

El oscilador repulsivo

Kurt Bernardo Wolf

*Instituto de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 48–3 Cuernavaca, 62251 Morelos, México.*

Recibido el 26 de agosto de 2009; aceptado el 1 de diciembre de 2009

El oscilador repulsivo se caracteriza por tener un potencial $(-1/2)x^2$ que actúa como barrera; es de los pocos sistemas cuánticos cuya solución es explícita. Muestra varios aspectos interesantes debido a que la barrera de potencial separa sus estados en aquellos que clásicamente libran la barrera por tener energía positiva, de aquellos con energía negativa, los cuales parcialmente se reflejan y parcialmente se transmiten a través de ella. El espectro de energías es doble, pues los estados se pueden mover a la derecha o a la izquierda. Aquí analizamos este sistema en su espacio fase cuántico mediante la función de Wigner y con la estrategia de usar matrices de 2×2 para encontrar su evolución en el tiempo, factorizándola en una transformación geométrica y una dinámica.

Descriptor: Oscilador repulsivo; transformadas canónicas; función de Wigner.

The repulsive oscillator is characterized for having a potential $(-1/2)x^2$ that acts as a barrier; it is one of the few quantum systems whose solution is explicit. It shows several interesting aspects due to the potential barrier which separates its states into those that classically surmounts the barrier for having positive energy, from those with negative energy, which partially reflect and partially transmit through it. The energy spectrum is double, since the states can move to the right or to the left. Here we analyze this system in quantum phase space through the Wigner function, with the strategy of using 2×2 matrices to find the time evolution, factorizing it into a geometric and a dynamical transformation.

Keywords: Repulsive oscillator; inverted oscillator; canonical transforms; Wigner function.

PACS: 02.30.Qy; 03.65.Fd

1. Introducción y propósito

El oscilador repulsivo, el oscilador armónico y la partícula libre son tres sistemas cuánticos cuya simetría es perfecta. Este adjetivo no es aventurado para el oscilador armónico, ejemplo canónico del cual provienen los operadores de ascenso, descenso y número que permean la literatura en varios campos de la mecánica y óptica cuánticas. También la partícula libre, aunque parece ser un sistema muy simple, da significado físico a las series y transformadas de Fourier sobre las que se basa mucho el análisis funcional en matemáticas. El tercer miembro de este trío de sistemas cuyo potencial es cuadrático, αx^2 cuando $\alpha < 0$, es el oscilador repulsivo. El propósito de este ensayo es presentarlo en sus ropas más sencillas e indicar algo de lo que podemos aprender de él, tanto en física como en matemáticas.

Aun cuando este sistema no aparece prominentemente en libros de mecánica cuántica, el oscilador repulsivo —también llamado oscilador *invertido*— está siendo crecientemente investigado en la literatura. Vale decir que originalmente se trató de un ejercicio para encontrar valores y funciones propias exactas [1], posteriormente éstas fueron estudiadas como soluciones separables de ecuaciones diferenciales [2,4], sujetas a transformadas canónicas lineales [5] con propiedades de auto-reproducción [6] y como bases para representaciones integrales del grupo de Lorentz [7]. Sus aplicaciones a la física como modelo para tuneo a través de una barrera de potencial derivan de una tesis doctoral y artículo de Barton [8], y del tratamiento en espacio fase mediante la función de Wigner hecho por Báláz y Voros [9]. Este modelo y variantes de él han sido aplicados en la química de procesos

inestables [10,13] y siguen siendo de interés por sus propiedades geométricas [14]. Nuestro tratamiento de las funciones propias puede encontrarse ampliado en la Ref. 15, mientras que su evolución en espacio fase está contenido en varias de las fuentes mencionadas arriba. Ningún resultado de los aquí presentados es estrictamente nuevo, pero su desarrollo mediante álgebra de matrices nos parece ser el camino más natural y eficaz para describir este sistema.

El hamiltoniano clásico del oscilador repulsivo es

$$h(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{v}{2}x^2 = \eta, \quad (1)$$

donde $x \in \mathfrak{R}$ es la distancia de la masa m al centro del sistema, $p = m\dot{x} \in \mathfrak{R}$ es el momento lineal, v un parámetro y η es la energía constante de movimiento; el potencial está representado en la Fig. 1a, como una barrera. Las partículas con energía positiva ($\eta > 0$) pasarán por encima de esta barrera, mientras que aquellas cuya energía es negativa ($\eta < 0$) serán reflejadas, tanto si vienen de la izquierda como de la derecha. En el espacio fase, cuyas coordenadas canónicas son posición y momento $(x, p) \in \mathfrak{R}^2$ como se muestra en la Fig. 1b, las trayectorias de las partículas determinadas por (1) son hipérbolas; ajustamos los parámetros $m = 1 = v$ para que éstas sean equiláteras. Resolviendo la ecuación de Newton con $\dot{p} = -\nabla((-1/2)x^2) = x$ obtenemos $\ddot{x} = \dot{p} = x$ y $\ddot{p} = \dot{x} = p$, cuya solución para tiempo $\tau \in \mathfrak{R}$ es

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ p_o \end{pmatrix}, \quad (2)$$

con $x_o := x(0)$ y $p_o := p(0)$. Recordamos que bajo evolución hamiltoniana, los elementos de área del espacio fase

$dx dp$ se conservan, por lo que éste fluye como un líquido incompresible a lo largo de las líneas $h(x, p) = \text{constante}$.

A diferencia del oscilador repulsivo clásico, en el modelo cuántico las partículas no son puntos en el espacio fase de la Fig. 1, sino distribuciones de probabilidad que se extienden sobre todo el espacio. Bajo la deformación (2), estas distribuciones perderán su forma; aquellas con soporte en las regiones $\eta > 0$ ($|p| > |x|$) salvarán la barrera, mientras cuando $\eta < 0$ ($|p| < |x|$) esperamos ver reflexión acompañada de una pequeña transmisión a través de la región clásicamente prohibida. El oscilador repulsivo cuántico presenta también otros fenómenos interesantes: el momento crece linealmente con la distancia, la frecuencia espacial de oscilación de sus funciones de onda crecerá linealmente, en lo que se caracteriza como un ‘trino’ (*chirp*) $\sim e^{ix^2/2}$. Así, mientras que el análisis de Fourier trata con ondas de frecuencia constante como base para $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable, el análisis en términos de bases con trinos es algo más complicado. Por añadidura, si pretendemos construir modelos computacionales discretos necesariamente finitos, encontraremos que dejar fuera la parte asintótica del trino puede llevar a errores numéricos graves.

