



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Estudio teórico-experimental de modos
transversales de orden superior en
levitadores acústicos de onda
estacionaria.

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Física

presenta:

Diego de Jesús Flores Bravo

Tutor



Dr. Victor Ulises Lev Contreras Loera
Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2026

Índice general

1. Introducción	4
2. Modelación del campo acústico	8
2.1. Teoría de perturbaciones	8
2.1.1. Perturbaciones de primer orden	8
2.1.2. Perturbaciones de segundo orden	10
2.2. Fuerza de radiación acústica en una esfera elástica	11
2.2.1. Potenciales acústicos	11
2.2.2. Fuerza de radiación	12
2.2.3. Rigidez o <i>stiffness</i>	14
2.3. Efecto de tamaño en levitación de ondas estacionarias	15
2.4. Modos transversales de orden superior	18
3. Desarrollo experimental	24
3.1. Construcción del TinyLev y técnicas de visualización del campo acústico	24
3.1.1. Transductores	24
3.1.2. Selección de transductores	25
3.1.3. Ensamblaje de casquetes	28
3.1.4. Alineación y ajuste de cavidad	29
3.1.5. Calibración del micrófono	30
3.1.6. Sistema de schlieren	35
3.2. Desarrollo computacional: cómputo de fuerzas acústicas	36
3.2.1. Cálculo de fuerzas	38
3.2.2. Consideraciones especiales para el estudio de los modos de orden superior	39
4. Resultados	41
4.1. Resultados	41
4.1.1. Presión en la superficie del transductor	41
4.1.2. Presión en la superficie del casquete	42
4.1.3. Perfiles transversales y efecto de resonancia	43

4.1.4.	Deflectometría schlieren	49
4.1.5.	Capacidad de levitación	51
4.2.	Mapa de posiciones de equilibrio	52
4.2.1.	Modo fundamental $m = 0$	53
4.2.2.	Modos superiores $m = 1, m = 3$	55
4.2.3.	Rigidez en ausencia de gravedad y tamaños ideales de atrapamiento	56
4.3.	Efectos de resonancia de partícula	59
4.4.	Simulaciones considerando el peso	61
4.4.1.	Rigidez y posiciones de equilibrio	62
5.	Conclusiones	67

Índice de figuras

1.1. Diagrama del TinyLev. A_0 es la apertura angular, L es la longitud de la cavidad. Los casquetes esféricos tienen un radio de curvatura R . La apertura numérica se define como $NA = A_0/R$	6
2.1. Valor de la <i>rigidez</i> en las direcciones z y x para partículas de EPS en un levitador TinyLev operando en el modo fundamental. El parámetro adimensional a se define como $a = r/\lambda$, donde r es el radio de la esfera. Estos valores fueron calculados computacionalmente.	15
2.2. Fuerza acústica, en unidades arbitrarias, experimentada por una esfera de EPS en una onda plana estacionaria. A la izquierda se muestra el mapa de fuerza en función de la posición axial z/λ y del tamaño adimensional de la partícula $a = r/\lambda$; el color amarillo representa una fuerza positiva y el azul una negativa. Para una esfera de tamaño fijo, existen puntos de equilibrio estable a lo largo del eje z en las posiciones donde la fuerza cambia de positiva a negativa al recorrer dicho eje. La línea punteada roja indica la altura considerada para la gráfica de la derecha. En esta última se presenta la fuerza normalizada en función del tamaño de la partícula, evaluada a la altura marcada en el mapa. La curva azul corresponde al cálculo mediante GLMT, mientras que la curva roja corresponde a la aproximación de Gor'kov. Obsérvese que, al aumentar el radio, la fuerza acústica deja de crecer monótonamente, decrece e incluso cambia de signo. Este comportamiento corresponde al <i>efecto de tamaño</i>	16
2.3. Mapas de fuerzas acústicas para dos radios de partícula en el modo fundamental. Cada vector representa la fuerza acústica que experimentaría una partícula si su centro se ubicara en la posición de origen del vector. El fondo en escala de grises representa el campo acústico. Los círculos verdes indican el tamaño y la posición de la partícula en cada caso. Recuérdese que a es un parámetro adimensional definido como $a = r/\lambda$, donde r es el radio de la partícula en metros.	17

2.4. TinyLev: levitador acústico de onda estacionaria conformado por dos casquetes esféricos separados por una distancia aproximada de dos veces el radio de curvatura. Cada superficie cuenta con múltiples transductores ultrasónicos. También se observa una partícula atrapada entre ambos por fuerzas acústicas.	18
2.5. Configuraciones de fase y parámetros geométricos del sistema. Representación esquemática de las condiciones de frontera para las configuraciones de fase 0 (izquierda) y fase π (derecha). Las flechas sólidas indican la dirección del desplazamiento de los casquetes en un tiempo t , mientras que las flechas punteadas representan el desplazamiento medio ciclo después. Se muestran los parámetros físicos relevantes: el radio de curvatura a , el ángulo polar de apertura θ_0 y el plano ecuatorial en $\theta = \pi/2$. En la configuración de fase 0 ($\Omega_0 = 0$), las ondas interfieren constructivamente, generando un antinodo de presión (p_{max}) en el centro de la cavidad, mientras que en la configuración de fase π ($\Omega_0 = \pi$), la interferencia es destructiva, resultando en un nodo de presión ($p = 0$) en el plano ecuatorial. Adaptado de [10].	19
2.6. Campo acústico, en unidades arbitrarias, representado en dos planos. El plano de la derecha está en $z = 0$. Este campo corresponde al modo fundamental, $m = 0$, y presenta una única columna de antinodos de presión a lo largo del eje z .	21
2.7. Campo acústico, en unidades arbitrarias, representado en dos planos para $m = 1$. A diferencia del modo fundamental, se observan dos columnas de antinodos.	21
2.8. Campo acústico, en unidades arbitrarias, correspondiente al modo $m = 2$. Se observan cuatro columnas de antinodos.	22
2.9. Campo acústico correspondiente al modo $m = 3$. En el plano $z = 0$ se observan seis antinodos. Si bien los modos anteriores ya han sido estudiados, el presente trabajo representa un avance en el estudio de este modo. La cantidad de nodos en cada una de las columnas posibilita atrapar más de 24 esferas de EPS simultáneamente, tal como se verá más adelante.	22
3.1. Imagen del transductor Manorshi MSOA1040H07 [19]. A la izquierda se observa la apariencia exterior del transductor. El diámetro d es de 10 mm y h es de 7 mm. A la derecha se observan los componentes internos del transductor. .	25
3.2. Vista lateral, inferior y superior de los transductores [20]. Se especifican la longitud de los electrodos, la distancia entre ellos y las dimensiones de la carcasa del transductor.	25
3.3. Se presentan dos formas de colocar los transductores para evaluar desfase y amplitud. A la derecha se utiliza una pieza impresa en 3D para colocar el transductor emisor y el receptor frente a frente. A la izquierda se prescinde de esta pieza, pero en ambos casos el emisor y el receptor están separados por una distancia múltiplo de media longitud de onda [19].	26

3.4.	Diagrama de dispersión de los transductores. En el eje x esta la amplitud, en el eje y la fase relativa respecto al emisor. En rojo se destaca el conjunto de transductores seleccionados para el levitador del presente trabajo. El voltaje promedio fue de $55,6 \pm 3mV$ con una fase relativa de $-6^\circ \pm 2,8^\circ$	27
3.5.	Plano del casquete del levitador. Los huecos tienen el ancho necesario para que los transductores entren a presión. El orificio central se dispuso con las dimensiones necesarias para instalar una cámara. El valor del radio de curvatura se mide a partir del cono emisor del transductor. La distancia entre la superficie de los transductores y el centro de curvatura del casquete es de 42 mm. El cono emisor de un transductor está un milímetro al interior de la cara frontal. Con esta última corrección se tiene un radio de curvatura de 43 mm.	27
3.6.	Vista superior e inferior del casquete. En la figura a) vista inferior del casquete. Los transductores forman 6 circuitos diferentes mediante cables de cobre. En la figura b) se observa la vista superior del casquete. La impresión en 3D tiene forma hexagonal.	28
3.7.	Diagrama esquemático de un casquete del levitador. El casquete se divide geoméricamente en seis sectores; sin embargo, para su excitación estos se agrupan en cuatro conjuntos de fase. Los sectores que comparten color, como los azules y los negros, están eléctricamente puenteados y se excitan con la misma fase. Este sistema de clasificación por color es el mismo para ambos casquetes, vistos desde arriba del levitador ensamblado.	28
3.8.	Arreglo para la calibración del micrófono. Se colocó el micrófono 46DE sobre un riel. Este se encontraba graduado y dispuesto de tal forma que el 0 del riel colocaba al micrófono inmediatamente en la superficie del emisor. El transductor emisor es el cilindro que se encuentra conectado a la protoboard frente al micrófono, opera a $10V_{rms}$ y emite a 40 kHz.	30
3.9.	Imágenes de schlieren en el modo $m = 3$. En (a) se encuentra el micrófono GRAS 46DE y en (b) el T-Mic. En ambas imágenes se observan dos columnas de lóbulos. La punta del GRAS 46DE tiene dimensiones similares a las de un lóbulo, mientras que la punta del T-Mic es significativamente menor.	31
3.10.	Diagrama del T-Mic acoplado a una montura mecánica. Se pueden realizar desplazamientos controlados lateralmente. El cable coaxial se conecta a un osciloscopio para realizar mediciones.	32
3.11.	Ajuste lineal del voltaje medido con el T-Mic contra la presión medida con el micrófono 42AG, ambas a las mismas distancias del emisor. El emisor fue el transductor 519 alimentado con $10V_{rms}$ a 40 kHz. Las distancias variaron desde ,5 cm hasta 16 cm respecto al emisor. El ajuste arroja una sensibilidad de $12,55 \pm 0,4 \frac{Pa}{mV}$ y un valor de Chi cuadrada superior a 0.99.	33
3.12.	Ajuste lineal de la presión medida con el micrófono apuntando al emisor y la presión medida con el micrófono a 90 grados. El emisor fue el transductor 519 alimentado con $10V_{rms}$ a 40 kHz. El ajuste tiene una Chi cuadrada y un valor de pendiente cercano a 1.	34

3.13.	Esquema del sistema de schlieren de un solo espejo utilizado en este trabajo. El arreglo consistió en una fuente casi puntual generada por la salida de una fibra óptica acoplada a un LED, un espejo esférico cóncavo de longitud focal $f = 90$ cm, un divisor de haz, una navaja orientada horizontalmente y una cámara con lente telescópica. La salida de la fibra se colocó a una distancia $2f$ del espejo. En la figura también se indica el sistema de coordenadas empleado específicamente para el análisis de schlieren: z corresponde a la dirección de propagación de la luz, x es paralelo al filo de la navaja y y es perpendicular a éste.	35
3.14.	Cortes en los planos nodal, en verde, y antinodal, en morado. Estos son los únicos planos en los que se atrapan las partículas, por lo que el estudio tridimensional del campo puede reducirse al análisis de ambos planos para cada modo de orden superior.	39
4.1.	Ajuste de mínimos cuadrados de la presión medida en función de la distancia a la superficie emisora. La línea verde corresponde a la ecuación 4.2. El valor del coeficiente del ajuste es $4,05 \pm 0,12$ con chi cuadrada reducida de 0,99. El transductor emisor 519 fue alimentado con una señal de $8V_p$	41
4.2.	Fotografía del experimento para la adquisición de perfiles transversales de presión de un casquete. Se colocó el T-Mic en una base con ajuste micrométrico. La separación entre el casquete y la boca del micrófono fue la que garantizaba medir los máximos de presión en cada modo. Se accedió a los distintos modos recableando las conexiones a la fuente, como se expuso en una sección anterior.	44
4.3.	Fotografía del experimento para la adquisición de perfiles transversales de presión en cavidad. Se colocó el T-Mic en una base con ajuste micrométrico. La separación entre el casquete y la boca del micrófono fue la que garantizaba medir los máximos de presión en cada modo. La cavidad se ajustó a resonancia.	46
4.4.	Mediciones realizadas a $8V_p$ en el modo fundamental con una longitud de cavidad de 69 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.4a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 2070 Pa; en 4.4b se tiene un máximo de 5109 Pa en cavidad ajustada a resonancia.	47
4.5.	Mediciones realizadas a $4V_p$ en el modo fundamental con una longitud de cavidad de 69 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.5a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 793 Pa; en 4.5b se tiene un máximo de 2228 Pa en cavidad ajustada a resonancia.	48
4.6.	Mediciones realizadas a $8V_p$ en el tercer modo de orden superior con una longitud de cavidad de 72 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.6a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 1013 Pa; en 4.6b se tiene un máximo de 4147 Pa en cavidad ajustada a resonancia.	48

