y llegar a soluciones que satisfagan las condiciones de frontera, el nombre de este método es una analogía del método, si consideramos varias trayectorias que van hacia diferentes direcciones (condiciones de frontera) podemos calcular el error entre el punto donde terminan las trayectorias y compararlo con nuestras condiciones de frontera partiendo de una condición inicial entonces se estima de manera iterativa la condición inicial apropiada para el problema que se tenga. La explicación del método se toma de [83].

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por $f(a) = f_a$ y $f(b) = f_b$

$$F\left(x, f(x), \frac{df(x)}{dx}\right) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad . \quad (10.93)$$

1.- El primer paso del algoritmo es proponer un valor $f'(a) = \alpha$ y junto a $f(a) = f_a$ se convierte el problema a un problema de condiciones iniciales con dos condiciones en $x = a$ a este paso se le considera el paso donde se apunta.

2.- Después se puede utilizar el método de runge-Kutta para integrar y llegar hasta la frontera b para poder encontrar $f(b) = f_B$ este paso se le considera como el "disparo".

3.- El tercer paso en el algoritmo consiste en comparar los valores de f_B y f_b normalmente si el valor inicial que se propone en el paso 1 no es bueno se tiene que $f_B \neq f_b$ pero se busca que $f_B - f_b = 0$ entonces se ajusta el valor inicial hasta llegar a un valor aceptable que es cercano a 0, este paso es el paso iterativo del algoritmo.

El paso 3 puede ser tardado si se cuenta con valores iniciales malos. Estimar los valores para que $f_B - f_b = 0$ se puede considerar como un problema de encontrar raíces y entonces tenemos una manera sistemática de ajustar los valores iniciales; f_B es una función que depende de α entonces queremos encontrar las raíces de $f(\alpha) - f_b = 0$.

10.5. χ_r^2 obtenida con mínimos cuadrados

Para ahorrar tiempo de computo al correr el algoritmo MCMC afín invariante y como resultados preliminares se utilizó una regresión no lineal por mínimos cuadrados para ajustar los parámetros de los perfiles de densidad, esto nos dio una buena idea de como escoger los priors y el estado inicial al ajustar parámetros con emcee. en el Cuadro 10.1 se reportan estos valores.

χ_r^2 obtenida con mínimos cuadrados						
Galaxia	Comentarios	NFW	B&H	B&H mod	P-iso	Einasto
F563-1	Tipo Magallanes, Irregular	0.0926	0.1677	0.0978	0.0871	0.0987
F568-3	Espiral con barra magallanica	2.1849	2.0003	2.5613	0.5055	0.1472
F571-8	De canto	1.4539	0.5398	1.7342	1.3825	0.4456
F579-v1	Núcleo, brazos floclantes	0.2056	1.923	0.2543	0.0254	0.1622
F583-1	Tipo Magallanes, Irregular	0.7591	0.4871	0.8244	0.0418	0.0176
F583-4	Difusa	0.6266	0.2853	0.2976	0.3588	0.1908
F730-v1	Espiral	1.027	0.816	1.3263	0.0829	0.1989
U4115	Nudosa y difusa	0.7825	0.7798	0.8623	0.0039	0.0021
U5750	Con barra Magallanica	1.3095	1.0373	1.4825	0.1523	0.0159
U6614	De bulbo con anillo espiral	3.6377	9.0949	3.989	1.936	3.1139
U11454	Espiral Difusa, núcleo pequeño	2.887	2.064	3.4562	0.3821	0.6649
U11557	Espiral Difusa, núcleo pequeño	1.4361	1.424	1.9374	0.0514	0.0476
U11583	Tenue con barra Magallanica	0.7168	0.7125	4.2086	0.1056	0.058
U11616	Difusa irregular	1.4612	1.3952	2.943	0.1717	0.4457
U11648	Irregular	0.9407	1.7203	1.550	3.7392	0.801
U11748	Irregular, núcleo brillante / barra?	3.546	56.710	4.2633	5.7194	3.6098
U11819	Difusa	1.3973	1.013	2.4552	0.316	0.1169
ESO0140040	De bulbo, brazos espirales apretados	0.1416	1.4489	0.1987	0.1817	0.0869
ESO0840411	De canto	1.7094	1.6953	4.910	1.6953	0.0652
ESO1200211	Difusa con barra Magallanica	0.2386	0.3564	2.678	0.078	0.0866
ESO1870510	Espiral irregular, floclante	0.0569	0.0697	0.0673	0.0284	0.0211
ESO2060140	Espiral	0.4202	0.7581	0.6023	0.1058	0.0898
ESO3020120	Espiral / barra?	0.3284	0.2134	0.3623	0.0339	0.0104
ESO3050090	Espiral con barra	0.2182	0.2166	0.2738	0.048	0.0189
ESO4250180	Espiral abierta con barra	0.0127	0.0125	0.0149	0.0951	0.0074
ESO4880049	Inclinada con barra Magallanica	0.1648	0.1387	0.1883	0.0171	0.0094

Cuadro 10.1

10.6. Código de el ajuste de parámetros con emcee

Se escogió una galaxia al azar para presentar como ejemplo del código de Python que se escribió para ajustar parámetros con emcee, se utilizan dos perfiles de densidad como ejemplo, para los demás perfiles de densidad y galaxias se utilizó un código similar, cambiando el número de iteraciones, el tamaño del paso, el número de caminadores y obviamente el perfil de densidad y los datos experimentales.

Ajuste de parámetros con emcee

January 25, 2023

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import emcee
import corner
import pandas as pd
from scipy import integrate
from getdist import plots, MCSamples
import getdist
%matplotlib inline
```

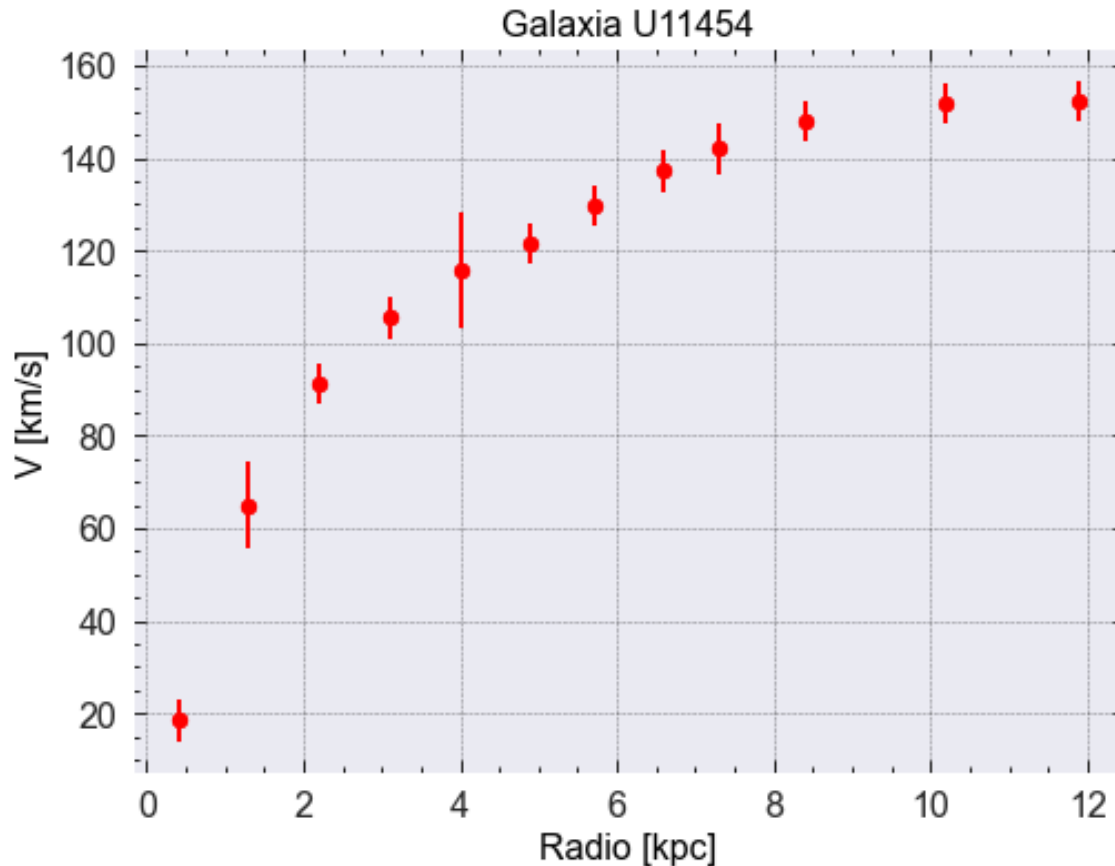
```
[3]: plt.style.use(['science', 'notebook', 'grid', 'seaborn-bright'])
```