Destacamos que los sistemas cuadráticos son también de interés para el modelo paraxial de la óptica ondulatoria monocromática, cuyos fundamentos son esencialmente idénticos a los de la mecánica cuántica, salvo que la constante de Planck $2\pi\hbar$ se reemplaza por la longitud de onda $\lambda \in \mathfrak{R}_+$. Los elementos básicos de los sistemas ópticos son el vuelo libre en espacio homogéneo y la lente delgada (‘de Fresnel’), a los cuales podemos agregar las guías de onda armónicas y repulsivas. Estas últimas son poco comunes en la práctica, pero sus funciones de onda presentan propiedades bajo propagación que son dignas de estudio.

En la Sec. 2 prepararemos el terreno para tratar los sistemas cuadráticos mediante álgebra de matrices. El sistema que desarrollamos aquí es unidimensional, de modo que las matrices son de 2×2 y están emparentadas con las de Pauli. La evolución de funciones de onda bajo el oscilador repulsivo se analiza en la Sec. 3, y en la Sec. 4 encontramos sus funciones propias; el doble espectro se divide en soluciones que se mueven a la derecha o a la izquierda. En la Sec. 5 analizamos el movimiento de paquetes gaussianos centrados inicialmente en cierta posición, momento y energía, pero cuya distribución contiene $x, p, \eta \in \mathfrak{R}$, de modo que una ‘parte’ de ellas se transmitirá y otra se reflejará. Introducimos la función de Wigner en la Sec. 6 para describir el movimiento de paquetes gaussianos en el espacio fase bajo la dinámica del oscilador repulsivo usando álgebra de matrices. En la Sec. 7 indicamos la extensión del método de matrices a otros potenciales y paquetes de onda como conclusión.

2. La familia cuadrática

Utilizaremos los operadores de Schrödinger de posición \mathcal{X} y momento \mathcal{P} de la mecánica cuántica, representados en el es-

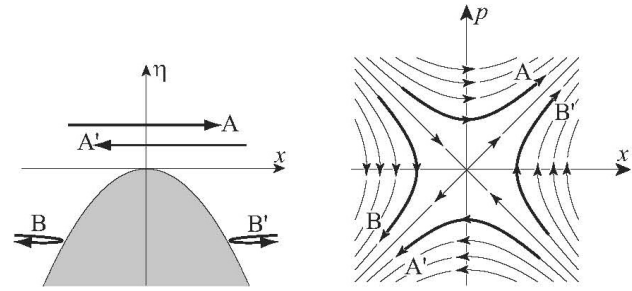


FIGURA 1. Movimiento de una partícula clásica en un potencial de oscilador repulsivo. a) En el espacio de configuración x las partículas se mueven a la izquierda (A y B) o a la derecha (A' y B'). Aquellas con energía positiva ($A, A', \eta > 0$) superan la barrera de potencial (parábola punteada) y continúan su movimiento; aquellas con energía negativa ($B, B', \eta < 0$) se reflejan. b) En espacio fase (x, p) las trayectorias son arcos de hipérbola. Partículas con energía positiva (A y A') se mueven en los cuadrantes superior e inferior; aquellas con energía negativa (B y B') ocupan los cuadrantes derecho e izquierdo. Las asíntotas corresponden a trayectorias de partículas con energía $\eta = 0$, que llegan al punto de equilibrio inestable $x = 0 = p$ para $\tau \rightarrow \infty$, o salen de él.

pacio de configuración $x \in \mathfrak{R}$ sobre funciones de onda diferenciables $\psi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$ por

$$(\mathcal{X}\psi)(x) = x\psi(x), \quad (\mathcal{P}\psi)(x) = \frac{-id\psi(x)}{dx}, \quad (3)$$

que cumplen la relación de conmutación de Heisenberg con $\hbar = 1$,

$$[\mathcal{X}, \mathcal{P}] := \mathcal{X}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{X} = i1. \quad (4)$$

Con estos operadores básicos (más 1) construimos sus productos cuadráticos, asociándolos con matrices como sigue:

$$\mathcal{H}^A := \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 + \mathcal{X}^2) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathcal{H}^R := \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 - \mathcal{X}^2) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathcal{H}^L := \frac{1}{2}\mathcal{P}^2 \leftrightarrow i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathcal{H}^S := \frac{1}{2}(\mathcal{X}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{X}) \leftrightarrow i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}^T := \frac{1}{2}\mathcal{X}^2 \leftrightarrow i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Aquí \mathcal{H}^A y \mathcal{H}^R son, respectivamente, los hamiltonianos cuánticos del oscilador armónico y repulsivo; $\mathcal{H}^L = 1/2(\mathcal{H}^A + \mathcal{H}^R)$ es el hamiltoniano de la partícula libre. Adicionalmente, tenemos los operadores \mathcal{H}^S que genera cambio de escala como veremos, y $\mathcal{H}^T = 1/2(\mathcal{H}^A - \mathcal{H}^R)$ que genera trinos. En el modelo óptico, este trino es la fase impresa por una lente delgada sobre la función de onda, mientras que \mathcal{H}^L genera la propagación libre dada por la transformada de Fresnel.

Como sólo tres de los operadores (5)-(9) son linealmente independientes, todo operador cuadrático puede representarse como

$$\mathcal{H} = z_0\mathcal{H}^A + z_1\mathcal{H}^R + z_2\mathcal{H}^S$$

$$\leftrightarrow i \begin{pmatrix} z_2 & z_0 + z_1 \\ -z_0 + z_1 & -z_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

con $z_\alpha \in \mathfrak{R}$. Muy importante es el hecho que los conmutadores entre estos operadores devuelven un operador del mismo conjunto, manteniendo su correspondencia con los conmutadores de las matrices asociadas. Combinación lineal y conmutación son las dos de las tres operaciones que caracterizan un álgebra de Lie [16] (la tercera, la identidad de Jacobi entre dobles conmutadores, se cumple automáticamente aquí). Estas operaciones algebraicas y de grupo pueden realizarse ya sea usando los operadores diferenciales o sus correspondientes matrices. Finalmente anotamos que los operadores (5)-(9) son hermitianos [más precisamente: esencialmente auto-adjuntos en $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$], mientras que todas las matrices son imaginarias puras y con traza cero.