4.7. Mediciones realizadas a $4V_p$ en el tercer modo de orden superior con una longitud de cavidad de 72 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.7a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo promedio de ambos picos de 430 Pa; en 4.7b se tiene un máximo promediado de los dos picos de 1845 Pa en cavidad ajustada a resonancia.	49
4.8. Imágenes de deflectometría Schlieren. En 4.8a se observa el levitador en el modo $m = 3$ con el plano nodal en el centro. En 4.8b se muestra el mismo levitador observado a 90°	50
4.9. Simulación del campo de presión instantáneo y de su derivada parcial respecto al eje y . En ambas imágenes, el amarillo representa magnitudes positivas y el azul magnitudes negativas. A la izquierda se muestra el campo de presión; a la derecha, la derivada respecto al eje y , cuya integración a lo largo de trayectorias ópticas paralelas al eje z determina la deflexión angular del haz. Nótese que la convención de ejes en estas figuras se eligió de modo que la dirección de propagación de la luz corresponda al eje z	51
4.10. Ejemplos de levitación en el modo $m = 3$. En 4.10a se observan múltiples esferas de EPS atrapadas simultáneamente. En 4.10b se muestran dos esferas levitando, una de ellas de gran tamaño.	52
4.11. Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color que va de magenta para $a = 0,120$ a verde para $a = 0,700$, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ	53
4.12. Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ	54
4.13. Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ . En 4.13a se muestra el plano antinodal y en 4.13b el plano nodal. Recuérdese que, en este último, el campo atenuado del fondo corresponde al plano antinodal y se incluyó únicamente como referencia visual. La presión en el plano nodal es 0.	55
4.14. Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ . En 4.14a se muestra el plano antinodal y en 4.14b el plano nodal.	56

4.15. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,120$, $a = 0,323$ y $a = 0,527$, y máximos locales para $a = 0,233$ y $a = 0,391$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.	57
4.16. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,212$, $a = 0,486$ y $a = 0,608$, y máximos locales para $a = 0,364$, $a = 0,547$ y $a = 0,639$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.	58
4.17. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,334$, $a = 0,486$ y $a = 0,669$, y máximos locales para $a = 0,364$, $a = 0,547$ y $a = 0,639$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.	58
4.18. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . En el entorno de $a \approx 0,744$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante. También es destacable que esta partícula se localiza en un nodo, al igual que las partículas pequeñas. El levitador está alimentado a $8V_p$	60
4.19. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . En el entorno de $a \approx 0,747$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante. Esta partícula se localiza en un nodo, al igual que las partículas pequeñas. El levitador está alimentado a $8V_p$	60
4.20. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . En $a = 0,768$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante y se localiza en la posición de un nodo, al igual que las partículas pequeñas. Debe recordarse, sin embargo, que el fondo en esta imagen es meramente ilustrativo, pues al ser un plano nodal la presión es 0. Asimismo, en torno a ese valor los componentes k_x y k_y son comparativamente pequeños, por lo que, aunque el atrapamiento no se descarta, cabe esperar una menor robustez lateral que en el caso antinodal. El levitador está alimentado a $8V_p$	61

4.21. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	63
4.22. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	63
4.23. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	64
4.24. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	65
4.25. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	65
4.26. Posiciones de equilibrio estable y sus valores de <i>rigidez</i> . A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su <i>rigidez</i> . El levitador está alimentado a $8V_p$	66

Dedicado a mi sobrina, a quien, aún antes de nacer, ya amo profundamente.

Resumen

Se presenta un estudio computacional y experimental sobre un tipo particular de campos acústicos estructurados, conocidos como *modos transversales de orden superior*, junto con un análisis de las fuerzas acústicas experimentadas por partículas esféricas de poliestireno expandido (EPS) en estos campos. Los modos transversales de orden superior $m = 1$ y $m = 2$ han demostrado capacidades únicas de levitación para atrapar objetos de formas irregulares y dimensiones inaccesibles para un TinyLev ordinario ($m = 0$). En este trabajo se construye por primera vez un levitador capaz de generar el modo $m = 3$, y el estudio se centra en este modo y en el fundamental ($m = 0$). Se desarrolla una herramienta computacional para determinar las posiciones de equilibrio de esferas levitadas considerando exclusivamente las fuerzas acústicas, así como al incorporar la fuerza gravitacional. Además, se calcula el valor de *rigidez* de la partícula atrapada, una cantidad análoga a la constante de Hooke (k) que expresa la estabilidad del atrapamiento. Los resultados de las simulaciones muestran que los modos de orden superior permiten levitar objetos de tamaños inaccesibles para el modo fundamental. Asimismo, se encuentra que, para radios de esfera en el intervalo $0,77\lambda - 0,777\lambda$, se presentan los valores máximos de rigidez y de fuerzas de atrapamiento dentro del conjunto de tamaños estudiados.

En el ámbito experimental, se realizan modificaciones al diseño del TinyLev con el fin de generar tres modos transversales de orden superior con un mismo levitador, y se caracterizan los campos de presión mediante un micrófono calibrado. Con los datos medidos se calibra la simulación computacional. Mediante el uso de la técnica de Schlieren para visualizar el campo de presión en tiempo real, se observa que, para modos impares de orden superior y bajo ciertas orientaciones de observación, la deflexión neta del haz puede reducirse considerablemente cuando el rayo atraviesa sucesivamente regiones en las que $\partial p_1 / \partial y$ cambia de signo. En consecuencia, disminuye el contraste de la imagen, lo que puede dificultar la observación de la onda estacionaria.

Además, se mide el aumento de la amplitud debido a las reflexiones internas del levitador cuando la longitud de la cavidad se ajusta a un modo longitudinal resonante. Dicho modo longitudinal resonante corresponde a una distancia intracavidad menor que dos veces el radio de curvatura y depende del modo de

orden superior m y de la apertura numérica NA ; en esta condición de operación, el aumento es cercano al doble tanto para el modo $m = 0$ como para $m = 3$.

El programa generado para las simulaciones, junto con el instrumental desarrollado, proporcionan una plataforma sólida para futuras investigaciones sobre manipulación acústica y campos estructurados.

Palabras clave: *Levitación acústica, rigidez, TinyLev, campos acústicos estructurados, efecto de tamaño, modos TOS.*

Abstract

This work presents a computational and experimental study of a particular type of structured acoustic fields, known as *higher-order transverse modes*, together with an analysis of the acoustic forces experienced by spherical expanded polystyrene (EPS) particles in these fields. Higher-order transverse modes with $m = 1$ and $m = 2$ have demonstrated unique levitation capabilities for trapping objects with irregular shapes and dimensions that are inaccessible to a conventional TinyLev ($m = 0$). In this work, a levitator capable of generating the $m = 3$ mode is built for the first time, and the study focuses on this mode and on the fundamental one ($m = 0$). A computational tool is developed to determine the equilibrium positions of levitated spheres by considering exclusively the acoustic forces, as well as by incorporating the gravitational force. In addition, the *stiffness* of the trapped particle is calculated, a quantity analogous to Hooke's constant (k) that expresses the stability of the trapping. Simulation results show that higher-order modes make it possible to levitate objects with sizes that are inaccessible to the fundamental mode. Likewise, it is found that, for sphere radii in the interval $0,7\lambda-0,77\lambda$, the maximum values of stiffness and trapping forces within the set of studied sizes are obtained.

On the experimental side, modifications are made to the TinyLev design in order to generate three higher-order transverse modes with a single levitator, and the pressure fields are characterized using a calibrated microphone. The computational simulation is calibrated with the measured data. By using the Schlieren technique to visualize the pressure field in real time, it is observed that, for odd higher-order modes and under certain observation orientations, the net deflection of the beam can be considerably reduced when the ray successively crosses regions in which $\partial p_1/\partial y$ changes sign. Consequently, the image contrast decreases, which may hinder the observation of the standing wave.

In addition, the increase in amplitude due to internal reflections inside the levitator is measured when the cavity length is adjusted to a resonant longitudinal mode. This resonant longitudinal mode corresponds to an intracavity distance smaller than twice the radius of curvature and depends on the higher-order mode m and on the numerical aperture NA ; under this operating condition, the

increase is close to a factor of two for both the $m = 0$ and $m = 3$ modes. The program developed for the simulations, together with the instrumentation built, provide a solid platform for future research on acoustic manipulation and structured fields.

Keywords: *Acoustic levitation, stiffness, TinyLev, structured acoustic fields, size effect, TOS modes.*

1 Introducción

Arthur Ashkin recibió el Premio Nobel de Física en 2018 por desarrollar las pinzas ópticas, una técnica que utiliza haces láser altamente enfocados para atrapar y manipular partículas microscópicas —desde átomos hasta células— mediante la fuerza de radiación de la luz. Esta herramienta permite aplicar fuerzas extremadamente pequeñas con alta precisión, lo que hace posible posicionar, mover y estudiar objetos biológicos y materiales a escalas donde el contacto mecánico directo es inviable.

La óptica y la acústica comparten múltiples características debido a su naturaleza ondulatoria: en ambas, las ondas se difractan, se enfocan, se reflejan y transmiten momento angular y lineal. De particular interés para este trabajo es que, en ambos casos, es posible formar campos estructurados con capacidad de atrapar y manipular objetos. Para explicar las fuerzas ópticas con las que las partículas eran atrapadas, fue necesario entender el campo esparcido por estas. En 1908, Gustav Mie propuso un modelo para explicar el esparcimiento óptico de partículas en su estudio de soluciones metálicas coloidales [1]. Publicó las ecuaciones que describen el esparcimiento de una onda plana linealmente polarizada por una esfera con índice de refracción complejo y, cuando en la década de 1970 la comunidad científica se interesó por el esparcimiento de campos arbitrarios —tales como los involucrados en trampas ópticas—, se desarrolló la teoría generalizada de Lorenz–Mie (GLMT, por sus siglas en inglés). Esta teoría describe el esparcimiento de una esfera independientemente de sus dimensiones y del campo incidente, y ha jugado un papel decisivo en el estudio de fuerzas ópticas [2, 3].

Pese a que han pasado casi 100 años desde que Karl Bücks y Hans Müller [4] atraparon una partícula con una onda sonora estacionaria en aire, la acústica no ha alcanzado el mismo desarrollo que su área hermana. El principal obstáculo para el atrapamiento acústico ha sido la limitación tecnológica para formar los campos estructurados necesarios para manipular partículas. Sin embargo, esta barrera está derrumbándose. Lejos de aquel primer levitador de onda estacionaria de Bücks y Müller, compuesto por un único piezoeléctrico frente a una superficie reflectora, hoy en día se utilizan arreglos de pequeños emisores capaces de disponerse en diversas geometrías e incluso operar independientemente unos

de otros. Esto posibilita el control de fase y amplitud requerido para estructurar campos. Además, gracias a la adaptación de la GLMT a acústica en 2011 [5], es posible estudiar el campo esparcido por una esfera elástica y calcular las fuerzas acústicas independientemente de su tamaño y de la forma del campo incidente.

En este contexto, los campos acústicos estructurados se han utilizado para capturar y manipular objetos mediante la formación controlada de regiones de presión con nodos y vientres bien definidos. Gracias a este control espacial del campo, se han demostrado aplicaciones como:

- **Manipulación y suspensión de sustancias.** Particularmente en espectroscopía de plasma inducido por láser asistida por levitación acústica (LIBS-AL, por sus siglas en inglés) [6], con la cual se han medido concentraciones de minerales en agua sin necesidad de emplear agentes químicos y con desperdicios mínimos.
- **Filtrado de microplásticos.** Utilizando ultrasonido, se han atrapado y aislado microplásticos en tiempos menores a 5 segundos a partir de muestras de agua, logrando eliminar hasta el 90% de plásticos de alta densidad como el PVC [7].
- **Caracterización de propiedades físicas.** Por ejemplo, la tensión superficial puede estimarse mediante la medición de la frecuencia del modo fundamental de oscilación [8].