```
[4]: """Se lee archivo .txt con los datos experimentales. """
df = pd.read_csv('U11454.txt', header=None, delimiter=r"\s+") #Datos de la
↳galaxia
rad = np.array(df.iloc[:, 1].tolist()) #c1 = radio (kpc)
vel = np.array(df.iloc[:, 5].tolist()) #c5 = Velocidad (km/s)
err = np.array(df.iloc[:, 6].tolist()) #c6 = Error (km/s)
print('radio = ', rad, 'vel = ', vel, 'error = ', err, 'Num. Datos = ', len(rad))
G = 6.6743e-11 # m3*kg-1*s-2
#1kpc = 3.086e+19 m (SI)
#1Msun/pc3 = 6.76977e-20 kg*m-3
#hbar = 1.054571817e-34 J*s = 1.054571817e-34 kg*m2*s-1
```

```
radio = [ 0.4  1.3  2.2  3.1  4.   4.9  5.7  6.6  7.3  8.4 10.2 11.9] vel = [
18.5  65.   91.4 105.5 115.9 121.7 129.7 137.2 142.1 148.1 151.9 152.2] error =
[ 4.4  9.3  4.4  4.4 12.4  4.4  4.4  4.4  5.5  4.4  4.4  4.4] Num. Datos = 12
```

```
[5]: """Visualización de los datos experimentales"""
plt.title('Galaxia U11454', color='black')
plt.scatter(rad, vel, label='Datos experimentales', color = 'red')
plt.errorbar(rad, vel, yerr=err, fmt="o", color = 'red')
plt.xlabel('Radio [kpc]', color = 'black')
plt.ylabel('V [km/s]', color = 'black')
```

```
[5]: Text(0, 0.5, 'V [km/s]')
```



```
[6]: """Se define la velocidad orbital del perfil Navarro-Frenk-White."""
def NFW(theta,r=rad):
    R_0, c_NFW = theta #theta = vector con los parámetros que se buscan ajustar
    return (c_NFW * np.sqrt((1/r)*(np.log(1 + (r/R_0)) - ((r/R_0)/(1+(r/
    ↪R_0))))))
```

```
[7]: """función likelihood."""
def lnlike(theta, x, y, yerr):
    return -0.5 * np.sum(((y - NFW(theta, x))/yerr) ** 2)
```

```
[8]: """Priors."""
def lnprior(theta):
    R_0, c_NFW = theta
    if 0.0 < R_0 < 40 and 0.0 < c_NFW < 4500:
        return 0.0
    return -np.inf
```

```
[9]: """Función de probabilidad."""
def lnprob(theta, x, y, yerr):
    lp = lnprior(theta)
```

```

    if not np.isfinite(lp):
        return -np.inf
    return lp + lnlike(theta, x, y, yerr)

```

```

[10]: """Se definen: número de caminadores, número de pasos, estado inicial,
      dimensión del espacio de parámetros y el tamaño del paso."""
data = (rad, vel, err)
nwalkers = 400
niter = 8000
initial = np.array([19.0125064 , 1720.97164712])
ndim = len(initial)
p0 = [np.array(initial) + 1 * np.random.randn(ndim) for i in range(nwalkers)]

```

```

[17]: """corre emcee"""
def main(p0,nwalkers,niter,ndim,lnprob,data):
    sampler = emcee.EnsembleSampler(nwalkers, ndim, lnprob, args=data)
    ↪#muestreo del espacio de parámetros
    p0, _, _ = sampler.run_mcmc(p0, 100)
    sampler.reset()
    print("Running production...")
    pos, prob, state = sampler.run_mcmc(p0, niter)
    return sampler, pos, prob, state
sampler, pos, prob, state = main(p0,nwalkers,niter,ndim,lnprob,data)
samples = sampler.flatchain
samples[np.argmax(sampler.flatlnprobability)] #parámetros más probables para el
    ↪mejor ajuste

```

Running production...

```

[17]: array([ 19.01299737, 1720.98122792])

```

```

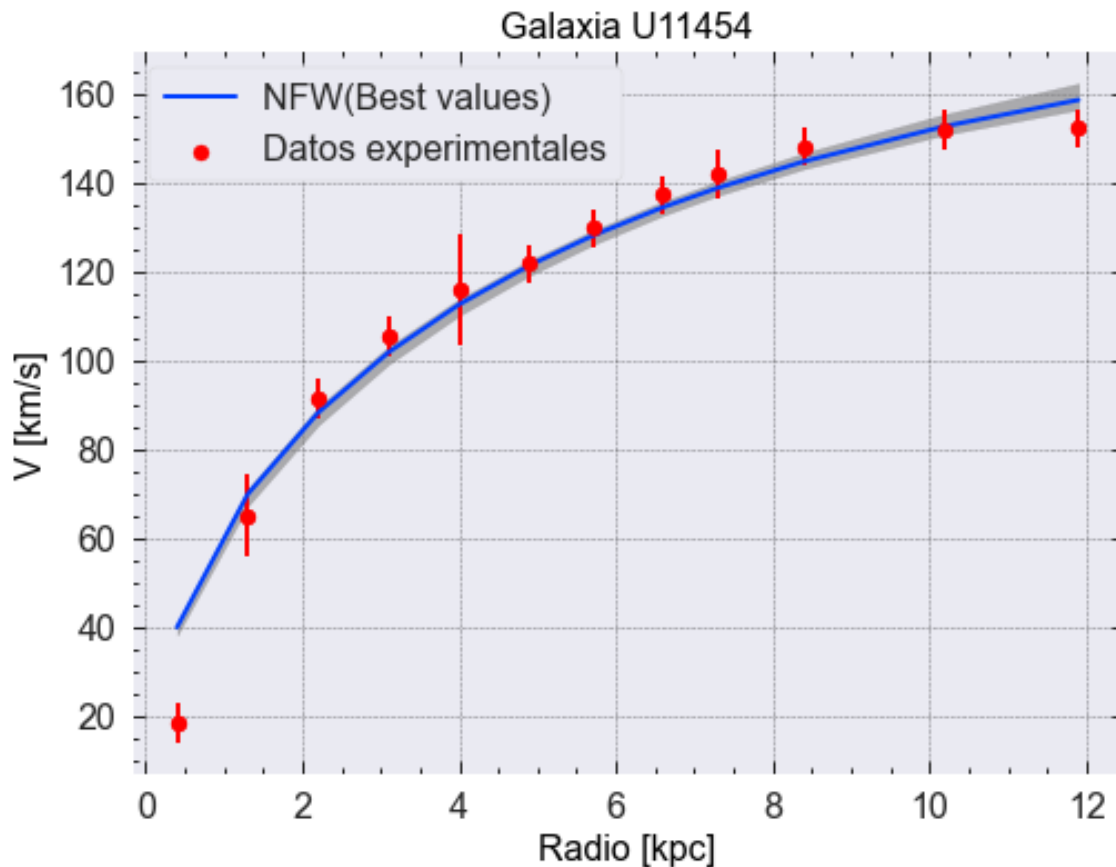
[12]: """Curva de rotación con la región de mayor probabilidad sombreada en gris."""
theta_max = samples[np.argmax(sampler.flatlnprobability)]
best_fit_model = NFW(theta_max)
def sample_walkers(nsamples,flattened_chain):
    models = []
    draw = np.floor(np.random.uniform(0,len(flattened_chain),size=nsamples)).
    ↪astype(int)
    thetas = flattened_chain[draw]
    for i in thetas:
        mod = NFW(i)
        models.append(mod)
    spread = np.std(models,axis=0)
    med_model = np.median(models,axis=0)
    return med_model,spread
med_model, spread = sample_walkers(600,samples)