La evolución en el tiempo de las funciones de onda $\psi(x, \tau_o) \rightarrow \psi(x, \tau_o + \tau)$, $\tau \in \mathfrak{R}$, generada por estos hamiltonianos según la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$\mathcal{H}\psi(\tau) = i \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}, \quad (11)$$

da lugar a una serie de Taylor:

$$\psi(\tau_o + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \frac{d^n \psi(\tau)}{d\tau^n} \Big|_{\tau=\tau_o}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} (-i\mathcal{H})^n \psi(\tau_o)$$

$$=: \exp(-i\tau\mathcal{H})\psi(\tau_o). \quad (12)$$

La exponenciación de los operadores cuadráticos (5)-(9) estará representada por la exponencial de las matrices como sigue:

$$\exp(-i\tau\mathcal{H}^A) \leftrightarrow \mathcal{M}^A(\tau) := \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\exp(-i\tau\mathcal{H}^R) \leftrightarrow \mathcal{M}^R(\tau) := \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\exp(-i\tau\mathcal{H}^L) \leftrightarrow \mathcal{M}^L(\tau) := \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\exp(-i\tau\mathcal{H}^S) \leftrightarrow \mathcal{M}^S(\tau) := \begin{pmatrix} e^\tau & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\exp(-i\tau\mathcal{H}^T) \leftrightarrow \mathcal{M}^T(\tau) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tau & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Cuando τ es real, las matrices son reales y su determinante es la unidad. Cada conjunto $\{M^X(\tau)\}_{\tau \in \mathfrak{R}}$

($X \in \{A, R, L, S, T\}$) en (13)-(17) forma un grupo de Lie uniparamétrico [16], pues se cumplen

$$\mathbf{M}^X(\tau_1)\mathbf{M}^X(\tau_2) = \mathbf{M}^X(\tau_1+\tau_2)$$

$$\mathbf{M}^X(0) = 1, \quad \mathbf{M}^X(\tau)^{-1} = \mathbf{M}^X(-\tau). \quad (18)$$

Todos son subgrupos del grupo de matrices de 2×2 ,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con determinante $ad - bc = 1$, que se llama $\mathbf{Sl}(2, \mathfrak{R})$ —grupo especial lineal en dos dimensiones reales (‘especial’ significa que su determinante es la unidad). Similarmente, podemos exponenciar cualquier operador cuadrático (10) y obtener el subgrupo uniparamétrico correspondiente representado por su matriz exponenciada. Multiplicando elementos de distintos subgrupos podemos obtener cualquier elemento del grupo completo (sin embargo, por sencillo que parezca, $\mathbf{Sl}(2, \mathfrak{R})$ no es en lo absoluto trivial, como veremos más adelante).

La evolución de los operadores de posición y momento \mathcal{X}, \mathcal{P} bajo (13)-(17) se calcula fácilmente mediante la representación matricial. Para cada $\mathbf{M} \in \mathbf{Sl}(2, \mathfrak{R})$ se define la transformada canónica [17]

$$\mathcal{C}(M^X(\tau)) := \exp(-i\tau\mathcal{H}^X), \quad (19)$$

cuya acción sobre los operadores es

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}' \\ \mathcal{P}' \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

donde notamos que del lado derecho escribimos la matriz inversa,

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (21)$$

El motivo para invertir la etiqueta de $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ respecto de su matriz actuante se hace evidente cuando concatenamos dos de estas transformaciones recordando que preservan combinaciones lineales:

$$\mathcal{C}(\mathbf{M}_1)\mathcal{C}(\mathbf{M}_2) \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \mathcal{C}(\mathbf{M}_2)^{-1}\mathcal{C}(\mathbf{M}_1)^{-1}$$

$$= \mathcal{C}(\mathbf{M}_1)\mathbf{M}_2^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \mathcal{C}(\mathbf{M}_1)^{-1}$$

$$= \mathbf{M}_2^{-1}\mathcal{C}(\mathbf{M}_1) \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \mathcal{C}(\mathbf{M}_1)^{-1} = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{M}_1^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{P} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Sólo así resulta $\mathcal{C}(\mathbf{M}_1)\mathcal{C}(\mathbf{M}_2) = \pm\mathcal{C}(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ en el orden correcto —con la ambigüedad insalvable del signo porque (22) es cuadrática en las \mathcal{C} 's.

De (20) sigue en particular que para $\tau = (1/4)\pi$, la transformada canónica de la matriz (13) rota entre el hamiltoniano del oscilador repulsivo y (menos) el operador de escala:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\left(\mathbf{M}^A\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{\frac{1}{2}}(\mathcal{P}^2 - \mathcal{X}^2)\mathcal{C}\left(\mathbf{M}^A\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right)^{-1} \\ = -\frac{1}{2}(\mathcal{X}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{X}). \end{aligned} \quad (23)$$

Las transformaciones (20) preservan el conmutador básico entre los operadores de posición y momento:

$$[\mathcal{X}', \mathcal{P}'] = [\mathcal{X}, \mathcal{P}] = i1.$$

Se llaman transformaciones canónicas porque conservan así la estructura fundamental de la mecánica cuántica. Los operadores y las matrices de esta sección son representaciones homomorfas del grupo $\mathbf{Sl}(2, \mathbb{R})$.

3. Evolución puntual e integral

Existe una tercera realización del grupo $\mathbf{Sl}(2, \mathbb{R})$ cuando actúa sobre el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ de funciones de onda. Son las transformadas canónicas integrales [17], generadas por operadores diferenciales de segundo orden exponenciados [18]. Esta acción puede ser de tres tipos: Cuando \mathcal{H} es un operador diferencial de orden cero —como \mathcal{X} y sus potencias— se genera solamente un factor de fase:

$$\begin{aligned} \exp(i\alpha\mathcal{X}^n)\psi(x) &= \exp(i\alpha x^n)\psi(x), \\ n &\in \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Cuando el exponente es un operador diferencial de primer orden su acción es punto-a-punto, como:

$$\begin{aligned} a \exp(i\alpha\mathcal{P})\psi(x) &= \exp\left(\alpha\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = \psi(x+\alpha), \quad (25) \\ \exp(i\alpha\mathcal{H}^S)\psi(x) &= \exp\left(\alpha\left[\frac{1}{2} + x\frac{d}{dx}\right]\right)\psi(x) \\ &= e^{\alpha/2}\psi(e^\alpha x), \end{aligned} \quad (26)$$

para traslación y cambio de escala respectivamente. Se llaman *puntuales* porque mapean cada punto x del argumento de la función en otro punto de la misma función. Traslaciones en el espacio fase $(x, p) \mapsto (x + x_o, p + p_o)$ se hacen con

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_o, p_o} &:= \exp[i(p_o\mathcal{X} - x_o\mathcal{P})] \\ &= e^{-ix_o p_o/2} \exp(ip_o\mathcal{X}) \exp(-ix_o\mathcal{P}), \\ (\mathcal{T}_{x_o, p_o}\psi)(x) &= \exp\left[ip_o\left(x - \frac{1}{2}x_o\right)\right]\psi(x-x_o), \end{aligned} \quad (27)$$

donde hemos utilizado la relación de Baker-Campbell-Hausdorff para desenredar la exponencial de una suma de operadores que no conmutan [19].