La implementación de estas técnicas depende de dispositivos capaces de generar campos acústicos reproducibles y altamente configurables. Un ejemplo representativo es el *TinyLev*, figura 1.1, un levitador de onda estacionaria uniaxial conformado por dos casquetes esféricos con transductores emisores incrustados en su superficie [9]. En este tipo de arreglos, los *modos transversales de orden superior* pueden entenderse como soluciones espaciales del campo acústico dentro de la cavidad. En el *TinyLev*, estos modos se distinguen por presentar una estructura angular en la distribución transversal de presión que varía como $\cos(m\phi)$, donde $m \in \mathbb{N}$ y ϕ es el ángulo azimutal en el plano transversal. Esta dependencia da lugar a m planos nodales que contienen al eje de simetría. Dichos modos pueden implementarse de manera simple introduciendo dislocaciones de fase en los arreglos de transductores, lo que convierte a este dispositivo en una plataforma versátil para estudiar y explotar haces acústicos estructurados.

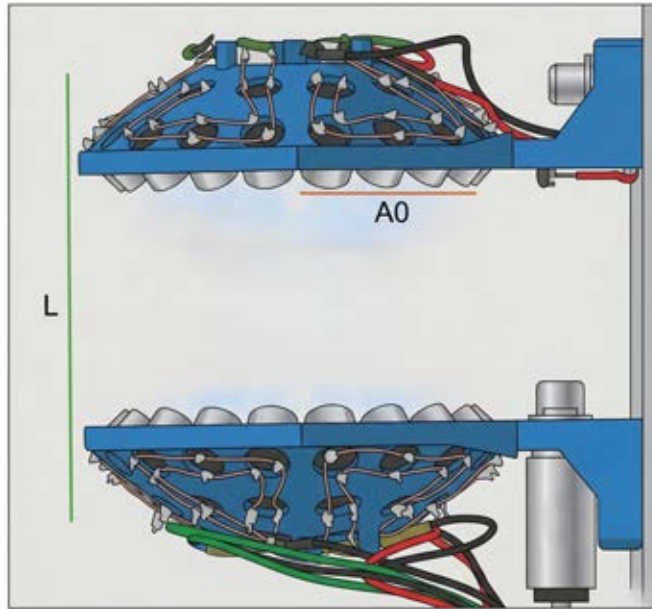


Figura 1.1: Diagrama del TinyLev. A_0 es la apertura angular, L es la longitud de la cavidad. Los casquetes esféricos tienen un radio de curvatura R . La apertura numérica se define como $NA = A_0/R$.

Los modos transversales de orden superior han sido explorados hasta el orden $m = 2$. La asimetría de estos campos acústicos permite atrapar objetos no esféricos, tales como resistencias eléctricas y cubos de poliestireno expandido (EPS) [10], así como estudiar insectos voladores [11]. También se ha demostrado que, para los modos $m = 1$ y $m = 2$, las dimensiones de los objetos que pueden ser levitados aumentan con el número del modo. Surge entonces una pregunta natural: ¿la capacidad de levitación, en términos de tamaño, forma y cantidad, sigue aumentando para modos con índices m superiores? Con el objetivo de explorar esta incógnita, en este trabajo se construyó por primera vez un levitador capaz de generar el modo $m = 3$. Además, se desarrollaron programas para calcular computacionalmente las fuerzas acústicas sobre esferas de EPS tanto en el modo fundamental como en el primer y el tercer modo de orden superior. Estas simulaciones se basan en la teoría generalizada de Lorenz–Mie aplicada a acústica y en el paquete de funciones correspondiente [5]. Entre las innovaciones computacionales de este trabajo se incluyen el desarrollo de funciones que permiten calcular cuantitativamente las fuerzas acústicas en el interior de la cavidad, determinar puntos de equilibrio estable en tres dimensiones y reducir sustancialmente el tiempo de cómputo mediante cálculos paralelizados.

Como resultado de este trabajo, se consolidó un esquema teórico–experimental para describir cuantitativamente el campo acústico y las fuerzas de radiación dentro de la cavidad en el modo fundamental y en modos transversales de orden

superior, incorporando explícitamente la gravedad. A partir de ello, se obtuvo una herramienta computacional capaz de predecir posiciones de equilibrio estable en tres dimensiones y estimar la *rigidez* para partículas de distintos radios, con mejoras sustanciales en tiempo de cómputo mediante paralelización y optimización de memoria. En paralelo, se implementó y calibró un micrófono de bajo costo y baja direccionalidad para medir perfiles transversales de presión y ajustar la amplitud de las simulaciones, lo que permitió comparar directamente los campos medidos con los simulados. Estas bases permiten evaluar, en particular, cómo el modo $m = 3$ amplía el rango de tamaños sustentables respecto al modo fundamental y cómo los efectos de resonancia de la partícula pueden incrementar de manera notable la *rigidez* en ciertos intervalos de tamaño.

El contenido de la tesis es el siguiente. En el capítulo 2 se desarrollan las ecuaciones de onda mediante teoría de perturbaciones de primer orden, a partir de las ecuaciones de continuidad y de Navier–Stokes. Además, se presenta el potencial acústico, necesario para la GLMT en acústica. Posteriormente, se emplean perturbaciones de segundo orden para explicar el origen de la fuerza acústica de radiación. Con este marco teórico, se presenta la adaptación a la acústica de la teoría generalizada de Lorenz–Mie desarrollada por Diego Baresch. Las simulaciones realizadas se basan en las ecuaciones de la fuerza acústica descritas en este capítulo. Más adelante, se discutirán el *efecto de tamaño*, el concepto de *rigidez* y los modos de orden superior.

En el capítulo 3 se explica cómo se ensambló el levitador y qué modificación debe realizarse para producir los modos de orden superior. También se describe el desarrollo de un micrófono calibrado de baja direccionalidad para medir la presión al interior de la cavidad, así como los resultados de emplear deflectometría de Schlieren en el levitador. En el capítulo 3.2 se explican el funcionamiento y las innovaciones del código desarrollado para las simulaciones, tales como mejoras en el uso de memoria y la implementación de cómputo paralelizado.

Por último, en el capítulo 4 se presentan los perfiles transversales de presión, se discute la ganancia debida a las reflexiones internas en la cavidad y se comparan estos perfiles con los campos simulados. Después se exponen los resultados de las simulaciones: se muestran posiciones de equilibrio estable para partículas de múltiples tamaños, se estudia la evolución de la *rigidez* y se discuten los efectos ligados a la resonancia de la partícula al llegar a ciertos tamaños. Por último, se predice teóricamente el rango de radios para los cuales partículas de EPS son atrapables en el modo fundamental y el tercer modo de orden superior.

La investigación de los campos acústicos estructurados es un área fértil y de bajo costo, al alcance de múltiples centros de investigación en todo el planeta. El presente trabajo busca inspirar a estudiantes y profesionales a participar en su estudio.

2 Modelación del campo acústico

2.1 Teoría de perturbaciones

Describir las fuerzas acústicas en una cavidad requiere establecer primero los principios que gobiernan los fluidos y, en paralelo, aplicar teoría de perturbaciones al campo acústico. En las secciones siguientes se presentan aproximaciones perturbativas de primer y segundo orden; este material sigue el desarrollo de Bruus [12].

Las ecuaciones que gobiernan los microfluidos se obtienen a partir de tres relaciones fundamentales: la ecuación termodinámica de estado para la presión, la ecuación de continuidad para la densidad y la ecuación de Navier–Stokes para la velocidad:

$$p = p(\rho) \quad (2.1)$$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad (2.2)$$

$$\rho \partial_t \vec{v} = -\nabla p - \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \eta \nabla^2 \vec{v} + \beta \eta \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) \quad (2.3)$$

Aquí η es la viscosidad y β el cociente de viscosidades. Estas ecuaciones pueden tratarse mediante teoría de perturbaciones, expandiendo las variables alrededor de un estado de equilibrio. En este trabajo se emplean desarrollos a primer y segundo orden: el primer orden describe el campo acústico lineal, mientras que el segundo orden permite capturar contribuciones promedio en el tiempo, como el flujo acústico y la fuerza de radiación. Además, se ignoran las fuerzas gravitatorias, y se adopta una relación constitutiva isentrópica entre presión y densidad.

2.1.1 Perturbaciones de primer orden

Supóngase una onda acústica que representa una pequeña perturbación de un sistema en equilibrio con densidad ρ_0 y presión p_0 . Entonces, la densidad, la presión y la velocidad pueden escribirse como

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad (2.4)$$

$$p = p_0 + p_1, \quad (2.5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1, \quad (2.6)$$

donde los subíndices 1 indican cantidades de primer orden. En la expansión isentrópica de la ecuación de estado se obtiene

$$p_1 = c_a^2 \rho_1, \quad (2.7)$$

donde c_a es la velocidad isentrópica del sonido en el fluido.

Al sustituir las expansiones (2.4)–(2.6) en las ecuaciones de continuidad y de Navier–Stokes, y despreciar productos de cantidades de primer orden, se obtienen las ecuaciones linealizadas

$$\partial_t \rho_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1, \quad (2.8)$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_1 = -c_a^2 \nabla \rho_1 + \eta \nabla^2 \vec{v}_1 + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_1). \quad (2.9)$$

A partir de estas ecuaciones se obtiene una ecuación para la densidad de primer orden. En efecto, al derivar temporalmente (2.8) y sustituir en ella la divergencia de (2.9), resulta

$$\partial_t^2 \rho_1 = c_a^2 \nabla^2 \rho_1 + \frac{(1 + \beta)\eta}{\rho_0} \partial_t \nabla^2 \rho_1. \quad (2.10)$$

Para avanzar analíticamente, se supone ahora una dependencia armónica temporal para los campos de primer orden ¹:

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \rho_1(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

$$p_1(\vec{r}, t) = p_1(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (2.12)$$

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.13)$$

Con esta representación, cada derivada temporal introduce un factor $-i\omega$. Usando además la relación (2.7), la presión satisface la ecuación de Helmholtz amortiguada

$$\nabla^2 p_1 = -k^2 p_1, \quad (2.14)$$

$$k = (1 + i\gamma)k_0, \quad (2.15)$$

$$\gamma = \frac{(1 + \beta)\eta\omega}{2\rho_0 c_a^2}. \quad (2.16)$$

Aquí γ es el factor viscoso de amortiguamiento. Si $\gamma \ll 1$, la viscosidad puede despreciarse en la parte volumétrica de la onda y, a partir de (2.10) o equivalentemente de (2.14), se recupera la ecuación de onda

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c_a^2} \partial_t^2 p_1. \quad (2.17)$$

¹Los potenciales acústicos para los modos de orden superior, ecuación 2.41, en este trabajo son armónicos, lo que es congruente con asumir dependencia armónica en los campos de primer orden. Por su parte, el formalismo perturbativo de L. V. King (1934) llega a esta misma conclusión mediante un desarrollo explícito, demostrando que el promedio temporal de las perturbaciones de primer orden, tanto en el campo acústico general como sobre la superficie de una esfera, es nulo. Para ahondar en dicho análisis, véase King (1934) [13].

Finalmente, en el límite no viscoso $\eta = 0$, la velocidad puede escribirse en términos de un potencial:

$$\vec{v}_1 = -i \frac{1}{\rho_0 \omega} \nabla p_1 = \nabla \Phi_1, \quad (2.18)$$

$$\Phi_1 = -i \frac{p_1}{\rho_0 \omega}. \quad (2.19)$$

Así, tanto la densidad ρ_1 como la velocidad \vec{v}_1 pueden calcularse a partir de la presión, la cual queda determinada por la ecuación de Helmholtz (2.14) junto con las condiciones de frontera.

2.1.2 Perturbaciones de segundo orden

Las perturbaciones de primer orden se describen mediante campos armónicos, por lo que sus promedios temporales sobre un periodo son nulos. En cambio, los productos de cantidades de primer orden no necesariamente se anulan al promediarse y, por ello, actúan como términos fuente en las ecuaciones de segundo orden. Esta es la razón por la que, aunque las perturbaciones de segundo orden sean más pequeñas, resultan esenciales para describir efectos promedio en el tiempo, como el flujo acústico estacionario y la presión de radiación.