plt.title('Galaxia U11454', color='black')

```

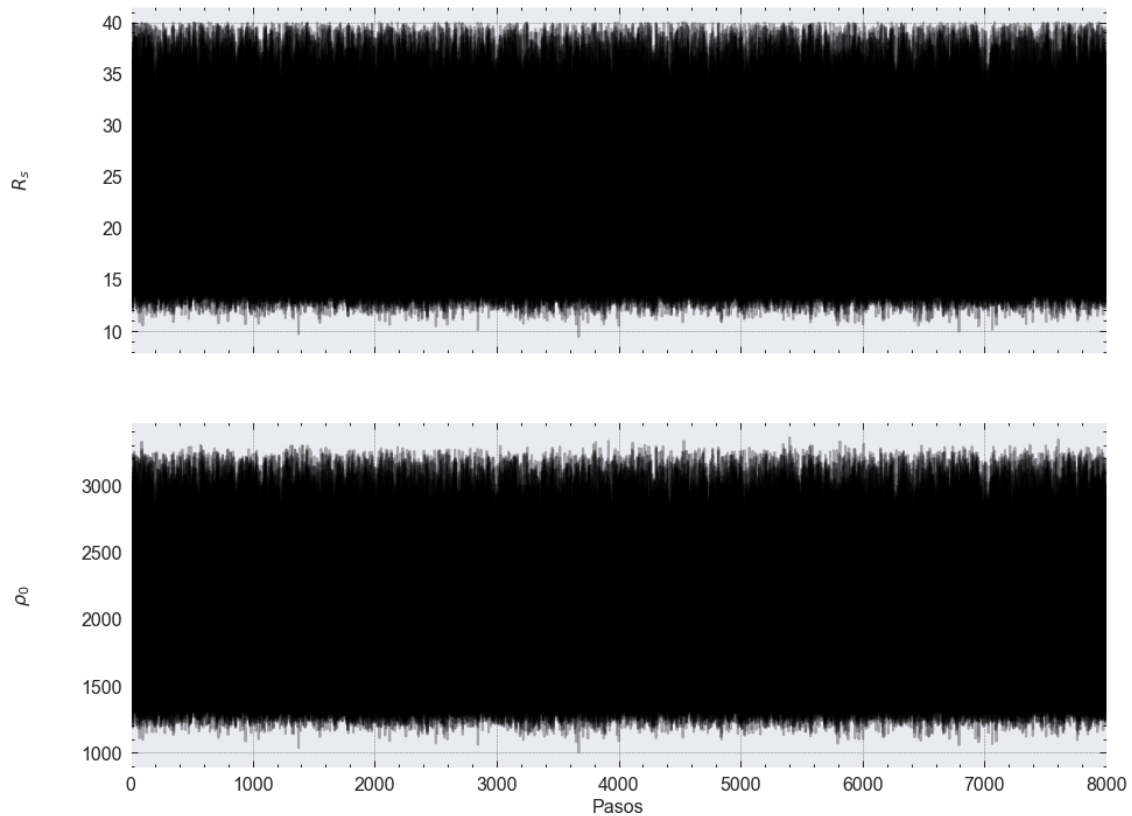
```
plt.scatter(rad, vel, label='Datos experimentales', color = 'red')
plt.errorbar(rad, vel, yerr=err, fmt="o", color = 'red')
plt.xlabel('Radio [kpc]',color = 'black')
plt.ylabel('V [km/s]',color='black')
plt.plot(rad,best_fit_model,label='NFW(Best values)')
plt.legend(loc = 'lower right',fontsize=12)
plt.fill_between(rad,med_model-spread,med_model+spread,color='grey',alpha=0.6)
plt.legend()
```

[12]: <matplotlib.legend.Legend at 0x2c4875a71c0>



```
[13]: """Ubicación de los caminadores en el espacio de parámetros con cada paso."""
fig, axes = plt.subplots(2, figsize=(15, 12), sharex=True)
samples = sampler.get_chain()
labels = [r"$R_{s}$", r"$\rho_{0}$"]
for i in range(ndim):
    ax = axes[i]
    ax.plot(samples[:, :, i], "k", alpha=0.3)
    ax.set_xlim(0, len(samples))
    ax.set_ylabel(labels[i])
```

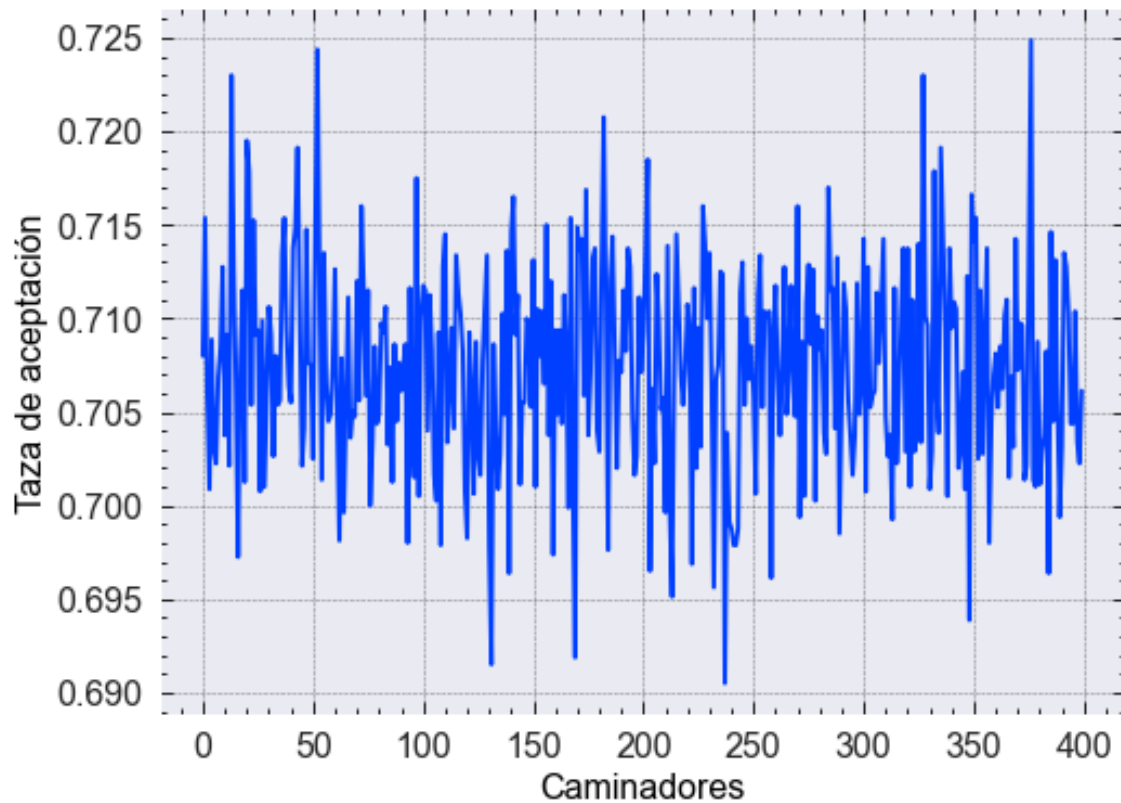
```
ax.yaxis.set_label_coords(-0.1, 0.5)
axes[-1].set_xlabel("Pasos");
```