Finalmente, cuando el operador diferencial exponenciado es de segundo orden [18], como (13) y (14), se llama hiperdiferencial, y su acción es *integral*:

$$\left(\mathcal{C}(M)\psi\right)(x) := \int_{\mathbb{R}} dx' C(x, x'; M(\tau))\psi(x'), \quad (28)$$

donde $C(x, x'; M(\tau))$ es el núcleo integral (*kernel*) por determinar. Para encontrarlo, Moshinsky y Quesne [17] aplicaron (20) a (28) encontrando dos ecuaciones diferenciales simultáneas, cuya solución normalizada es

$$\begin{aligned} C\left(x, x'; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi ib}} \\ &\times \exp\left(\frac{i}{2b}(dx^2 - 2xx' + ax'^2)\right). \end{aligned} \quad (29)$$

El factor de normalización y su fase,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi ib}} := \frac{\exp\left(-i\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi \operatorname{sign} b\right)\right)}{\sqrt{2\pi |b|}}, \quad (30)$$

se determinan exigiendo que en el límite $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{1}$, el núcleo integral (29) converja (en sentido apropiado) a la δ de Dirac, $C(x, x'; \mathbf{1}) = \delta(x - x') =: \delta_{x'}(x)$, para que $\mathcal{C}(\mathbf{1}) = 1$. En efecto, cuando $|b| \rightarrow 0$ en el semiplano complejo $\operatorname{Im} b < 0$, la transformada integral limita a una transformación puntual (24)-(26) y su acción es

$$\left[\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1/a \end{pmatrix}\right)\psi\right](x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(i\frac{cx^2}{2a}\right)\psi\left(\frac{x}{a}\right), \quad (31)$$

lo cual complementa (28)-(30). En particular, de (29) notamos que la transformada integral de Fourier es una transformada canónica (por una fase):

$$\mathcal{F} = e^{i\pi/4}\mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad (32)$$

puesto que el kernel integral es entonces $e^{-ixx'}/\sqrt{2\pi}$. Las transformadas canónicas $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ son unitarias en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ porque los exponentes son hermiteanos. Al igual que las matrices y los operadores hiperdiferenciales, las transformadas canónicas forman grupo.

En conclusión, la evolución de una función de onda cuántica $\psi(x)$ bajo el potencial de oscilador repulsivo, está dada por (29) con el subgrupo (14),

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= \mathcal{C}\left(\begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix}\right)\psi(x) \\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi \sinh \tau}} \int_{\mathbb{R}} dx' \exp i\left(\frac{1}{2}(x^2 + x'^2)\right) \\ &\quad \times \coth \tau - xx' \operatorname{csch} \tau \psi(x'). \end{aligned} \quad (33)$$

Este núcleo integral $C(x, x'; \mathbf{M}^R(\tau))$ es la *función de Green* del oscilador repulsivo; ésta determina que el desarrollo de una δ de Dirac inicial sentada en $x=x_o$, $\psi_{x_o}(x, 0)=\delta_{x_o}(x)$, es $\psi_{x_o}(x, \tau)=C(x, x_o; \mathbf{M}^R(\tau))$. Notamos que este desarrollo es independiente de la energía η , a la cual ahora enfocaremos ahora nuestra atención.

4. Funciones propias del oscilador repulsivo

Las funciones propias del oscilador repulsivo son las que tienen energía η definida; son separables en una fase temporal $\exp(-i\eta\tau)$ multiplicando a una función que resuelve la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\mathcal{H}^R \psi_\eta(x) := -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \psi_\eta(x) = \eta \psi_\eta(x). \quad (34)$$

Entre los métodos para encontrar las soluciones, tenemos a mano la relación (23), la cual implica que si $\psi_\eta(x)$ resuelve (34), entonces

$$\bar{\psi}_\eta(x) := \left(\mathcal{C}(\mathbf{M}^A(\frac{1}{4}\pi)) \psi_\eta \right)(x). \quad (35)$$

será solución de

$$-\mathcal{H}^S \bar{\psi}_\eta(x) = i \left(x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \right) \bar{\psi}_\eta(x) = \eta \bar{\psi}_\eta(x). \quad (36)$$

Ésta es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución puede encontrarse por inspección: es $\sim x^{-1/2-i\eta}$, $\eta \in \mathfrak{R}$. Pero como la Ec. (36) es singular en $x = 0$, sus soluciones en $x > 0$ y en $x < 0$ están desconectadas, de modo que tenemos *dos* soluciones que distinguiremos mediante el índice $\sigma \in \{+, -\}$,

$$\bar{\psi}_{\eta,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x_\sigma^{-1/2-i\eta}, \quad (37)$$

donde x_\pm son las funciones potencia truncadas de Gel'fand [20],

$$x_+ := \begin{cases} x & \text{en } x > 0, \\ 0 & \text{en } x < 0, \end{cases} \quad (38)$$

$$x_- := \begin{cases} 0 & \text{en } x > 0, \\ -x & \text{en } x < 0, \end{cases}$$

El factor $1/\sqrt{2\pi}$ en (37) se determina para tener la normalización de Dirac en $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$; bajo el cambio de variable $x_\sigma = \sigma e^y$, $y \in \mathfrak{R}$, el producto escalar es

$$\begin{aligned} a(\psi_{\eta,\sigma}, \psi_{\eta',\sigma'}) &= (\bar{\psi}_{\eta,\sigma}, \bar{\psi}_{\eta',\sigma'}) \\ &= \delta_{\sigma,\sigma'} \int_{\mathfrak{R}_\sigma} dx \bar{\psi}_{\eta,\sigma}(x)^* \bar{\psi}_{\eta',\sigma'}(x) \quad (39) \\ &= \frac{\delta_{\sigma,\sigma'}}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} dy \exp(iy(\eta' - \eta)) \\ &= \delta_{\sigma,\sigma'} \delta(\eta - \eta'), \quad (40) \end{aligned}$$

donde en (39) usamos la unitariedad de las transformadas canónicas, y un resultado conocido del análisis de Fourier en (40).