La expansión perturbativa a segundo orden se escribe como

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 + \rho_2, \quad (2.20)$$

$$p = p_0 + p_1 + p_2, \quad (2.21)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (2.22)$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de continuidad y de Navier–Stokes, y conservando únicamente términos hasta segundo orden, se obtienen las ecuaciones

$$\partial_t \rho_2 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_2 = -\nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}_1), \quad (2.23)$$

$$\rho_0 \partial_t \vec{v}_2 + \rho_1 \partial_t \vec{v}_1 + \rho_0 (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 = -\nabla p_2 + \eta \nabla^2 \vec{v}_2 + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_2). \quad (2.24)$$

Estas expresiones muestran que las perturbaciones de segundo orden están forzadas por productos de cantidades de primer orden. En este sentido, los resultados obtenidos a primer orden se utilizan como fuente en la descripción de segundo orden.

Para estudiar los efectos estacionarios, se toma ahora el promedio temporal de (2.23) y (2.24). Dado que las perturbaciones de primer orden son armónicas, se cumple que $\langle \partial_t \rho_2 \rangle = 0$ y $\langle \partial_t \vec{v}_2 \rangle = 0$ en régimen estacionario, mientras que los

productos cuadráticos de primer orden permanecen finitos al promediarse. Así, se obtiene

$$\rho_0 \nabla \cdot \langle \vec{v}_2 \rangle = -\nabla \cdot \langle \rho_1 \vec{v}_1 \rangle, \quad (2.25)$$

$$\eta \nabla^2 \langle \vec{v}_2 \rangle + \beta \eta \nabla (\nabla \cdot \langle \vec{v}_2 \rangle) - \nabla \langle p_2 \rangle = \langle \rho_1 \partial_t \vec{v}_1 \rangle + \rho_0 \langle (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \rangle. \quad (2.26)$$

La cantidad $\langle \vec{v}_2 \rangle$ representa la componente media de segundo orden de la velocidad y se asocia con el flujo acústico estacionario. Este flujo medio es el que da lugar al fenómeno conocido como *acoustic streaming*. Por su parte, el término $\langle p_2 \rangle$ corresponde a la contribución media de segundo orden de la presión y está relacionado con la presión de radiación acústica. En consecuencia, las ecuaciones (2.25) y (2.26) establecen cómo los campos de primer orden determinan los efectos medios de segundo orden responsables tanto del *streaming* como de la presión de radiación.

2.2 Fuerza de radiación acústica en una esfera elástica

La aproximación de Gor'kov en 1962 [14] permitió calcular la fuerza acústica ejercida sobre una partícula pequeña en un fluido ideal, en una posición arbitraria, pero únicamente en el límite de partícula pequeña, $a \ll \lambda$. Al aumentar el tamaño de la partícula, las predicciones de este modelo pueden diferir de manera importante de los resultados experimentales [15]. Para superar esta limitación, Baresch, Thomas y Marchiano desarrollaron una formulación general para calcular la fuerza de radiación acústica sobre una esfera elástica inmersa en un fluido inviscido, sin restringir ni la posición de la esfera ni su tamaño relativo a la longitud de onda [5].

En lo que sigue, el desarrollo teórico de la fuerza de radiación acústica sobre una esfera elástica se basa en el formalismo propuesto por Baresch, Thomas y Marchiano [5]. En particular, la representación del campo incidente y del campo dispersado, la definición del tensor de flujo de momento y las expresiones finales para las componentes de la fuerza se introducen siguiendo ese trabajo.

2.2.1 Potenciales acústicos

De acuerdo con la sección anterior, el campo acústico de primer orden con dependencia temporal armónica satisface una ecuación de Helmholtz. Para estudiar la dispersión por una esfera, resulta natural expresar este problema en un sistema de coordenadas esféricas centrado en la partícula. En esta geometría, el potencial acústico de primer orden satisface

$$(\nabla^2 + k_0^2) \Phi(r, \theta, \phi) = 0, \quad (2.27)$$

donde $k_0 = \omega/c_0$ es el número de onda en el fluido circundante. Una base natural de soluciones de (2.27) en coordenadas esféricas está dada por funciones separables de la forma

$$U_n^m(r, \theta, \phi) = j_n(k_0 r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.28)$$

donde j_n son las funciones de Bessel esféricas de primer tipo y Y_n^m son los armónicos esféricos. La solución de la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas se describe en su componente radial mediante funciones de Bessel y de Neumann. No obstante, estas últimas se descartan debido a su singularidad en el origen.

Con esta base, el potencial acústico incidente puede escribirse como

$$\Phi_i = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m j_n(k_0 r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.29)$$

donde A_n^m son los coeficientes de expansión del campo incidente. Estos coeficientes se determinan a partir de las condiciones de frontera del campo acústico y la expresión de estos para los modos de orden superior se mostrará más adelante. De manera análoga, el potencial del campo dispersado se expresa como

$$\Phi_s = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m R_n h_n^{(1)}(k_0 r) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (2.30)$$

donde $h_n^{(1)}$ es la función de Hankel esférica de primer tipo, elegida porque representa una onda saliente y satisface la condición de radiación de Sommerfeld en el campo lejano. Aunque en principio los coeficientes de dispersión podrían escribirse como R_n^m , para una esfera elástica isotrópica resultan independientes del índice azimutal m , por lo que puede escribirse $R_n^m \equiv R_n$. Estos coeficientes quedan determinados por las condiciones de frontera en la superficie de la esfera elástica.

Esta formulación muestra que el problema de la fuerza de radiación acústica se reduce, en primer lugar, a un problema de dispersión: dado un campo incidente, es necesario calcular sus coeficientes de expansión A_n^m y, a partir de las condiciones de frontera sobre la esfera, determinar los coeficientes de dispersión R_n . En este esquema, la fuerza de radiación se obtiene posteriormente a partir de la superposición de los campos incidente y dispersado.

2.2.2 Fuerza de radiación

Uno de los retos en el cálculo de la fuerza de radiación acústica sobre una esfera elástica es que la superficie de la partícula, $S(t)$, puede depender del tiempo

debido a las deformaciones inducidas por el campo acústico. Por ello, la fuerza se define como una magnitud promediada en el tiempo:

$$\vec{F} = \left\langle \iint_{S(t)} p \, d\vec{S} \right\rangle \quad (2.31)$$

En un fluido inviscido, para evitar las dificultades asociadas con la integración sobre una frontera móvil, Baresch et al. reformulan el problema en términos del campo lejano. Empleando el teorema de transporte de Reynolds y el teorema de la divergencia, la fuerza media puede reescribirse como una integral del tensor de flujo de momento sobre una esfera fija S_R , de radio R , suficientemente alejada del dispersor, de modo que $k_0 R \gg 1$:

$$\vec{F} = - \iint_{S_R} \langle \bar{\Pi} \rangle \, d\vec{S} \quad (2.32)$$

con

$$\langle \bar{\Pi} \rangle = \left(\frac{\rho_0}{2} \langle |\vec{v}_1|^2 \rangle - \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \langle p_1^2 \rangle \right) \bar{I} - \rho_0 \langle \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1 \rangle \quad (2.33)$$

Aquí, $\bar{\Pi}$ es el tensor de flujo de momento, \bar{I} es el tensor identidad, y p_1 y \vec{v}_1 son las cantidades acústicas de primer orden asociadas al campo total, es decir, a la superposición del campo incidente y el campo dispersado.

A partir de esta formulación, Baresch et al. obtienen expresiones cerradas para las tres componentes de la fuerza en coordenadas cartesianas. En su forma general, dichas componentes dependen de los coeficientes de expansión del campo incidente, A_n^m , y de los coeficientes de dispersión de la esfera, $R_n = \alpha_n + i\beta_n$:

$$F_x = -\frac{\pi\rho_0\Phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n+1}^{n-1} Q_n^m \left[(V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \right. \\ \left. - (V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} - \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \right], \quad (2.34a)$$

$$F_y = -\frac{\pi\rho_0\Phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n+1}^{n-1} Q_n^m \left[-(V_n^m \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Re\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^1 \right. \\ \left. - (V_n^m \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m+1*}\} + \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m-1*}\}) D_n^2 \right], \quad (2.34b)$$

$$F_z = -\frac{\pi\rho_0\Phi_0^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n 2(n+m+1) Q_n^m \left[\Re\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^2 - \Im\{A_n^m A_{n+1}^{m*}\} D_n^1 \right]. \quad (2.34c)$$

Los factores auxiliares están dados por

$$D_n^1 = \alpha_n + \alpha_{n+1} + 2(\alpha_n \alpha_{n+1} + \beta_n \beta_{n+1}), \quad (2.35)$$

$$D_n^2 = \beta_{n+1} - \beta_n + 2(\beta_{n+1} \alpha_n - \alpha_{n+1} \beta_n), \quad (2.36)$$

$$Q_n^m = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(2n+3)(n-m)!}, \quad (2.37)$$

$$V_n^m = (n+m+1)(n+m+2), \quad (2.38)$$

donde $R_n = \alpha_n + i\beta_n$.

Es importante subrayar que las ecuaciones (2.34) son generales para cualquier campo incidente que pueda expandirse en la base esférica introducida en la subsección anterior. En cambio, la forma explícita de los coeficientes A_n^m depende del haz incidente considerado.

Para llegar a estas expresiones, además de la hipótesis de fluido inviscido, es necesario resolver el problema de dispersión imponiendo las condiciones de frontera en la superficie de la esfera elástica. En el interior de la esfera, el campo de desplazamientos se descompone en sus partes longitudinal y transversal mediante potenciales apropiados; este procedimiento permite determinar los coeficientes de dispersión R_n . En el caso tratado por Baresch, Thomas y Marchiano, dichos coeficientes coinciden con los obtenidos para la dispersión de una onda plana por una esfera elástica y resultan independientes del índice azimutal m .

2.2.3 Rigidez o *stiffness*

Una característica importante para el análisis del atrapamiento acústico es el parámetro conocido como *stiffness* o rigidez. Se define como:

$$k_\alpha = -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (2.39)$$

donde $\alpha \in \{x, y, z\}$. De manera análoga a la constante de Hooke en un oscilador armónico simple, este parámetro indica qué tan intenso es el atrapamiento cerca del punto de equilibrio. Empíricamente, esto se manifiesta en una mayor facilidad para atrapar partículas cuando el valor de la *rigidez* es grande, y en una mayor dificultad cuando es pequeño. En la figura 2.1 se muestra la evolución de la *rigidez* en el punto de equilibrio estable para distintos tamaños de partícula. El parámetro adimensional a está dado por $a = r/\lambda$, donde r es el radio de la esfera.