```
[25]: """Tazas de aceptación de los caminadores."""
print("Mean acceptance rate is: {0:1.2f}".format(np.mean(sampler.
    ↳ acceptance_fraction)))
plt.plot(sampler.acceptance_fraction)
plt.xlabel('Caminadores',color='black')
plt.ylabel('Taza de aceptación',color='black')
```

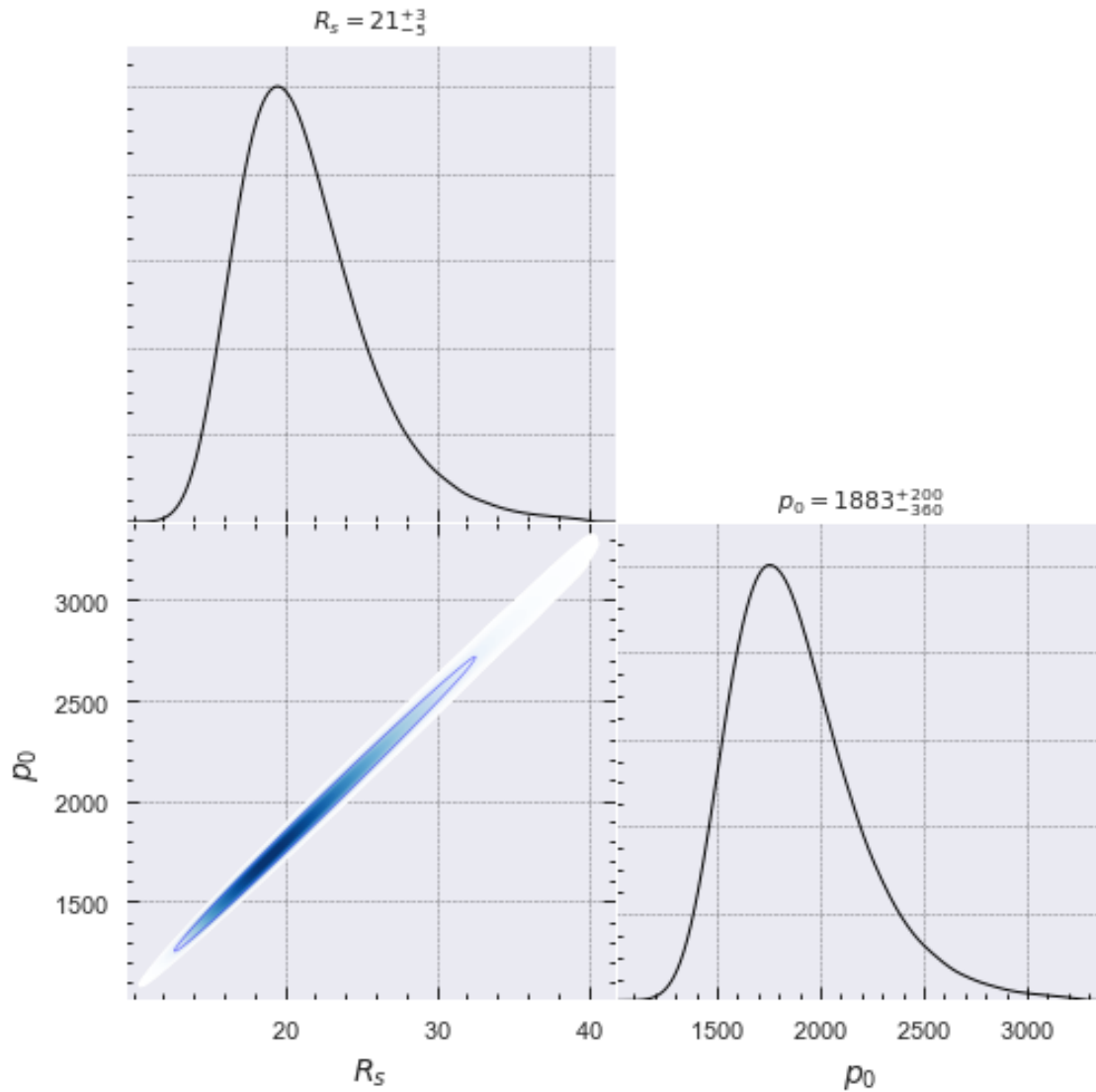
Mean acceptance rate is: 0.71

```
[25]: Text(0, 0.5, 'Taza de aceptación')
```



```
[15]: """Distribución de probabilidad."""
weights = np.ones(len(samples))
samp1 = MCSamples(samples=samples, names=['R', 'rho'], labels = ['R_s' , 'p_0'])
g = plots.get_subplot_plotter()
g.settings.solid_contour_palefactor = 0.9
g.settings.alpha_filled_add = 0.6
g.settings.fig_width_inch = 8
g.settings.figure_legend_frame = True
g.triangle_plot(samp1, filled=True,shaded=True, width_inch=10, line_args={'lw':
↪1},
colors=['blue'],settings={ 'smooth_scale_2D':0.8, 'smooth_scale_1D':0.
↪6},title_limit=1,
        markers={'x2':0},)
plt.suptitle('U11454 NFW');
```

Removed no burn in



```
[18]: """Comparación de ajustes de emcee y de mínimos cuadrados."""
truths = ( 14.70720551, 1352.59768421) #estado inicial obtenido con regresión
↳no lineal
def NFWmod(r, R_0, c):
    return (c) * np.sqrt((1/r)*(np.log(1 + (r/R_0)) - ((r/R_0)/(1+(r/R_0)))))
print ('R least sq = ',truths[0] , ' vs      R mcmc =',samples[np.argmax(sampler.
↳flatlnprobability)][0])
print('c least sq = ',truths[1] , 'vs      c mcmc =', samples[np.argmax(sampler.
↳flatlnprobability)][1])
```

```
xMCMC = np.sum((vel-NFWmod(rad,samples[np.argmax(sampler.
    ↪ flatlnprobability)][0],samples[np.argmax(sampler.flatlnprobability)][1]))**2.
    ↪/(err)**2.)
xleast = np.sum((vel-NFWmod(rad,truths[0],truths[1]))**2./(err)**2.)
print('mcmc = ', round(xMCMC,4), 'leastsq = ',round(xleast,4))
```

R least sq = 14.70720551 vs R mcmc = 19.012997366181832
c least sq = 1352.59768421 vs c mcmc = 1720.9812279206803
mcmc = 28.8698 leastsq = 41.4279

```
[30]: xData = rad
      yData = vel
      c = err
```

```
[20]: """Perfil de Einasto."""
def densidad(r, rho2, n, r2):
    return rho2*np.exp((-2*n)*((r/r2)**(1/n) - 1))
def dmass(r, rho2, n, r2):
    return densidad(r, rho2, n, r2)*r**2
def Ein(theta,r=rad):
    r2,rho2,n = theta
    return np.sqrt((list(integrate.quad(dmass, 0, i, args=(rho2, n, r2))[0] for
    ↪ i in xData))/xData)
#Integración numérica para obtener velocidad orbital
```

```
[22]: """función likelihood."""
def lnlike(theta, x, y, yerr):
    return -0.5 * np.sum(((y - Ein(theta, x))/yerr) ** 2)
```

```
[23]: """Priors."""
def lnprior(theta):
    r2,rho2,n = theta
    if 0.0 < r2 < 15 and 0 < rho2 < 1000 and 0.0 < n < 4:
        return 0.0
    return -np.inf
```

```
[26]: """Se definen: número de caminadores, número de pasos, estado inicial,
      dimensión del espacio de parámetros y el tamaño del paso."""
data = (rad, vel,err)
nwalkers = 250
niter = 2000
initial = np.array([7.22917773, 566.9703161 , 1.8480314 ])
ndim = len(initial)
p0 = [np.array(initial) + 1 * np.random.randn(ndim) for i in range(nwalkers)]
```

```
[31]: sampler, pos, prob, state = main(p0,nwalkers,niter,ndim,lnprob,data)
      samples = sampler.flatchain
      samples[np.argmax(sampler.flatlnprobability)]
```

C:\Users\Batal\anaconda3\lib\site-packages\emcee\moves\red_blue.py:99:

RuntimeWarning: invalid value encountered in double_scalars

```
lnpdiff = f + nlp - state.log_prob[j]
```

Running production...