Finalmente recuperamos la función original invirtiendo (35) para obtener las funciones propias del oscilador re-

pulsivo, las cuales quedan dadas por la integral

$$\psi_{\eta,\sigma}(x) = \left(\mathcal{C}(\mathbf{M}^A(-\frac{1}{4}\pi)) \bar{\psi}_{\eta,\sigma} \right)(x) \quad (41)$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4} e^{ix^2/2}}{2^{3/4}\pi} \int_{\mathfrak{R}_\sigma} dx' |x'|^{-1/2-i\eta} \times \exp i \left(\frac{1}{2} x'^2 - \sqrt{2} x x' \right) \quad (42)$$

$$= c(\eta) D_{-1/2+i\eta}(\sigma\sqrt{2}e^{3i\pi/4}x),$$

$$\text{con } c(\eta) := \frac{e^{-i\pi/8} e^{\pi\eta/4} \Gamma(\frac{1}{2} - i\eta)}{2^{3/4}\pi}, \quad (43)$$

y así hemos reemplazado un problema diferencial por uno integral.

La integral (42) se encuentra en tablas [21]. El valor absoluto del integrando es asintóticamente $\sim 1/\sqrt{|x'|}$ de modo que está en la frontera de la integrabilidad en $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$, pero su trino permite obtener el resultado finito (43), donde $D_\nu(z)$ es una función de cilindro parabólico [22], la cual es una combinación lineal de funciones hipergeométricas confluentes ${}_1F_1(a; c; z)$. Con $2\mu := -\frac{1}{2} + i\eta$ podemos escribirlas como [22]

$$\begin{aligned} D_{2\mu}(\sigma\sqrt{2}e^{3i\pi/4}x) &= \frac{e^{ix^2/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\alpha(\mu) {}_1F_1\left(-\mu; \frac{1}{2}; -ix^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta(\mu)\sigma x {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \mu; \frac{3}{2}; -ix^2\right) \right), \quad (44) \end{aligned}$$

con los coeficientes

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &:= 2^\mu \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) \cos \pi\mu, \\ \beta(\mu) &:= e^{3i\pi/4} 2^{\mu+1} \Gamma(\mu+1) \sin \pi\mu. \quad (45) \end{aligned}$$

En la Fig. 2 graficamos estas funciones propias para valores escogidos de la energía η y $\sigma = +$ [15]. Cuando $\eta > 0$ vemos que la partícula libra la barrera; para $\eta < 0$ la barrera mayormente refleja su función de onda, aunque un poco tunelea a través de la barrera y reaparece del otro lado. La figura muestra que con $\sigma = +$ la onda proviene de la izquierda, mientras que cuando $\sigma = -$ provendrá de la derecha, ya que $\psi_{\eta,-}(x) = \psi_{\eta,+}(-x)$. Las funciones propias son en realidad ondas estacionarias, pues bajo evolución temporal sólo se multiplican por $\exp(-i\eta\tau)$, y esto deja su valor absoluto invariante. Asintóticamente, las funciones de onda del oscilador repulsivo trinan:

$$\psi_{\eta,\pm}(x) \propto e^{ix^2/2} / \sqrt{|x|} \quad \text{para } |x| \rightarrow \infty, \quad (46)$$

y están en la frontera (pero fuera) de $\mathcal{L}^2(\mathfrak{R})$, como todas las bases impropias de Dirac.

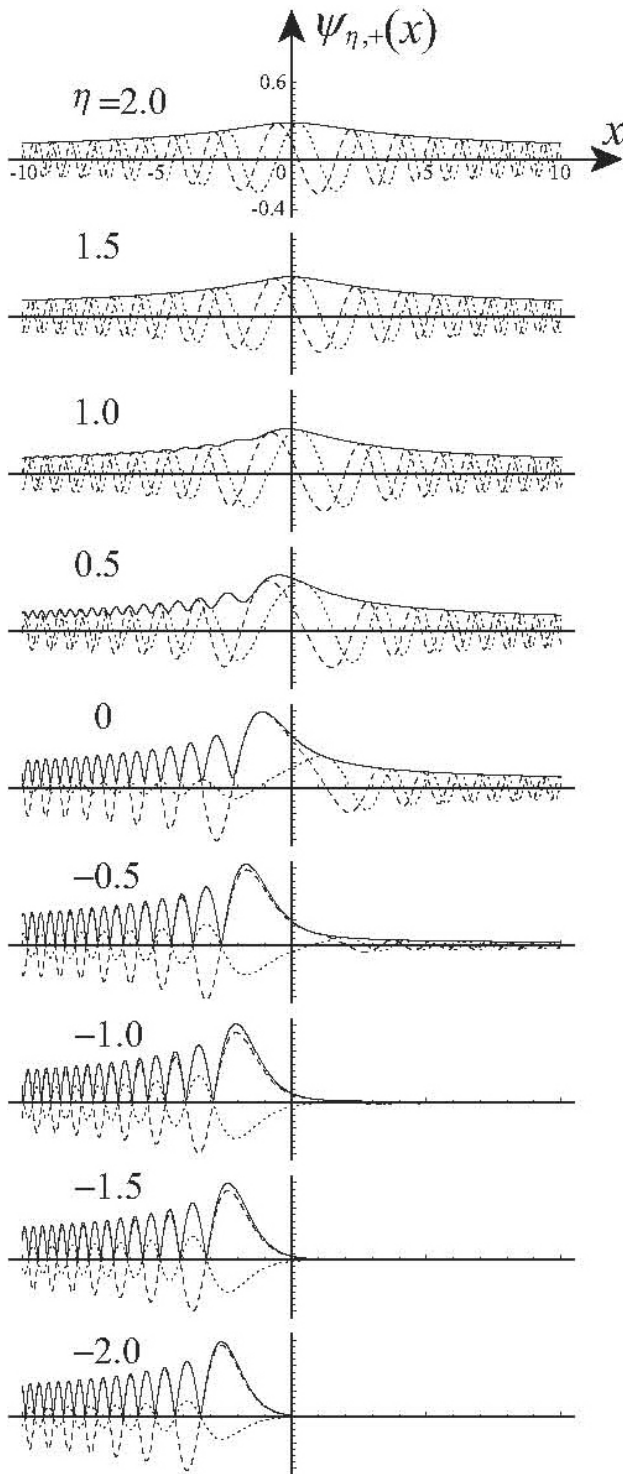


FIGURA 2. Funciones de onda propias del oscilador repulsivo cuántico (41)-(44) con energías $\eta \in \{2.0, 1.5, \dots, -2.0\}$ y $\sigma = +$ (movimiento a la derecha). Las partes real e imaginaria se representan por líneas rayadas y punteadas respectivamente, y el valor absoluto por línea continua.