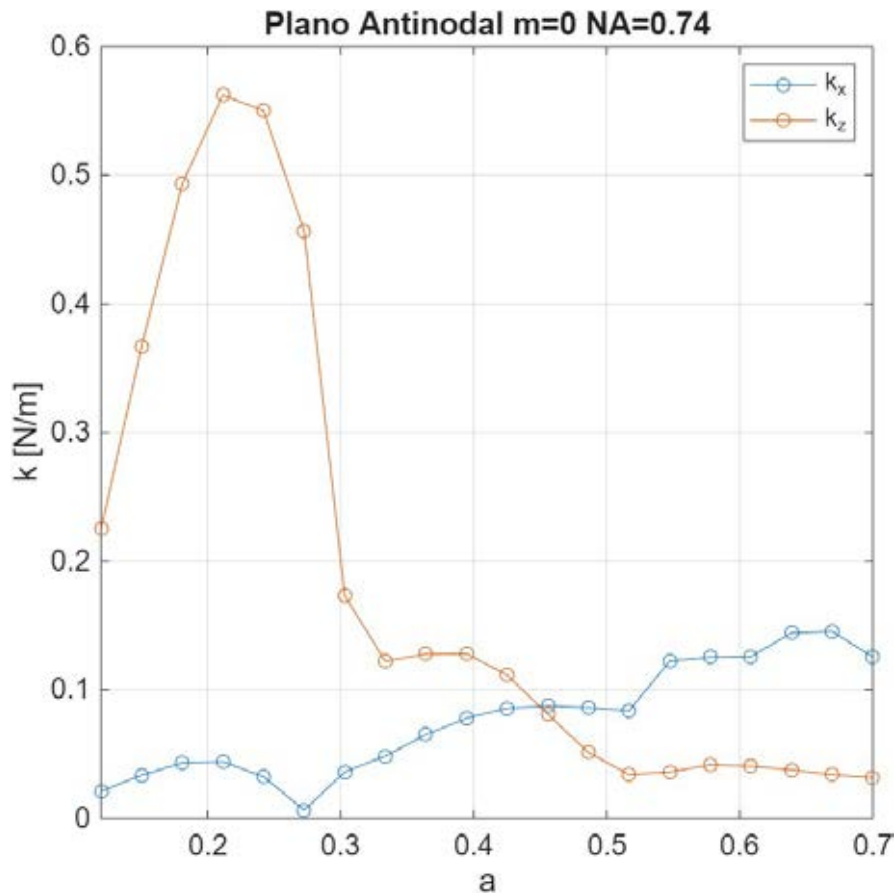


Figura 2.1: Valor de la *rigidez* en las direcciones z y x para partículas de EPS en un levitador TinyLev operando en el modo fundamental. El parámetro adimensional a se define como $a = r/\lambda$, donde r es el radio de la esfera. Estos valores fueron calculados computacionalmente.

Nótese la presencia de máximos locales de la rigidez k_z en $a \sim 0,22$ y $a \sim 0,4$, en contraste con los mínimos observados en $a \sim 0,32$ y $a \sim 0,52$. Aunque siempre existe un punto de equilibrio estable, una rigidez baja dificulta el atrapamiento de la esfera.

2.3 Efecto de tamaño en levitación de ondas estacionarias

Considérense los potenciales del campo incidente (2.29) y del campo esparcido (2.30). En la aproximación de Gor'kov se tiene un rango de validez correspondiente al régimen de partícula pequeña, es decir, para radios tales que $2r/\lambda = 2a \sim 0,075$, aproximadamente [10]. Sin embargo, al aumentar el radio

de la esfera se obtienen predicciones significativamente distintas entre la teoría de Gor'kov y la GLMT, como se observa en la comparación entre las curvas roja y azul de la figura 2.2.

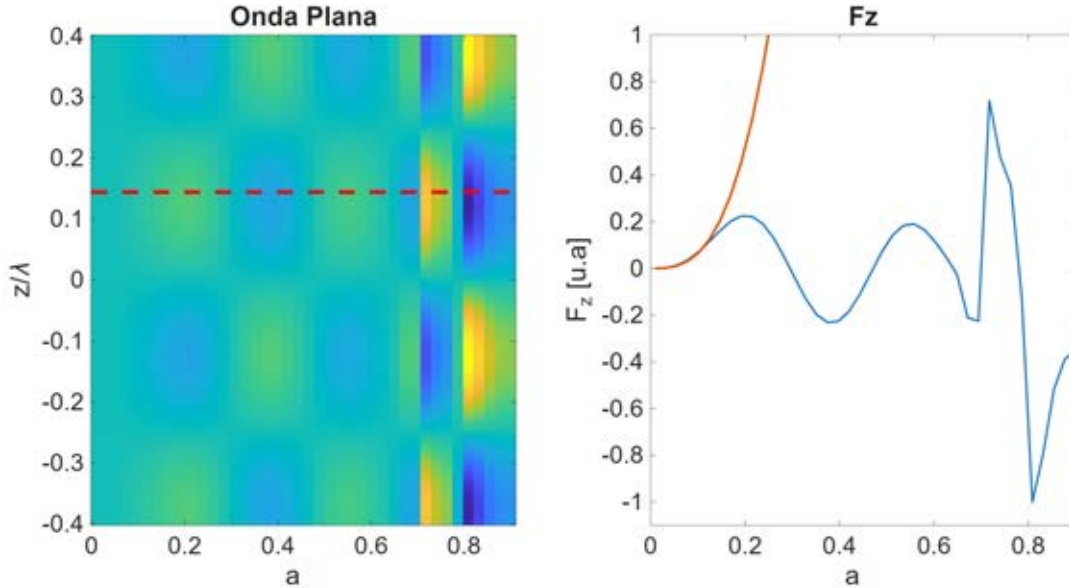


Figura 2.2: Fuerza acústica, en unidades arbitrarias, experimentada por una esfera de EPS en una onda plana estacionaria. A la izquierda se muestra el mapa de fuerza en función de la posición axial z/λ y del tamaño adimensional de la partícula $a = r/\lambda$; el color amarillo representa una fuerza positiva y el azul una negativa. Para una esfera de tamaño fijo, existen puntos de equilibrio estable a lo largo del eje z en las posiciones donde la fuerza cambia de positiva a negativa al recorrer dicho eje. La línea punteada roja indica la altura considerada para la gráfica de la derecha. En esta última se presenta la fuerza normalizada en función del tamaño de la partícula, evaluada a la altura marcada en el mapa. La curva azul corresponde al cálculo mediante GLMT, mientras que la curva roja corresponde a la aproximación de Gor'kov. Obsérvese que, al aumentar el radio, la fuerza acústica deja de crecer monótonamente, decrece e incluso cambia de signo. Este comportamiento corresponde al *efecto de tamaño*.

Esto ocurre porque, en la expansión de los potenciales incidente y dispersado, los términos multipolares de orden alto son despreciables para partículas pequeñas. Destacablemente, los términos $n = 0$ y $n = 1$ de (2.29) y (2.30) conducen a las expresiones de Gor'kov en el límite de partícula pequeña [15]. Sin embargo, al aumentar el radio de la esfera, las contribuciones multipolares de orden alto dejan de ser despreciables. De esta manera, si se intenta aplicar la teoría de Gor'kov más allá de su rango de validez, esta predice erróneamente que la fuerza aumenta de forma dramática e ininterrumpida conforme crece el tamaño de la esfera. En partículas que ya no pertenecen al régimen de partícula pequeña, dichas contribuciones pueden disminuir, cancelar o incluso invertir la dirección de la fuerza. La dependencia de la magnitud y de la dirección de la fuerza con el tamaño de la partícula se denomina *efecto de tamaño* (*size effect*) [15].

Además, a partir de $a \sim 0,71$, las fuerzas acústicas aumentan de manera notable, como se observa en la gráfica de la derecha de la figura 2.2. Al alcanzar este tamaño, el campo dispersado se incrementa significativamente, generando cambios marcados en la magnitud de la fuerza acústica. Dado que este efecto resonante ocurre para onda plana, podemos relacionar comportamientos similares en la fuerza acústica para campos de geometrías más complejas, como se verá más adelante al examinar efectos de resonancia en los resultados computacionales.

Un ejemplo del *efecto de tamaño* se presenta a continuación. Considérese un levitador acústico de onda estacionaria con dos casquetes esféricos como emisores, separados una distancia igual a dos veces el radio de curvatura; es decir, un TinyLev. Se consideran dos partículas de EPS con radios $0,25\lambda$ y $0,41\lambda$, respectivamente, como se muestra en las figuras 2.3a y 2.3b. Obsérvese que para $a = 0,25$ la partícula queda atrapada sobre el eje z , a la altura de uno de los nodos de presión. Para $a = 0,41$, en cambio, la partícula se atrapa fuera de eje y ligeramente por encima de la altura del nodo. Esta diferencia es consecuencia del *efecto de tamaño*.

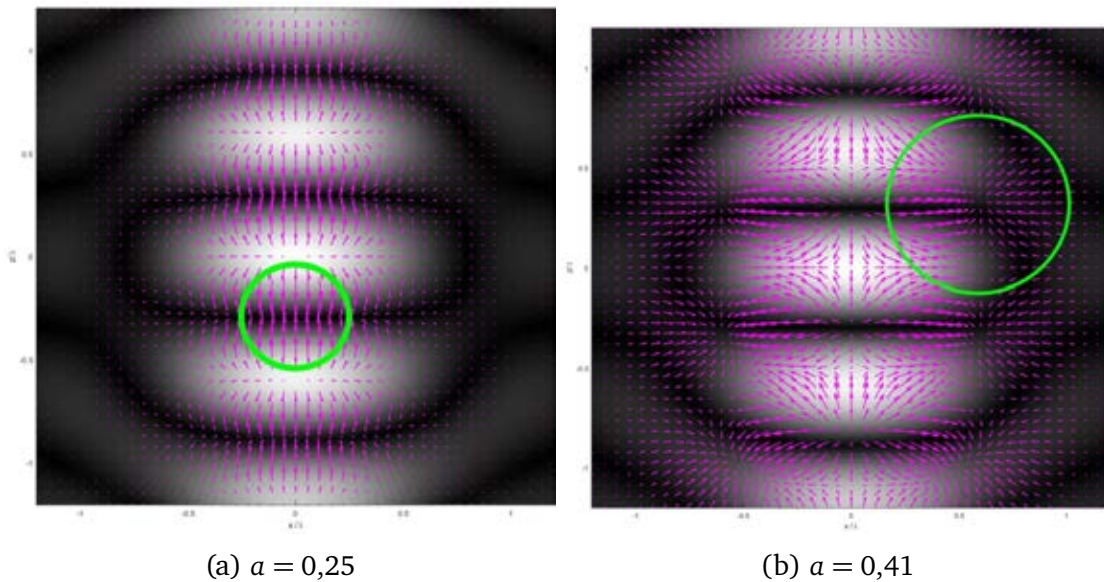


Figura 2.3: Mapas de fuerzas acústicas para dos radios de partícula en el modo fundamental. Cada vector representa la fuerza acústica que experimentaría una partícula si su centro se ubicara en la posición de origen del vector. El fondo en escala de grises representa el campo acústico. Los círculos verdes indican el tamaño y la posición de la partícula en cada caso. Recuérdese que a es un parámetro adimensional definido como $a = r/\lambda$, donde r es el radio de la partícula en metros.

2.4 Modos transversales de orden superior

El siguiente desarrollo se basa en el trabajo de V. Contreras y K. Volke [10]. Considérese el arreglo mostrado en la figura 2.4. Para el análisis, se asumirá que cada casquete esférico actúa como un emisor de superficie continua, en lugar de estar compuesto por emisores discretos. Esta idealización evita introducir efectos de difracción asociados con la discretización, los cuales no se consideran en el modelo.

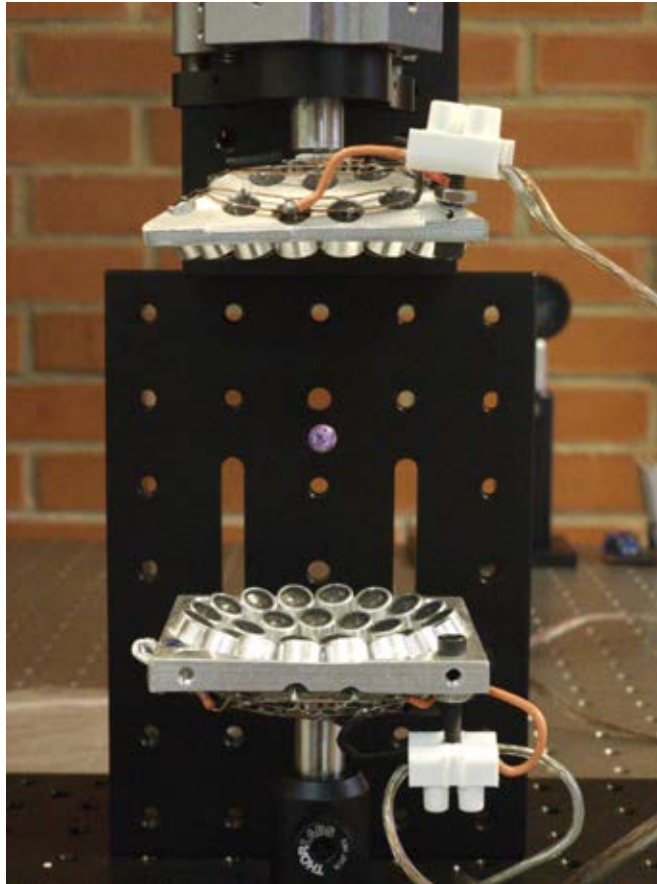


Figura 2.4: TinyLev: levitador acústico de onda estacionaria conformado por dos casquetes esféricos separados por una distancia aproximada de dos veces el radio de curvatura. Cada superficie cuenta con múltiples transductores ultrasónicos. También se observa una partícula atrapada entre ambos por fuerzas acústicas.