```
[31]: array([ 7.20619639, 570.57528117, 1.83789694])
```

```
[33]: samp4 = MCSamples(samples=samples, names=['R', 'rho', 'n'], labels = ['R_s', 'p_0', 'n'])
g = plots.get_subplot_plotter()
g.settings.solid_contour_palefactor = 0.9
g.settings.alpha_filled_add = 0.6
g.settings.figure_legend_frame = True
g.settings.fig_width_inch = 8
g.triangle_plot(samp4, filled=True, shaded=True, width_inch=10, line_args={'lw': 1},
colors=['cyan'], contour_colors=['cyan'], settings={ 'smooth_scale_2D':0.8, 'smooth_scale_1D':0.6}, title_limit=1, markers={'x2':0},)
plt.suptitle('U11454 Einasto');
```

Removed no burn in

WARNING:root:auto bandwidth for R very small or failed

(h=0.0006210212604566594,N_eff=500000.0). Using fallback (h=0.00824740865308111)

WARNING:root:auto bandwidth for R very small or failed

(h=0.0006210212604566594,N_eff=500000.0). Using fallback (h=0.00824740865308111)

WARNING:root:auto bandwidth for rho very small or failed

(h=0.0006551672852042873,N_eff=500000.0). Using fallback

(h=0.011099834508557617)

WARNING:root:auto bandwidth for n very small or failed

(h=0.0006076229229831598,N_eff=500000.0). Using fallback (h=0.0093863075262576)

WARNING:root:auto bandwidth for rho very small or failed

(h=0.0006551672852042873,N_eff=500000.0). Using fallback

(h=0.011099834508557617)

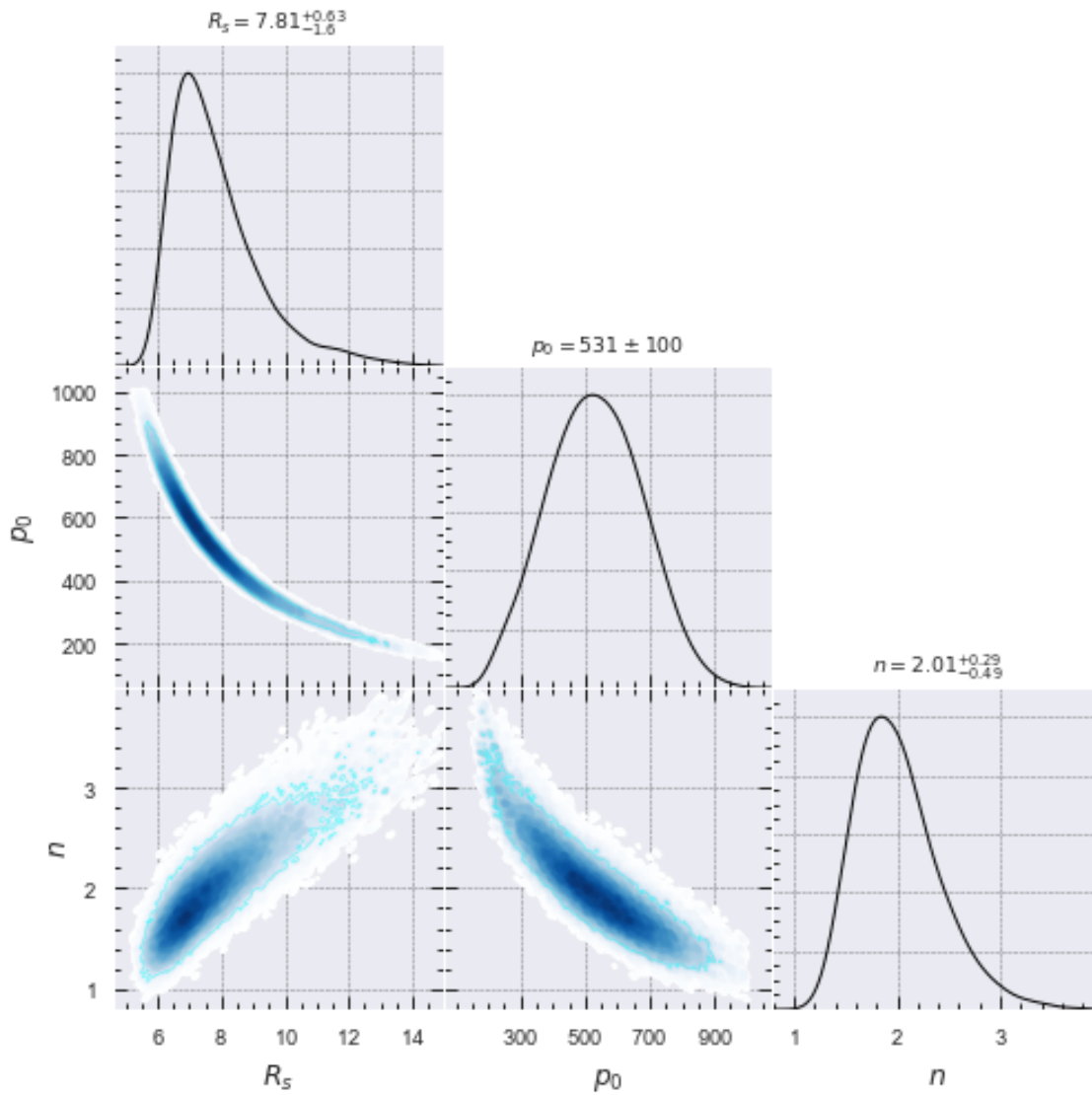
WARNING:root:auto bandwidth for n very small or failed

(h=0.0006076229229831598,N_eff=500000.0). Using fallback (h=0.0093863075262576)

WARNING:root:fine_bins_2D not large enough for optimal density

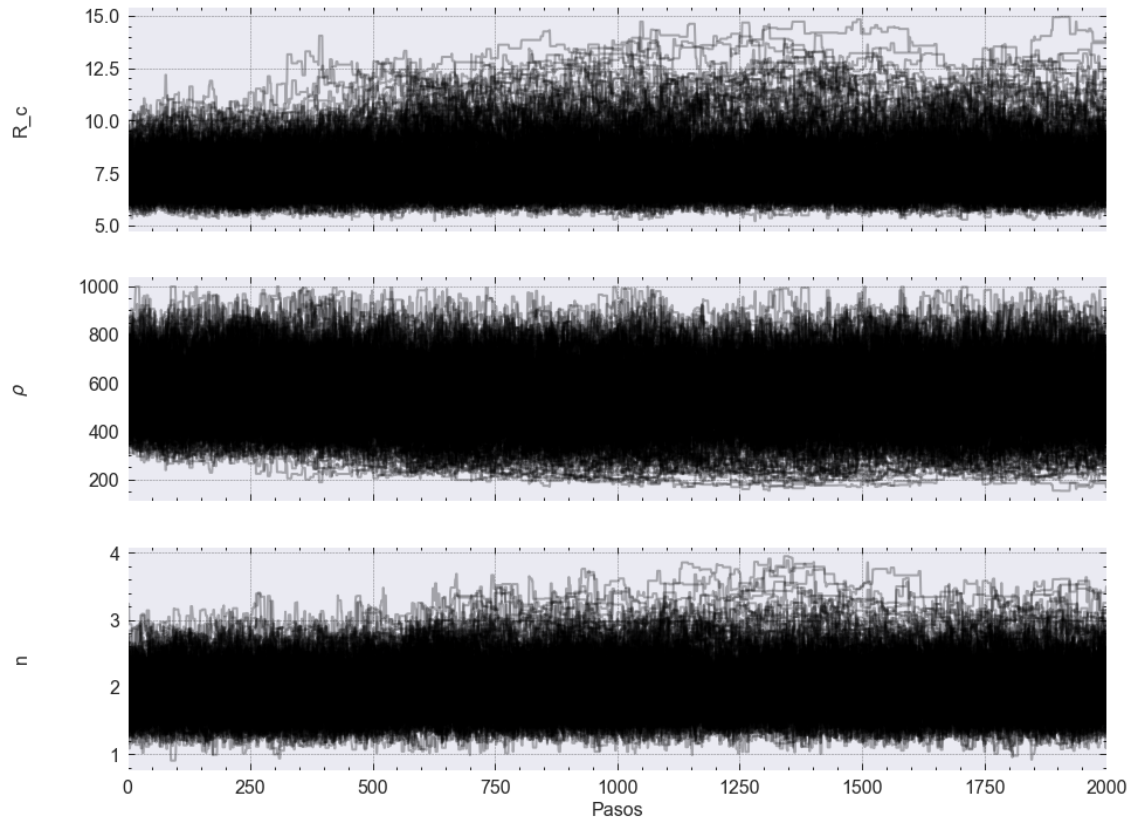
WARNING:root:fine_bins_2D not large enough for optimal density

U11454 Einasto