5. Movimiento de paquetes gaussianos

Usaremos ahora el formalismo de matrices para calcular la evolución temporal de una función de onda dada por un pa-

quete gaussiano centrado en la posición x_o y con momento p_o en el espacio fase. Usado con soltura, este método es más transparente y sencillo que la integración mediante la función de Green en (33). Será también aplicable a otras funciones conectadas con los operadores cuadráticos.

Comenzamos por hacer notar que (29) nos permite escribir las funciones gaussianas como transformadas canónicas complejas de una δ de Dirac [18]:

$$\begin{aligned} G_\omega(x) &:= \left[\mathcal{C} \left(\begin{array}{cc} 1 & -i\omega \\ 0 & 1 \end{array} \right) \delta_0 \right] (x) \\ &= C \left(x, 0; \begin{pmatrix} 1 & -i\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}} \exp \left(-\frac{x^2}{2\omega} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

donde el ancho cuadrático ω puede ser complejo pero debe cumplir $\text{Re } \omega > 0$, y la normalización es tal que el área bajo la curva es la unidad,

$$\int_{\mathbb{R}} dx G_\omega(x) = 1.$$

Es bien sabido que la transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana de ancho inverso. Para probarlo, podemos simplemente resolver la integral correspondiente o, usando (32) y (48), efectuar el cálculo multiplicando matrices de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}G_\omega)(p) &= e^{i\pi/4} \left[\mathcal{C} \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right) \mathcal{C} \left(\begin{array}{cc} 1 & -i\omega \\ 0 & 1 \end{array} \right) \delta_0 \right] (p) \\ &= e^{i\pi/4} C \left(p, 0; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -i\omega \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \omega p^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} G_{1/\omega}(p). \end{aligned} \quad (48)$$

Aquí ambas gaussianas tienen su centro en el origen; para abordar el caso más general, trasladaremos (48) la gaussiana original al punto (x_o, p_o) en el espacio fase mediante el operador de traslación (27),

$$\begin{aligned} G(\omega; x_o, p_o; x) &:= (\mathcal{T}_{x_o, p_o} G_\omega)(x) \\ &= e^{-ix_o p_o/2} e^{ip_o x} G_\omega(x - x_o), \end{aligned} \quad (49)$$

y a ella aplicaremos el operador de evolución del oscilador repulsivo (14). Haciéndolo con las matrices asociadas a las transformadas canónicas evitaremos el cálculo integral (33).

Abreviamos

$$\mathcal{R}(\tau) := \mathcal{C} \left(\begin{array}{cc} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{array} \right)$$

para escribir

$$G(\omega_o; x_o, p_o; x, \tau) := \mathcal{R}(\tau)G(\omega_o; x_o, p_o; x) = \mathcal{R}(\tau)\mathcal{T}_{x_o, p_o}\mathcal{R}(-\tau) \times \left[\mathcal{C} \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta \right](x) \quad (50)$$

$$= \mathcal{T}_{x(\tau), p(\tau)} \times \left[\mathcal{C} \begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau - i\omega_o \cosh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau - i\omega_o \sinh \tau \end{pmatrix} \delta \right](x) \quad (51)$$

donde el operador de traslación se transforma con

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\tau) (p_o\mathcal{X} - x_o\mathcal{P}) \mathcal{R}(-\tau) &= p(\tau)\mathcal{X} - x(\tau)\mathcal{P}, \\ x(\tau) &= x_o \cosh \tau + p_o \sinh \tau, \\ p(\tau) &= x_o \sinh \tau + p_o \cosh \tau, \end{aligned} \quad (52)$$

como en el modelo clásico (2). La transformada canónica en el segundo factor se compone multiplicando las matrices, que ahora reescribimos como

$$\begin{pmatrix} \cosh \tau & \sinh \tau - i\omega_o \cosh \tau \\ \sinh \tau & \cosh \tau - i\omega_o \sinh \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\tau) & 0 \\ c(\tau) & 1/-i\omega_1(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i\omega_1(\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

factorizándolo en una transformación puntual (31) y una transformada compleja (48) con parámetros

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \cosh \tau, \quad c(\tau) = \sinh \tau, \\ \omega_1(\tau) &= \omega_o + i \tanh \tau. \end{aligned} \quad (54)$$

Actuando sobre la δ de Dirac en (52), resulta

$$G(\omega_o; x_o, p_o; x, \tau) = \left[\mathcal{T}_{x(\tau), p(\tau)} \mathcal{C} \begin{pmatrix} a(\tau) & 0 \\ c(\tau) & 1/a(\tau) \end{pmatrix} G_{\omega_1(\tau)} \right](x) \quad (55)$$

$$= \mathcal{T}_{x(\tau), p(\tau)} \frac{\exp(i c(\tau)x^2/2a(\tau))}{\sqrt{a(\tau)}} G_{\omega_1(\tau)} \left(\frac{x}{a(\tau)} \right) \quad (56)$$

$$= \frac{\mathcal{T}_{x(\tau), p(\tau)}}{\sqrt{\cosh \tau - i\omega_o \sinh \tau}} G_{\omega(\tau)}(x) \quad (57)$$

$$= \frac{\exp[i p(\tau) (x - \frac{1}{2}x(\tau))]}{\sqrt{\cosh \tau - i\omega_o \sinh \tau}} G_{\omega(\tau)}(x - x(\tau)), \quad (58)$$

donde $x(\tau)$ y $p(\tau)$ están dadas en (53) y el factor gaussiano tiene un ancho complejo,

$$\begin{aligned} \omega(\tau) &= \frac{\omega_1(\tau) a(\tau)}{1/a(\tau) - i c(\tau) \omega_1(\tau)} \\ &= \frac{\omega_o \cosh \tau + i \sinh \tau}{\cosh \tau - i\omega_o \sinh \tau}. \end{aligned} \quad (59)$$