Los modos transversales de orden superior (*HOT modes*, por sus siglas en inglés), o modos TOS en español, se obtienen al dividir un casquete en $2m$ secciones y añadir un desfase de π entre secciones adyacentes, siendo m el orden del modo. Los saltos de fase en el campo radiado se imponen matemáticamente mediante la función $\text{sgn}[\cos(m\phi)]$, donde ϕ es el ángulo azimutal.

El diagrama de los parámetros geométricos del sistema se muestra en la figura 2.5. Para determinar los coeficientes de forma A_n^m , se aplica una condición de frontera sobre la componente radial de la velocidad de las partículas en la superficie interna de los casquetes esféricos:

$$u_r(a, \theta, \phi, t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = u_0 \operatorname{sgn}[\cos(m\phi)] \cos(\omega t), \quad (2.40)$$

donde ω es la frecuencia angular de vibración de los casquetes. Esto conduce a una expresión general para los coeficientes que está gobernada por el factor $[1 + (-1)^{n+m} \cos \Omega_0]$, donde Ω_0 es el desfase relativo entre el casquete superior y el inferior. En consecuencia, el valor de A_n^m se anula para valores pares o impares de $(n + m)$, dependiendo de la configuración de fase elegida.

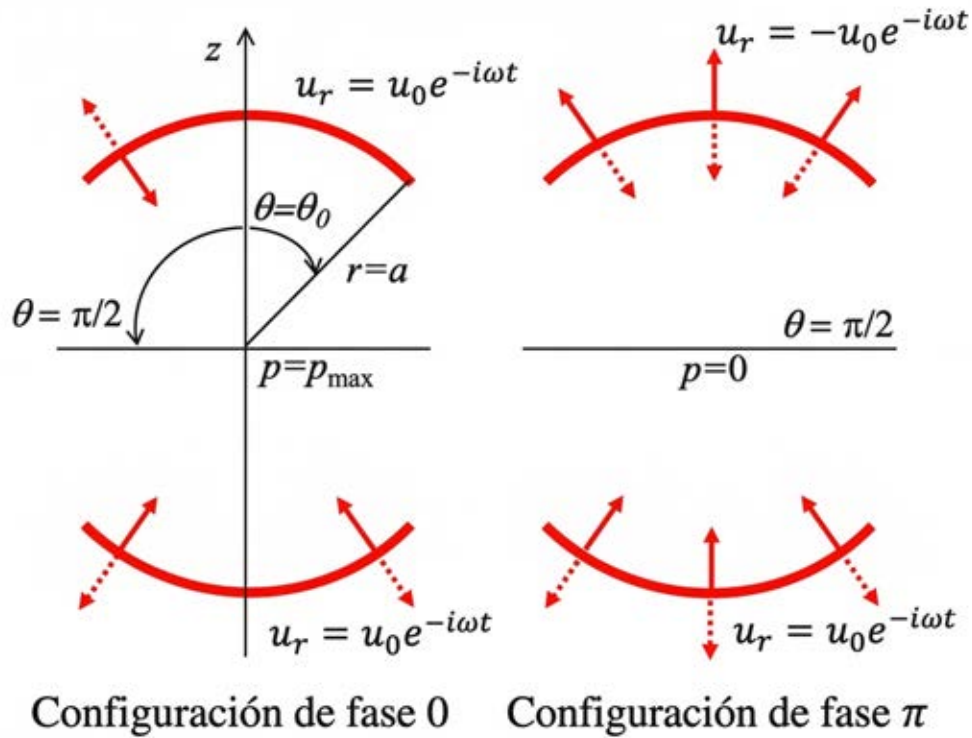


Figura 2.5: Configuraciones de fase y parámetros geométricos del sistema. Representación esquemática de las condiciones de frontera para las configuraciones de fase 0 (izquierda) y fase π (derecha). Las flechas sólidas indican la dirección del desplazamiento de los casquetes en un tiempo t , mientras que las flechas punteadas representan el desplazamiento medio ciclo después. Se muestran los parámetros físicos relevantes: el radio de curvatura a , el ángulo polar de apertura θ_0 y el plano ecuatorial en $\theta = \pi/2$. En la configuración de fase 0 ($\Omega_0 = 0$), las ondas interfieren constructivamente, generando un antinodo de presión (p_{\max}) en el centro de la cavidad, mientras que en la configuración de fase π ($\Omega_0 = \pi$), la interferencia es destructiva, resultando en un nodo de presión ($p = 0$) en el plano ecuatorial. Adaptado de [10].

El potencial de velocidad del arreglo anterior tiene la forma

$$\Phi = \sum_{n \geq m} A_n^m j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \cos(\omega t), \quad (2.41)$$

donde P_n^m son los polinomios asociados de Legendre. El origen de coordenadas se toma en el centro de la cavidad.

Existen dos posibles configuraciones, llamadas *in-out* y *up-down*, de acuerdo con el trabajo de V. Contreras y K. Volke. Sin embargo, en este trabajo se les denominará configuración de *fase 0* y configuración de *fase π* , respectivamente. Esto se debe a que la primera corresponde a ambos casquetes emitiendo en fase, mientras que la segunda corresponde a un desfase de π entre casquetes. Los coeficientes de expansión, o coeficientes de forma, del campo incidente para la configuración de *fase 0* son:

$$A_{mn} = \frac{(2n+1)u_0}{2kj'_n(ka)} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times [1 + (-1)^{(n+m)} \cos \Omega_0] \int_{z_0}^1 P_n^m(z) dz, \quad (2.42)$$

con $z_0 \equiv \cos(\theta_0)$, donde θ_0 es el ángulo polar a partir del cual se encuentra la superficie semiesférica.

Para la configuración de *fase π* , los coeficientes toman la misma forma que en *fase 0*, pero con una condición diferente sobre m . La configuración de *fase 0* se caracteriza por tener un antinodo en el centro de la cavidad y es la que se estudia a lo largo del presente trabajo.

Se pueden observar simulaciones calculadas a partir de la expresión 2.41 del campo acústico incidente para distintos modos TOS en las figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9. El parámetro NA es la apertura numérica, dada por $NA = \frac{A_0}{R_0}$, donde A_0 es el radio de apertura y R_0 es el radio de curvatura. Estos parámetros pueden verse en la figura 1.1.

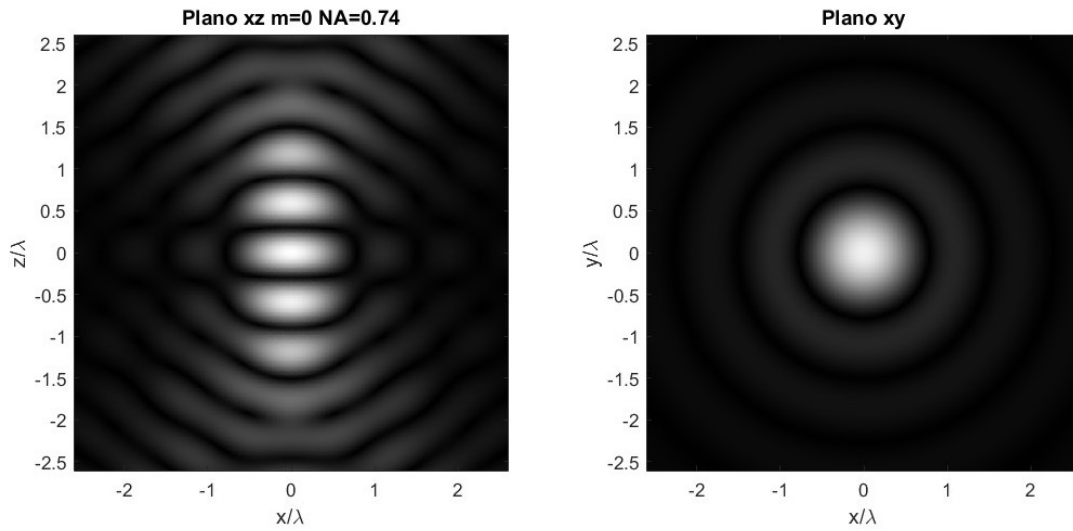


Figura 2.6: Campo acústico, en unidades arbitrarias, representado en dos planos. El plano de la derecha está en $z = 0$. Este campo corresponde al modo fundamental, $m = 0$, y presenta una única columna de antinodos de presión a lo largo del eje z .

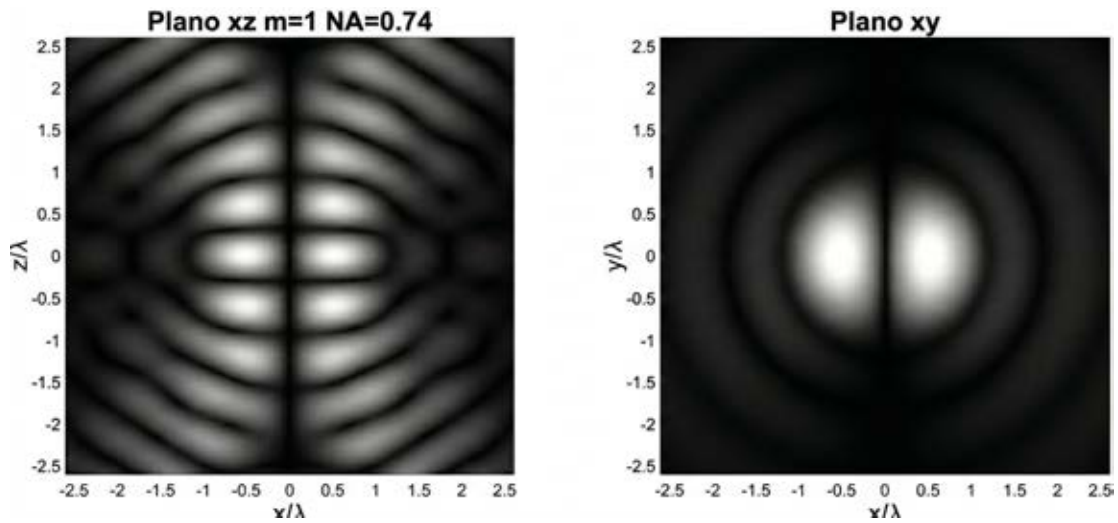


Figura 2.7: Campo acústico, en unidades arbitrarias, representado en dos planos para $m = 1$. A diferencia del modo fundamental, se observan dos columnas de antinodos.

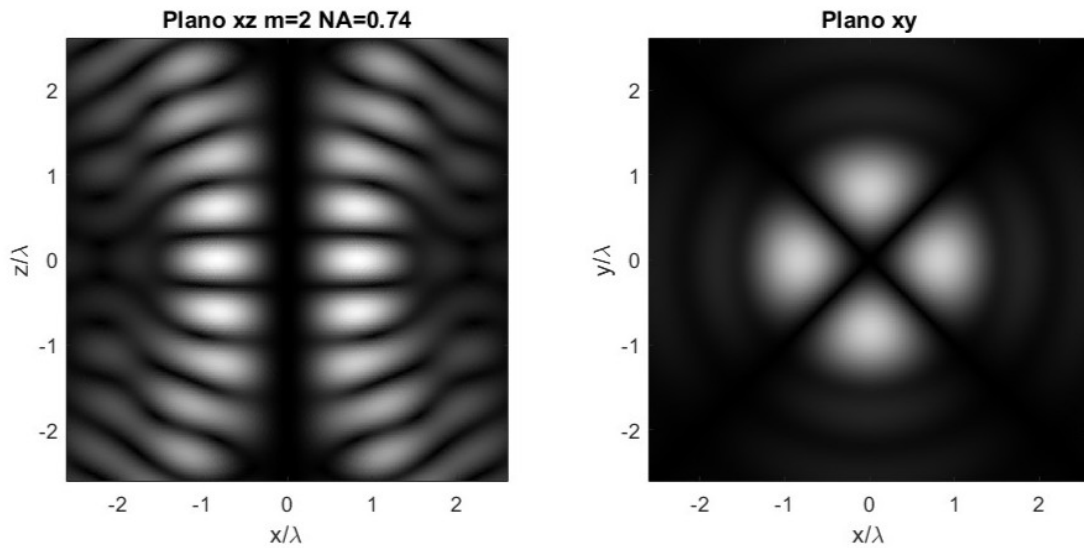


Figura 2.8: Campo acústico, en unidades arbitrarias, correspondiente al modo $m = 2$. Se observan cuatro columnas de antinodos.