```
[34]: fig, axes = plt.subplots(3, figsize=(15, 12), sharex=True)
      samples = sampler.get_chain()
      labels = ['R_c', r'$\rho$', 'n']
      for i in range(ndim):
          ax = axes[i]
          ax.plot(samples[:, :, i], "k", alpha=0.3)
          ax.set_xlim(0, len(samples))
          ax.set_ylabel(labels[i])
          ax.yaxis.set_label_coords(-0.1, 0.5)
```

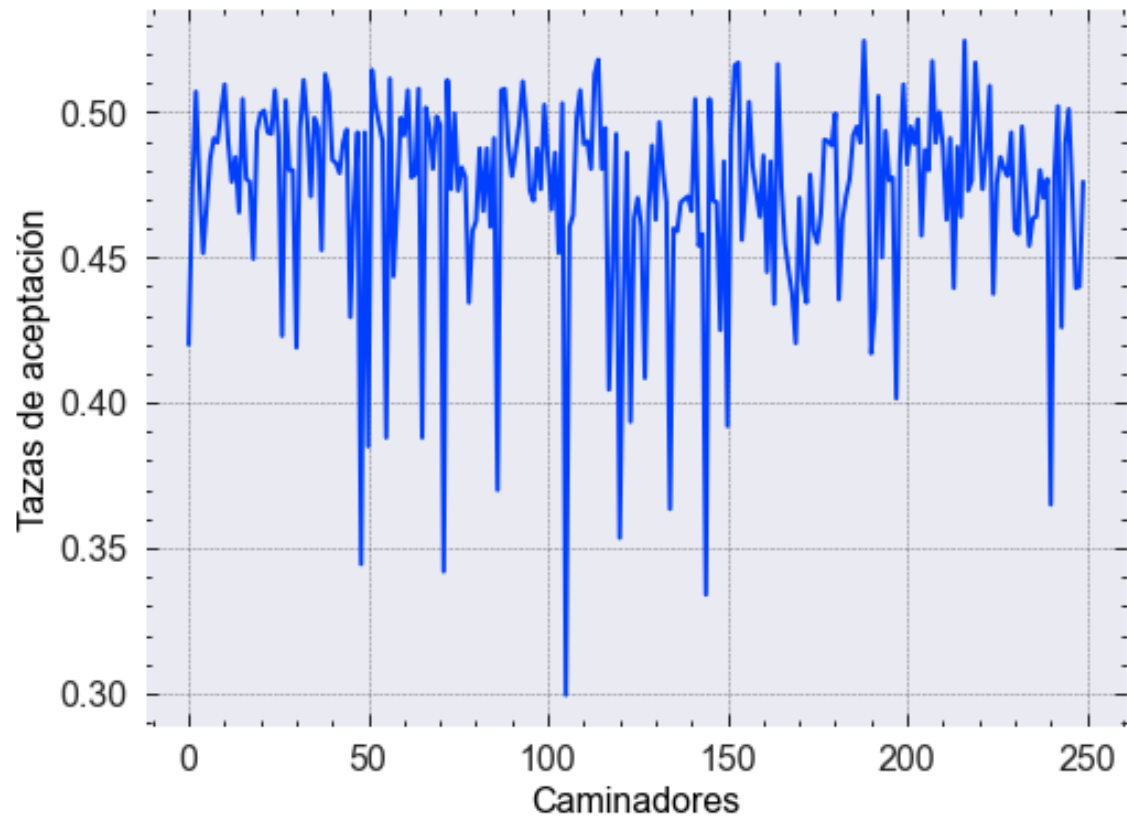
```
axes[-1].set_xlabel("Pasos");
```



```
[37]: print("Mean acceptance rate is: {0:1.2f}".format(np.mean(sampler.  
    ↳ acceptance_fraction)))  
plt.plot(sampler.acceptance_fraction)  
plt.xlabel('Caminadores',color='black')  
plt.ylabel('Tazas de aceptación',color='black')
```

Mean acceptance rate is: 0.47