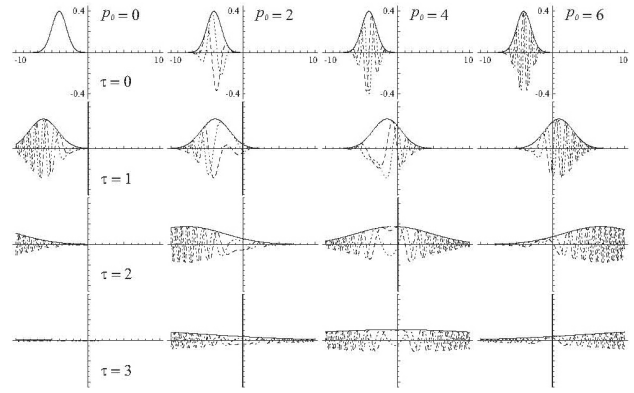


FIGURA 3. Movimiento de paquetes de onda gaussianos (50) bajo el potencial de oscilador repulsivo cuántico (56)-(60), con posición y ancho iniciales $x_o = -4$ y $\omega_o = 1$. Las columnas corresponden a energías centradas en $\eta_o = -8, -6, 0$, y $+10$ (con momentos iniciales $p_o = 0, 2, 4$ y 6). Los renglones corresponden a tiempos $\tau = 0, 1, 2, 3$. Las partes real e imaginaria se representan por línea rayadas y punteadas, y el valor absoluto por línea continua.

La parte real de ω es positiva y nos indica el ancho del pico principal de la función, mientras que la parte imaginaria la hace trinar, es decir oscilar con una frecuencia proporcional a su distancia x al origen. El desarrollo en el tiempo de paquetes de onda gaussianos se muestra en la Fig. 3 [15]. Vale recordar que estos paquetes contienen todas las energías $\eta \in \mathbb{R}$, gaussianamente centradas en la energía (invariante) $\eta_o := 1/2(p_o^2 - x_o^2)$. Cuando esta energía es positiva, el paquete mayormente atraviesa la barrera; cuando es negativa, mayormente se refleja.

6. Representación en espacio fase cuántico

La vista más completa y transparente de las funciones de onda cuánticas $\psi(x)$ se pinta en el espacio fase, cuyas coordenadas son posición y momento (x, p) , mediante su función de Wigner $W(\psi|x, p)$, definida por [23],

$$\begin{aligned} W(\psi|x, p) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dy \psi(x - \frac{1}{2}y)^* \psi(x + \frac{1}{2}y) e^{-ipy}. \end{aligned} \quad (60)$$

Entre sus muchas propiedades —que no listaremos aquí [24] están la de ser una función real y covariante bajo traslaciones y transformadas canónicas reales del espacio fase [25]; Adaptando la notación, éstas son

$$aW\left(\mathcal{T}_{x_o, p_o} \psi \left| \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \right.\right) = W\left(\psi \left| \begin{pmatrix} x-x_o \\ p-p_o \end{pmatrix} \right.\right), \quad (61)$$

$$W\left(\mathcal{C}(M) \psi \left| \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \right.\right) = W\left(\psi \left| \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \right.\right). \quad (62)$$

La función de Wigner de la gaussiana (48) con ancho complejo $\omega = \text{Re } \omega + i \text{Im } \omega$ ($\text{Re } \omega > 0$) puede ser calculada con la ayuda de (49), como transformada de Fourier del integrando gaussiano, para obtener:

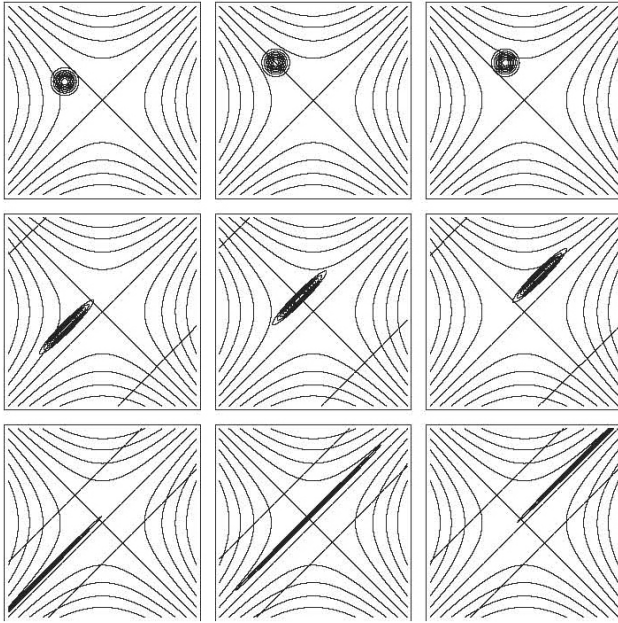


FIGURA 4. Curvas de nivel en el espacio fase de la función de Wigner de la gaussiana (58) con ancho inicial $\omega_o = 1$, moviéndose bajo el potencial de oscilador repulsivo. Las columnas tienen posiciones y momentos iniciales $(x_o, p_o) = (-4, 2)$, $(-4, 4)$, y $(-2, 4)$, con energías centradas en $\eta_o = -12, 0$, y 12 respectivamente. Los renglones corresponden a tiempos $\tau = 0, 1, 2$.

$$W(G_\omega | x, p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi\text{Re}\omega}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{\text{Re}\omega} - \frac{p^2}{\text{Re}(1/\omega)} + 2xp\frac{\text{Im}\omega}{\text{Re}\omega}\right). \quad (63)$$

Ésta es una gaussiana en espacio fase con anchos $1/2\text{Re}\omega$ en x y $1/2\text{Re}(1/\omega)$ en p ; sus valores constantes forman elipses que pueden ser referidas a sus ejes principales mediante una rotación de ángulo θ , con $\tan 2\theta = 2\text{Im}\omega/(|\omega|^2 - 1)$. A partir de este resultado y (58) podemos hacer explícito el movimiento de la gaussiana (56) en espacio fase; para ello es suficiente reemplazar en (64) $x \mapsto x - x(\tau)$ y $p \mapsto p - p(\tau)$ según (53), $\omega \mapsto \omega(\tau)$ según (60), y tomar en cuenta el cuadrado absoluto del prefactor con $\text{Re}\omega(\tau) = \omega_o/(\cosh^2\tau + \omega_o^2 \sinh^2\tau)$. En la Fig. 4 mostramos las curvas de nivel de la función de Wigner de esta gaussiana que evoluciona bajo el potencial de oscilador repulsivo, la cual podemos comparar con el movimiento clásico en la Fig. 1b.