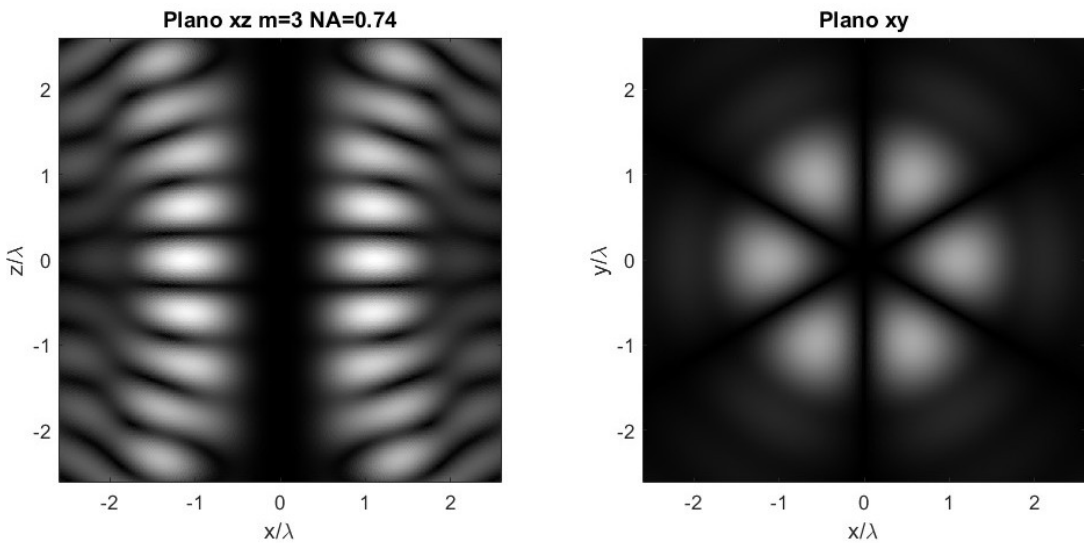


Figura 2.9: Campo acústico correspondiente al modo $m = 3$. En el plano $z = 0$ se observan seis antinodos. Si bien los modos anteriores ya han sido estudiados, el presente trabajo representa un avance en el estudio de este modo. La cantidad de nodos en cada una de las columnas posibilita atrapar más de 24 esferas de EPS simultáneamente, tal como se verá más adelante.

Los modos transversales de orden superior (modos TOS) comparten características con haces estructurados en óptica, particularmente con un haz de Bessel estacionario. Este último está conformado por la superposición de dos ondas idénticas pero contrapropagantes, cada una de las cuales está formada por haces

de Bessel rotantes de la misma carga topológica, pero de signo contrario [17]. Nótese que, en la descripción anterior, la carga topológica total es 0, por lo que no se espera que haya transferencia de momento angular.

Se ha demostrado que los modos TOS [10] son particularmente efectivos en cavidades ultrasónicas, tanto por su capacidad como por su estabilidad para atrapar objetos con simetrías no limitadas a la esférica, alcanzando tamaños mayores que una longitud de onda con un solo dispositivo. En este trabajo, por referencia, $\lambda \sim 8,6\text{mm}$. En consecuencia, se abre la posibilidad de alcanzar las frecuencias de resonancia y explorar un área aún poco estudiada en levitación acústica.

3 Desarrollo experimental

3.1 Construcción del TinyLev y técnicas de visualización del campo acústico

El TinyLev es un levitador uniaxial formado por dos arreglos de transductores en fase, montados sobre dos casquetes esféricos. Estos se colocan a una distancia aproximadamente igual a dos veces el radio de curvatura, formando una cavidad. El diseño original, desarrollado en 2017 por Asier Marzo, Adrian Barnes y Bruce W. Drinkwater [9], ignoró el efecto de las reflexiones intracavidad. En un trabajo posterior dichas reflexiones se consideraron, y el diseño se modificó para ajustar la longitud de la cavidad a modos resonantes longitudinales; esto permitió levitar objetos de mayor peso y densidad que en el diseño original [18] [19]. En este trabajo se construyó un levitador partiendo de esta modificación al diseño.

3.1.1 Transductores

Se emplearon transductores Manorshi MSOA1040H07, los cuales emiten una onda ultrasónica sinusoidal de 40 kHz. Los transductores, mostrados en la figura 3.1, pueden funcionar tanto como receptores como emisores. Cuando se utiliza como emisor, el transductor recibe una señal eléctrica en sus electrodos; el material piezoeléctrico la convierte en vibración mecánica y, mediante un cono emisor acoplado al piezoeléctrico, se genera la onda ultrasónica. Las dimensiones del transductor se muestran en la figura 3.2.

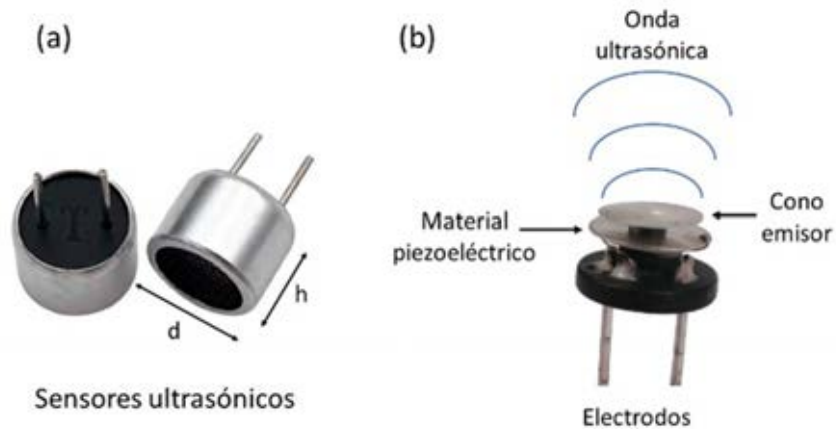


Figura 3.1: Imagen del transductor Manorshi MSOA1040H07 [19]. A la izquierda se observa la apariencia exterior del transductor. El diámetro d es de 10 mm y h es de 7 mm. A la derecha se observan los componentes internos del transductor.

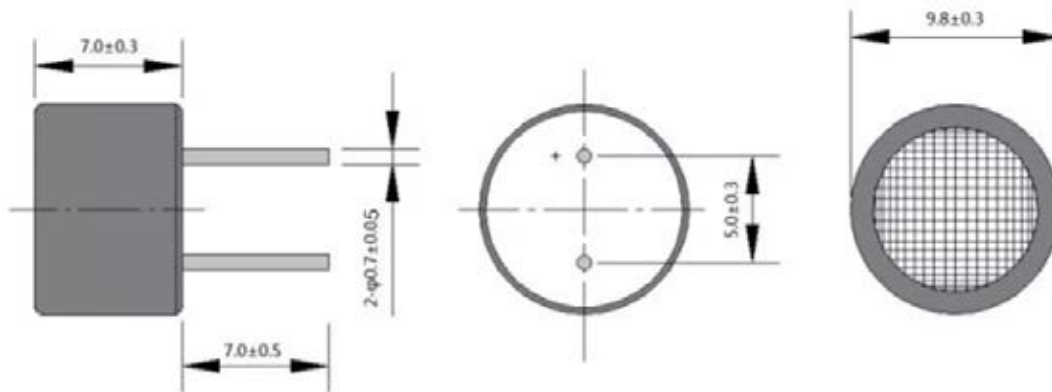


Figura 3.2: Vista lateral, inferior y superior de los transductores [20]. Se especifican la longitud de los electrodos, la distancia entre ellos y las dimensiones de la carcasa del transductor.

3.1.2 Selección de transductores

Pese a provenir del mismo fabricante, cada transductor puede emitir señales con amplitud y fase diferentes. Seleccionar transductores con amplitudes y fases cercanas ayuda a producir una distribución de presión más uniforme en el interior de la cavidad.

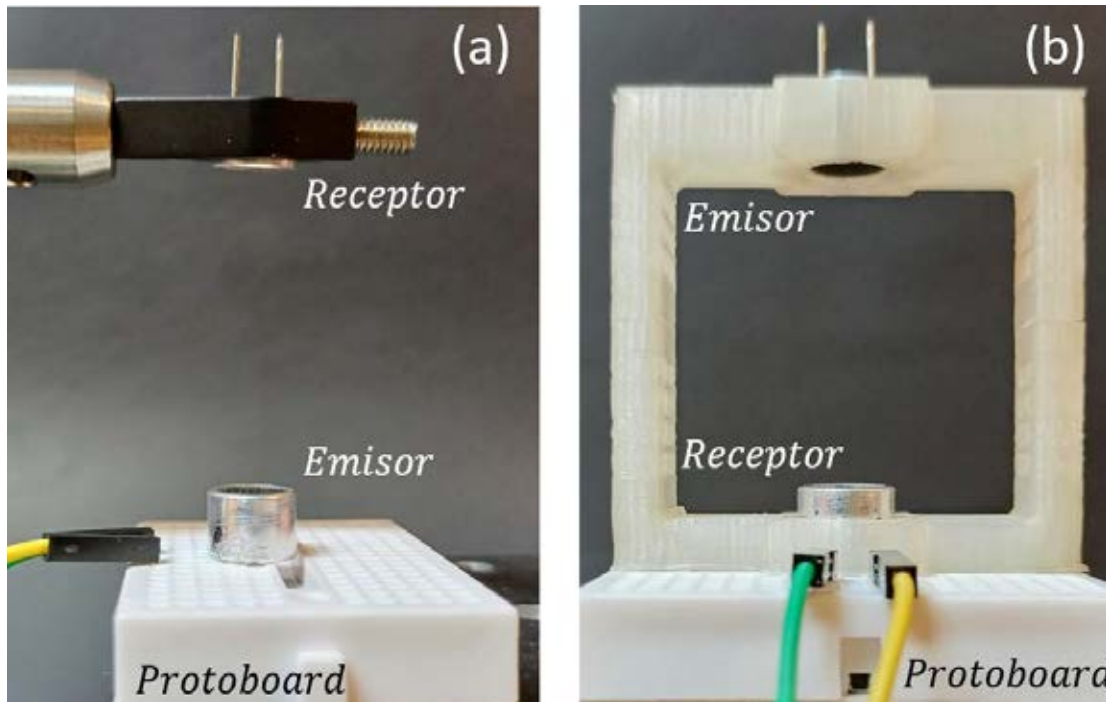


Figura 3.3: Se presentan dos formas de colocar los transductores para evaluar desfase y amplitud. A la derecha se utiliza una pieza impresa en 3D para colocar el transductor emisor y el receptor frente a frente. A la izquierda se prescinde de esta pieza, pero en ambos casos el emisor y el receptor están separados por una distancia múltiplo de media longitud de onda [19].

Se caracterizaron 600 transductores, midiendo su amplitud y polaridad. Para ello se aplica una señal sinusoidal de $10V_{pp}$ al transductor que se desea caracterizar y se coloca otro transductor como receptor, como se muestra en la figura 3.3. Con ayuda de un osciloscopio se mide la respuesta del receptor tanto en amplitud como en fase. Es importante utilizar el mismo transductor de referencia para todas las mediciones y conservarlo para verificaciones posteriores. El emisor y el receptor deben estar separados por una distancia fija múltiplo de media longitud de onda, con el fin de que el receptor mida un máximo de presión. Se registró el voltaje promedio de un mínimo de 50 ciclos del osciloscopio.

Los transductores caracterizados se agrupan en conjuntos con fase y potencia de salida similares. Cada uno de estos grupos puede utilizarse para construir un levitador. Para este trabajo se empleó un diagrama de dispersión para seleccionar un conjunto de 72 transductores. El diagrama se observa en la figura 3.4. Se recomienda guardar tres transductores adicionales en caso de necesitar reemplazar alguno en el futuro.