```
[37]: Text(0, 0.5, 'Tazas de aceptación')
```



[]:

[]:

10.7. Tazas de aceptación y tiempos de autocorrelación

A continuación en el Cuadro 10.2 se presenta la tabla de valores para los tiempos de autocorrelación y tazas de aceptación al ajustar parámetros con emcee. Al correr emcee es importante tener en cuenta la tasa de aceptación de los caminadores, ya que si esta tasa de aceptación es muy pequeña o cercana a 0, sabemos que casi todos los pasos propuestos son rechazados, esto quiere decir que la cadena no tomó suficientes muestras independientes como para representar a la densidad objetivo y si la tasa de aceptación es muy grande o cercana a 1, tenemos que casi todos los pasos son aceptados y entonces la cadena se movió de manera aleatoria sin considerar la distribución objetivo y de nuevo el muestreo no es representativo de la distribución posterior. Se busca al mismo tiempo un tiempo de autocorrelación pequeño, (por tiempo de computo) pero lo suficientemente grande como para permitir al algoritmo tomar suficientes muestras independientes como para representar de manera adecuada a la distribución objetivo, una explicación más completa se encuentra en la sección 7.2.

	NFW		B&H		Pseudo iso.		Einasto		B&H mod.	
Galaxia	Taza A.	Auto cor.	Taza A.	Auto cor.	Taza A.	Auto cor.	Taza A.	Auto cor.	Taza A.	Auto cor.
F563-1	0.65	34.23	0.74	33.38	0.78	39.25	0.63	82.65	0.45	79.34
F568-3	0.62	32.15	0.78	38.92	0.48	45.94	0.67	72.94	0.76	67.23
F571-8	0.69	27.37	0.63	44.12	0.57	42.81	0.46	63.94	0.68	49.03
F579-v1	0.71	35.72	0.65	37.21	0.73	35.35	0.59	57.51	0.45	79.02
F583-1	0.7	39.45	0.59	36.71	0.65	39.47	0.61	68.13	0.71	98.21
F583-4	0.74	37.24	0.72	39.03	0.67	32.46	0.73	69.45	0.67	82.43
F730-v1	0.69	36.46	0.71	35.74	0.63	29.35	0.71	58.97	0.65	82.61
U4115	0.67	39.03	0.67	39.1	0.58	40.54	0.5	43.7	0.73	90.23
U5750	0.68	35.84	0.54	37.56	0.67	34.15	0.55	90.45	0.65	86.93
U6614	0.71	31.54	0.74	40.82	0.59	44.92	0.51	52.57	0.72	79.43
U11454	0.71	31.71	0.78	35.98	0.69	28.06	0.48	57.28	0.54	81.98
U11557	0.67	37.78	0.67	41.08	0.63	35.73	0.42	65.51	0.62	75.87
U11583	0.67	35.94	0.68	39.73	0.54	37.96	0.64	69.99	0.54	59.97
U11616	0.7	36.14	0.73	47.34	0.69	29.31	0.7	70.38	0.70	87.93
U11648	0.71	32.15	0.71	31.39	0.69	28.99	0.54	78.95	0.55	79.03
U11748	0.71	29.67	0.67	38.31	0.62	41.19	0.61	67.98	0.62	76.91
U11819	0.69	36.23	0.7	34.45	0.7	27.8	0.49	56.2	0.43	87
ESO0140040	0.71	30.73	0.72	35.72	0.64	37.27	0.48	69.07	0.62	81.03
ESO0840411	0.67	37.21	0.67	40.19	0.61	45.25	0.27	95.72	0.73	70.82
ESO1200211	0.66	40.98	0.67	38.86	0.57	54.88	0.37	75.34	0.62	90.43
ESO1870510	0.67	38.18	0.67	40.19	0.62	45.17	0.56	68.45	0.59	82.07
ESO2060140	0.71	32.88	0.56	41.45	0.66	37.27	0.45	76.19	0.71	80.82
ESO3020120	0.69	35.03	0.68	45.77	0.65	37.02	0.48	68.61	0.45	76.21
ESO3050090	0.67	38.07	0.67	39.17	0.65	39.54	0.43	60.13	0.57	83.95
ESO4250180	0.67	38.01	0.71	45.78	0.55	55.44	0.29	93.46	0.72	79.03
ESO4880049	0.68	37.24	0.66	44.61	0.66	36.73	0.43	76.187	0.61	65.94

Cuadro 10.2: Tazas de aceptación y tiempos de autocorrelación.

Bibliografía

- [1] Stacy S McGaugh, Vera C Rubin, and WJG De Blok. High-resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. i. data. *The Astronomical Journal*, 122(5):2381, 2001.
- [2] Lord William Thomson Kelvin. *Baltimore lectures on molecular dynamics and the wave theory of light*. CUP Archive, 1904.
- [3] Henri Poincaré. The milky way and the theory of gases. *Popular Astronomy*, 14:475–488, 1906.
- [4] Jan H Oort. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 6:249, 1932.
- [5] Fritz Zwicky. The redshift of extragalactic nebulae. *Helvetica Physica Acta*, 6:110–127, 1933.
- [6] Allan Sandage. Hubble & humason’s evaluation of the cosmological expansion. *The Astrophysical Journal*, 525:252, 1999.
- [7] Heinz Andernach and Fritz Zwicky. English and spanish translation of zwicky’s (1933) the redshift of extragalactic nebulae. *arXiv preprint arXiv:1711.01693*, 2017.
- [8] Andrew Robertson, Richard Massey, and Vincent Eke. What does the bullet cluster tell us about self-interacting dark matter? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, page stw2670, 2016.
- [9] Maruša Bradač, Steven W Allen, Tommaso Treu, Harald Ebeling, Richard Massey, R Glenn Morris, Anja Von Der Linden, and Douglas Applegate. Revealing the properties of dark matter in the merging cluster macs j0025. 4–1222. *The Astrophysical Journal*, 687(2):959, 2008.
- [10] Nick Kaiser. Weak gravitational lensing of distant galaxies. *The Astrophysical Journal*, 388:272–286, 1992.
- [11] J Anthony Tyson, F Valdes, and RA Wenk. Detection of systematic gravitational lens galaxy image alignments-mapping dark matter in galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 349:L1–L4, 1990.

- [12] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, M Ballardini, Anthony J Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-v. cmb power spectra and likelihoods. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A5, 2020.
- [13] Matias Zaldarriaga and Uroš Seljak. Reconstructing projected matter density power spectrum from cosmic microwave background. *Physical Review D*, 59(12):123507, 1999.
- [14] Michael S Turner. λ cdM: Much more than we expected, but now less than what we want. *Foundations of Physics*, 48(10):1261–1278, 2018.
- [15] Eleonora Di Valentino. Challenges of the standard cosmological model. *Universe*, 8(8):399, 2022.
- [16] Horace W Babcock. The rotation of the andromeda nebula. *Lick observatory bulletin*, 19:41–51, 1939.
- [17] Vera C Rubin, W Kent Ford Jr, and Norbert Thonnard. Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/ $r=4$ kpc to ugca 2885/ $r=122$ kpc. *The Astrophysical Journal*, 238:471–487, 1980.
- [18] DH Rogstad and GS Shostak. Gross properties of five scd galaxies as determined from 21-centimeter observations. *The Astrophysical Journal*, 176:315, 1972.
- [19] Przemek Mróz, Andrzej Udalski, Dorota M Skowron, Jan Skowron, Igor Soszyński, Paweł Pietrukowicz, Michał K Szymański, Radosław Poleski, Szymon Kozłowski, and Krzysztof Ulaczyk. Rotation curve of the milky way from classical cepheids. *The Astrophysical Journal Letters*, 870(1):L10, 2019.
- [20] Roberto Casadio and Aldo Canfora. Profili di distribuzione della materia oscura.
- [21] Timothy D Brandt. Constraints on macho dark matter from compact stellar systems in ultra-faint dwarf galaxies. *The Astrophysical Journal Letters*, 824(2):L31, 2016.
- [22] Dennis J Hegyi and Keith A Olive. Can galactic halos be made of baryons? *Physics Letters B*, 126(1-2):28–32, 1983.
- [23] Mordehai Milgrom. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *The Astrophysical Journal*, 270:365–370, 1983.
- [24] Jacob D Bekenstein. An alternative to the dark matter paradigm: relativistic mond gravitation. *arXiv preprint astro-ph/0412652*, 2004.
- [25] P Collaboration, P Ade, N Aghanim, C Armitage-Caplan, M Arnaud, M Ashdown, F Atrio-Barandela, J Aumont, C Baccigalupi, A Banday, R Barreiro, J Bartlett, N Bartolo, E Battaner, K Benabed, A Benoît, A Benoit-Lévy, J Bernard, M Bersanelli, P Bielewicz, J Bobin, J Bock, A Bonaldi, L Bonavera, and JR Bond. Planck 2013 results. xxiv. constraints on primordial non-gaussianity. *A*, 571:A24, 2013.

- [26] Xiao dong Xu, Bin Wang, and Pengjie Zhang. Testing the tensor-vector-scalar theory with the latest cosmological observations. *Physical Review D*, 92(8), oct 2015.
- [27] A. Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift fur Physik*, 10:377–386, January 1922.
- [28] Pea de Bernardis, Peter AR Ade, James J Bock, JR Bond, J Borrill, A Boscaleri, K Coble, BP Crill, G De Gasperis, PC Farese, et al. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404(6781):955–959, 2000.
- [29] George Efstathiou and Steven Gratton. The evidence for a spatially flat universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 496(1):L91–L95, 2020.
- [30] Daniel J Eisenstein, Idit Zehavi, David W Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R Blanton, Robert C Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560, 2005.
- [31] James S Bullock and Michael Boylan-Kolchin. Small-scale challenges to the Λ cdm paradigm. *arXiv preprint arXiv:1707.04256*, 2017.