7. Extensiones y conclusiones

Nuestra estrategia de usar matrices para encontrar la evolución de funciones de onda no se reduce a gaussianas en osciladores repulsivos. Por ejemplo, si el paquete inicial es una función propia del hamiltoniano de oscilador armónico \mathcal{H}^A en (5), es decir una función Hermite-gaussiana $\Psi_n(x)$ con energía $n + 1/2$ [13], inicialmente centrada en (x_o, p_o) ,

este centro se moverá sobre $(x(\tau), p(\tau))$ exactamente como en (53), pero cambiará la forma de la función. Para encontrarla, descomponemos la matriz de evolución repulsiva $\mathcal{R}(\tau)$ en un factor geométrico (31) como antes, y un factor de movimiento armónico (13), así:

$$\begin{pmatrix} \cosh\tau & \sinh\tau \\ \sinh\tau & \cosh\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\tau) & 0 \\ c(\tau) & 1/a(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\tau' & \sin\tau' \\ -\sin\tau' & \cos\tau' \end{pmatrix} \quad (64)$$

Mediante álgebra elemental obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \tan\tau' &= \tanh\tau, & a(\tau) &= \frac{\sinh\tau}{\sin\tau'} = \frac{\cosh\tau}{\cos\tau'}, \\ c(\tau) &= \frac{\sinh\tau}{\cos\tau'} + \frac{\sin\tau'}{\cosh\tau} = \frac{\cosh\tau}{\sin\tau'} - \frac{\cos\tau'}{\sinh\tau}. \end{aligned} \quad (65)$$

Como $\mathcal{H}^A \Psi_n(x) = (n+1/2) \Psi_n(x)$, el operador del factor derecho en (65) sólo multiplica la función de onda del oscilador armónico por una fase,

$$(\mathcal{C}(\mathbf{M}^A(\tau')) \Psi_n)(x) = \exp\left(-i\tau' \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \Psi_n(x), \quad (66)$$

mientras que el factor izquierdo es geométrico y produce un cambio de escala y un trino dado por (31), es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}(\tau) \Psi_n)(x) &= \frac{e^{-i\tau'(n+1/2)}}{\sqrt{a(\tau)}} \mathcal{T}_{x(\tau), p(\tau)} \\ &\times \exp\left(i\frac{c(\tau)x^2}{2a(\tau)}\right) \Psi_n\left(\frac{x}{a(\tau)}\right), \end{aligned} \quad (67)$$

donde $a(\tau)$, $c(\tau)$ y $\tau'(\tau)$ están dados en (66), y $x(\tau)$, $p(\tau)$ por (2) y (53). De esta manera tenemos una expresión cerrada y explícita del movimiento y transformación de los estados propios de oscilador armónico bajo potencial repulsivo.

Esta estrategia se puede extender para encontrar la evolución en el tiempo las funciones propias de cualquier potencial cuadrático bajo otro potencial cuadrático (13)-(15). También se puede extender al plano complejo para describir la difusión de calor mediante (15) con $\tau \mapsto i\bar{\tau}$. Y se puede extender más para incluir un cuarto potencial, el de caída libre con el hamiltoniano $1/2\mathcal{P}^2 + \mathcal{X}$ y sus funciones propias de Airy bajo cualquiera de los tres potenciales anteriores [15]. De esta manera evitamos el cálculo directo de las integrales de Green (33) y vemos una clara separación entre los factores geométricos y dinámicos de la evolución.

Agradecimientos

Agradezco al Quím. Guillermo Krötzsch (ICF-UNAM, Cuernavaca) por su apoyo imprescindible con las figuras, y el apoyo recibido de los proyectos *Óptica Matemática* PAPIIT-UNAM IN-105008 y SEP-CONACYT 79899.

1. L.D. Landau y E.M. Lifshits, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, Londres, 1958).
2. E.G. Kalnins y W. Miller Jr., *J. Math. Phys.* **15** (1974) 1728.
3. W. Miller Jr., *Symmetry Groups and Separation of Variables* Vol. 4, Ed. por G.-C. Rota (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977).
4. N.Ja. Vilenkin y A.U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions* / (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991),
5. K.B. Wolf, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 601.
6. K.B. Wolf, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1046.
7. D. Basu y K.B. Wolf, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 189.
8. G. Barton, *Ann. Phys.* **166** (1986) 322.
9. N.L. Balazs y A. Voros, *Ann. Phys.* **199** (1990) 123.
10. S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani y V. Papatheou, *J. Phys. A* **26** (1993) L819.
11. E.J. Heller, *J. Chem. Phys. A* **103** (1999) 10433.
12. I.A. Pedrosa y I. Guedes, *Int. J. Mod. Phys. B* **18** (2004) 1379.
13. H.J.W. Müller-Kirsten, *Introduction to Quantum Mechanics* (World Scientific, Singapur, 2006).
14. C. Yuce, A. Kilic y A. Coruh, *Phys. Scr.* **74** (2006) 114.
15. K.B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Publ. Corp., Nueva York, 1979).
16. R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (Wiley, Nueva York, 1974).
17. M. Moshinsky y C. Quesne, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 1772.
18. K.B. Wolf, *J. Math. Phys.* **15** (1974) 1295.
19. B. Mielnik y J. Plebański, *Ann. Inst. H. Poincaré A* **12** (1970) 215.
20. I.M. Gel'fand *et al.*, *Generalized Functions* (5 volúmenes) (Academic Press, Nueva York, 1964).
21. I.S. Gradshteyn y I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* 6^a Ed. (Academic Press, San Diego, 2000).
22. M. Abramowitz y I.A. Stegun Eds., *Handbook of Mathematical Functions* (National Bureau of Standards, 1964).
23. E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40** (1932) 749.
24. M. Hillery, R.F. O'Connell, M.O. Scully y E.P. Wigner, *Phys. Rep.* **259** (1995) 147.
25. G. García Calderón y M. Moshinsky, *J. Phys. A* **13** (1980) L185.