- [32] Federico R Urban and Ariel R Zhitnitsky. Cosmological constant, violation of cosmological isotropy and cmb. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(09):018, 2009.
- [33] Peter Sundell et al. Beyond the cosmological principle. 2016.
- [34] Prakash Sarkar, Jaswant Yadav, Biswajit Pandey, and Somnath Bharadwaj. The scale of homogeneity of the galaxy distribution in sdss dr6. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 399(1):L128–L131, 2009.
- [35] Daniel Aloni, Asher Berlin, Melissa Joseph, Martin Schmaltz, and Neal Weiner. A step in understanding the hubble tension. *Physical Review D*, 105(12):123516, 2022.
- [36] Brian D Fields. The primordial lithium problem. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 61:47–68, 2011.
- [37] Norbert Wex. New limits on the violation of the strong equivalence principle in strong field regimes. *arXiv preprint gr-qc/9511017*, 1995.
- [38] Luciano Petruzzello. Equivalence principle violation from large scale structure. *arXiv preprint arXiv:2205.10566*, 2022.
- [39] WJG De Blok. The core-cusp problem. *Advances in Astronomy*, 2010, 2010.
- [40] Andrew R Zentner, Andrey V Kravtsov, Oleg Y Gnedin, and Anatoly A Klypin. The anisotropic distribution of galactic satellites. *The Astrophysical Journal*, 629(1):219, 2005.

- [41] Mahmood Roshan, Neda Ghafourian, Tahere Kashfi, Indranil Banik, Moritz Haslbauer, Virginia Cuomo, Benoit Famaey, and Pavel Kroupa. Fast galaxy bars continue to challenge standard cosmology. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 508(1):926–939, 2021.
- [42] Rupert AC Croft, Tiziana Di Matteo, Volker Springel, and Lars Hernquist. Galaxy morphology, kinematics and clustering in a hydrodynamic simulation of a λ cold dark matter universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 400(1):43–67, 2009.
- [43] Stefano Gariazzo, Miguel Escudero, Roberta Diamanti, and Olga Mena. Cosmological searches for a noncold dark matter component. *Physical Review D*, 96(4):043501, 2017.
- [44] Nick E Mavromatos. Lambda-cdm model and small-scale-cosmology “crisis”: from astrophysical explanations to new fundamental physics models. In *The Fifteenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*, pages 1114–1121. World Scientific, 2022.
- [45] Argelia Bernal Bautista. Estudio dinamico de campos escalares autogravitantes. *CINVESTAV 2007*, 2007.
- [46] Franz E Schunck and Eckehard W Mielke. General relativistic boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 20(20):R301, 2003.
- [47] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Dario Nunez, and Olivier Sarbach. -boson stars. *Classical and Quantum Gravity*, 35(19):19LT01, 2018.
- [48] Argelia Bernal, Juan Barranco, Daniela Alic, and Carlos Palenzuela. Multistate boson stars. *Physical Review D*, 81(4):044031, 2010.
- [49] Argelia Bernal and C Soto-Campos. Modeling galactic rotation curves with ultra-light scalar field dark matter. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 640, page 012056. IOP Publishing, 2015.
- [50] Phillippe Jetzer. Boson stars. *Physics Reports*, 220(4):163–227, 1992.
- [51] Steven L Liebling and Carlos Palenzuela. Dynamical boson stars. *Living Reviews in Relativity*, 20(1):1–78, 2017.
- [52] Andrew R Liddle and Mark S Madsen. The structure and formation of boson stars. *International Journal of Modern Physics D*, 1(01):101–143, 1992.
- [53] Jae-weon Lee and In-gyu Koh. Galactic halos as boson stars. *Physical Review D*, 53(4):2236, 1996.
- [54] Marcelo Gleiser. Stability of boson stars. *Phys. Rev. D*, 38:2376–2385, Oct 1988.

- [55] CG Boehmer and T Harko. Can dark matter be a bose-einstein condensate? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(06):025, 2007.
- [56] László Erdos, Benjamin Schlein, and Horng-Tzer Yau. Derivation of the gross-pitaevskii equation for the dynamics of bose-einstein condensate. *arXiv preprint math-ph/0606017*, 2006.
- [57] Julio F Navarro, Carlos S Frenk, and Simon DM White. A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490(2):493, 1997.
- [58] Tereasa G Brainerd, Candace Oaxaca Wright, David M Goldberg, and Jens Verner Villumsen. A comparison of simple mass estimators for galaxy clusters. *The Astrophysical Journal*, 524(1):9, 1999.
- [59] Jeff Conklin and Michael L Begeman. gibis: A hypertext tool for team design deliberation. In *Proceedings of the ACM Conference on Hypertext*, pages 247–251, 1987.
- [60] J. Einasto and U. Haud. Galactic models with massive corona. I - Method. II - Galaxy. , 223(1-2):89–106, October 1989.
- [61] I Siutsou, CR Argüelles, and R Ruffini. Dark matter massive fermions and einasto profiles in galactic haloes. *Astronomy Reports*, 59(7):656–666, 2015.
- [62] Laurent Chemin, WJG De Blok, and Gary A Mamon. Improved modeling of the mass distribution of disk galaxies by the einasto halo model. *The Astronomical Journal*, 142(4):109, 2011.
- [63] Sebastien Blais-Ouellette, Philippe Amram, and Claude Carignan. Accurate determination of the mass distribution in spiral galaxies. ii. testing the shape of dark halos. *The Astronomical Journal*, 121(4):1952, 2001.
- [64] Eric F Bell and Roelof S de Jong. Stellar mass-to-light ratios and the tully-fisher relation. *The Astrophysical Journal*, 550(1):212, 2001.
- [65] R Brent Tully and J Richard Fisher. A new method of determining distances to galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 54:661–673, 1977.
- [66] Victor H Robles and Tonatiuh Matos. Flat central density profile and constant dark matter surface density in galaxies from scalar field dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422(1):282–289, 2012.
- [67] Jonathan Goodman and Jonathan Weare. Ensemble samplers with affine invariance. *Communications in applied mathematics and computational science*, 5(1):65–80, 2010.
- [68] Daniel Foreman-Mackey, David W. Hogg, Dustin Lang, and Jonathan Goodman. emcee: The mcmc hammer. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 125(925):306, feb 2013.
- [69] Sheldon M Ross. *A course in simulation*. Prentice Hall PTR, 1990.

- [70] Luis E Padilla, Luis O Tellez, Luis A Escamilla, and Jose Alberto Vazquez. Cosmological parameter inference with bayesian statistics. *Universe*, 7(7):213, 2021.
- [71] Ricardo Medel Esquivel, Isidro Gómez-Vargas, J Alberto Vázquez, and Ricardo García Salcedo. An introduction to markov chain monte carlo. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 1(37):47–74, 2021.
- [72] Nicholas Metropolis, Arianna W Rosenbluth, Marshall N Rosenbluth, Augusta H Teller, and Edward Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *The journal of chemical physics*, 21(6):1087–1092, 1953.
- [73] W Keith Hastings. Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications. 1970.
- [74] Paul H Garthwaite, Yanan Fan, and Scott A Sisson. Adaptive optimal scaling of metropolis–hastings algorithms using the robbins–monro process. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(17):5098–5111, 2016.
- [75] Alan Sokal. Monte carlo methods in statistical mechanics: foundations and new algorithms. In *Functional integration*, pages 131–192. Springer, 1997.
- [76] Antony Lewis. Getdist: a python package for analysing monte carlo samples. *arXiv preprint arXiv:1910.13970*, 2019.
- [77] Daniel Foreman-Mackey. corner.py: Scatterplot matrices in python. *The Journal of Open Source Software*, 1(2):24, jun 2016.
- [78] AM Johansen and L Evers. Monte carlo methods. lecture notes. *University of Bristol*, 2007.
- [79] SM Ross. Métodos de monte carlo con cadenas de markov. 10.1 cadenas de markov. *Simulación (Segunda ed., pp. 218–220)*. Prentice Hall, México. <http://www.uenicmlk.edu.ni/img/biblioteca/ing%20sistema>, 20, 1999.
- [80] Ricardo Medel Esquivel, Isidro Gomez-Vargas, J. Vazquez, and Ricardo García-Salcedo. An introduction to markov chain monte carlo. *Boletin de Estadística e Investigación Operativa*, 37:47–84, 03 2021.
- [81] Bradley P Carlin and Thomas A Louis. *Bayesian methods for data analysis*. CRC Press, 2008.
- [82] John Hammersley. *Monte carlo methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [83] Qingkai Kong, Timmy Siau, and Alexandre Bayen. *Python Programming and Numerical Methods: A Guide for Engineers and Scientists*. Academic Press, 2020.