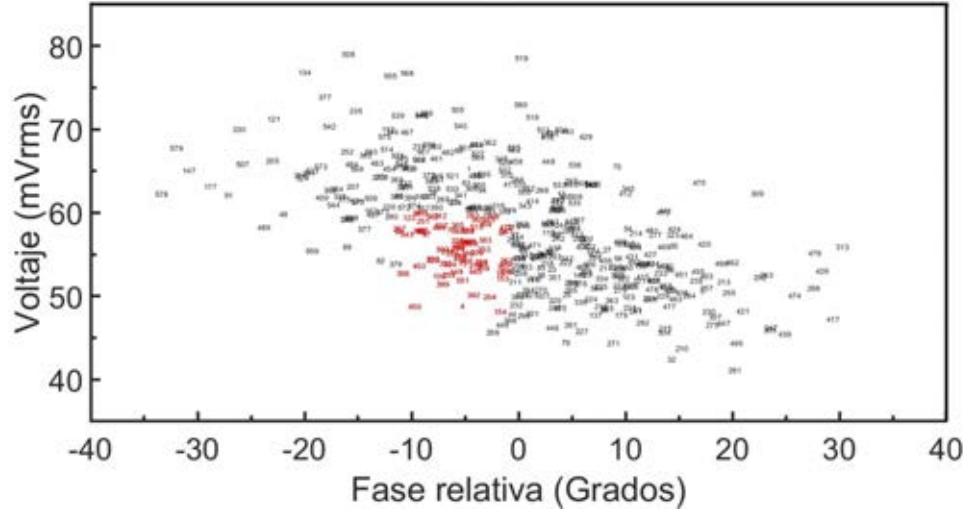


Figura 3.4: Diagrama de dispersión de los transductores. En el eje x esta la amplitud, en el eje y la fase relativa respecto al emisor. En rojo se destaca el conjunto de transductores seleccionados para el levitador del presente trabajo. El voltaje promedio fue de $55,6 \pm 3mV$ con una fase relativa de $-6^\circ \pm 2,8^\circ$

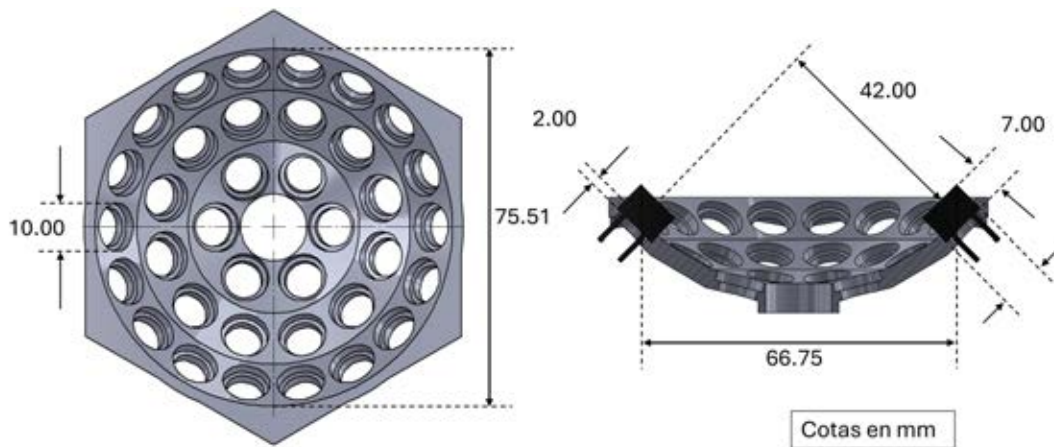
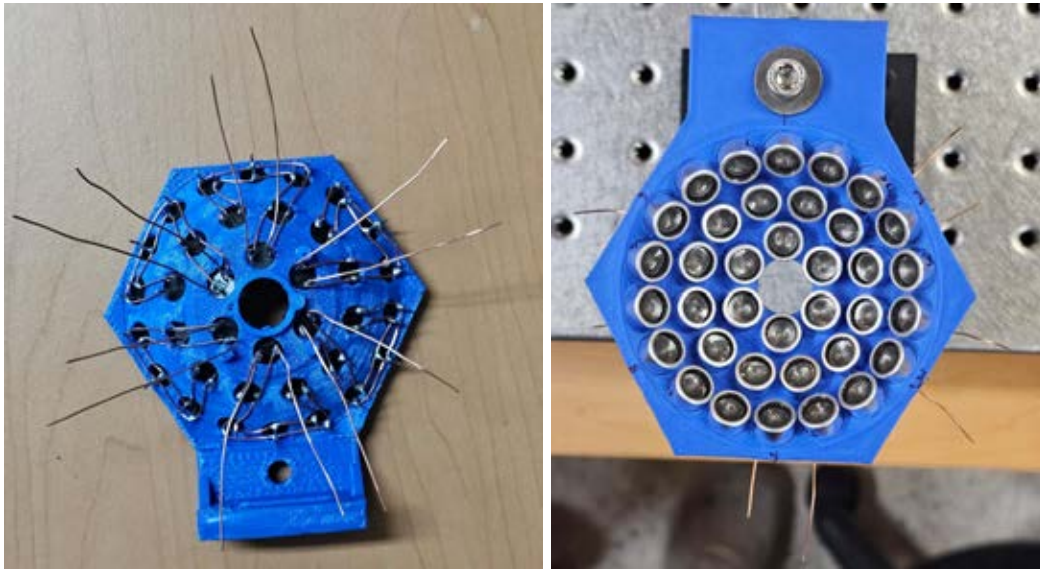


Figura 3.5: Plano del casquete del levitador. Los huecos tienen el ancho necesario para que los transductores entren a presión. El orificio central se dispuso con las dimensiones necesarias para instalar una cámara. El valor del radio de curvatura se mide a partir del cono emisor del transductor. La distancia entre la superficie de los transductores y el centro de curvatura del casquete es de 42 mm. El cono emisor de un transductor está un milímetro al interior de la cara frontal. Con esta última corrección se tiene un radio de curvatura de 43 mm.



(a)

(b)

Figura 3.6: Vista superior e inferior del casquete. En la figura a) vista inferior del casquete. Los transductores forman 6 circuitos diferentes mediante cables de cobre. En la figura b) se observa la vista superior del casquete. La impresión en 3D tiene forma hexagonal.

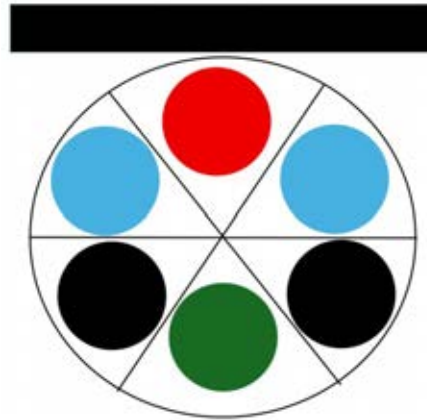


Figura 3.7: Diagrama esquemático de un casquete del levitador. El casquete se divide geométricamente en seis sectores; sin embargo, para su excitación estos se agrupan en cuatro conjuntos de fase. Los sectores que comparten color, como los azules y los negros, están eléctricamente puenteados y se excitan con la misma fase. Este sistema de clasificación por color es el mismo para ambos casquetes, vistos desde arriba del levitador ensamblado.

3.1.3 Ensamblaje de casquetes

Se imprimieron en 3D dos piezas con el diseño de la figura 3.5. Los transductores fueron colocados en las muescas de estas, como se ve en la figura 3.6. El diseño es similar al de [19] con las siguientes mejoras. Los bordes del casquete forman

un hexágono. Esto ayuda a tener mejores referencias para el alineamiento. Las muescas son divisibles en 6 secciones, tal como se ve en la figura 3.7. Esta disposición, como se verá más adelante, permite generar tres modos de orden superior, $m = 0, 1, 3$. Después se puentearon los circuitos de las secciones que comparten color. La conexión al arduino y al modulo L298n es análogo al de la referencia [19].

Los transductores deben topar con el fondo cuando se coloquen en el casquete y ser capaces de sostenerse por si mismos de cabeza. Para obtener los modos HOT es necesario inducir un desfase de π entre secciones contiguas. Electrónicamente es sencillo. Se conecta la terminal positiva de los transductores con la negativa de la fuente para tener este desfase.

Tal como se discutió en el marco teórico, existen dos posibles configuraciones para un modo dado, la configuración de *fase 0*, caracterizada por un antinodo central, y la configuración de *fase π* . La primera corresponde a ambos casquetes emitiendo en fase, mientras que la segunda incluye un desfase entre casquetes de π .

En el cuadro 3.1 se ve la forma en que deben conectarse a la fuente de poder las distintas secciones de un casquete para acceder a cada modo.

Modo	0	π
0	Rojo,Azul,Negro,Verde	
1	Azul,Rojo	Negro,Verde
3	Azul,Verde	Negro,Rojo

Cuadro 3.1: Se presenta la configuración en que deben conectarse las secciones observadas en la figura 3.7 para la obtención de distintos modos. π senala que se debe invertir la conexión a la fuente respecto a 0. Lo cual da como resultado un desfase de π respecto a las secciones adyacentes.

Para alternar entre la configuración de *fase 0* y *fase π* basta con invertir la conexión de uno de los casquetes a la fuente de alimentación.

3.1.4 Alineación y ajuste de cavidad

La alineación y el ajuste de la longitud de la cavidad son procesos fundamentales para la levitación de objetos pesados y de alta densidad. A grandes rasgos, el procedimiento es el siguiente. Primero se ajusta y nivela el casquete inferior, y se toma como referencia para alinear el superior de manera que ambos coincidan con el eje de simetría. Existen diferentes longitudes de resonancia de la cavidad. Estas longitudes corresponden a mínimos locales de corriente. La cavidad debe ajustarse a la longitud que produzca el mínimo absoluto de corriente [18].

La longitud de resonancia no es la misma para las configuraciones de *fase 0* y *fase π* . Por ello, la longitud de la cavidad debe reajustarse si en cualquier momento se cambia de configuración.

Si se dispone de un micrófono calibrado, puede realizarse un ajuste adicional. Para ello, se coloca el micrófono en el máximo de presión de un antinodo, el cual puede identificarse al colocar dos partículas en los nodos adyacentes. Después, se modifica la longitud de la cavidad y se vuelve a buscar el máximo de presión con el micrófono. Este proceso se repite hasta encontrar la máxima presión.

3.1.5 Calibración del micrófono

Como se muestra en la sección 4.1.3, la medición del máximo de presión es imprescindible para obtener la curva de calibración que relaciona la simulación con la presión en el levitador. En consecuencia, se midió con un micrófono calibrado la presión en el antinodo central a distintos voltajes.

Cada lóbulo de presión mide aproximadamente cuatro milímetros. Para realizar mediciones de presión en uno de ellos, es necesario que el área del micrófono sea lo suficientemente pequeña para evitar perturbar de manera significativa el campo medido. Además, los micrófonos presentan direccionalidad, por lo que su orientación es de gran relevancia.



Figura 3.8: Arreglo para la calibración del micrófono. Se colocó el micrófono 46DE sobre un riel. Este se encontraba graduado y dispuesto de tal forma que el 0 del riel colocaba al micrófono inmediatamente en la superficie del emisor. El transductor emisor es el cilindro que se encuentra conectado a la protoboard frente al micrófono, opera a $10V_{rms}$ y emite a 40 kHz.

El micrófono calibrado utilizado fue el GRAS 46DE, tanto por su precisión como por su diámetro de 3,5 mm. Sin embargo, este micrófono es sensible a la dirección de la fuente sonora. Para comprender la direccionalidad del micrófono, se

midió la presión emitida por el transductor 519 del diagrama de dispersión de la figura 3.4, alimentado a $10V_{rms}$. La señal del transductor 519 se midió a una distancia de 30 cm con el GRAS 46DE, tanto con el micrófono orientado de forma paralela como perpendicular al transductor. Se observó que, a 90° , se registraba una presión cercana al 66% de la medida obtenida cuando el micrófono apuntaba hacia el emisor. Este experimento se repitió con otros dos transductores y se obtuvieron resultados similares.

Diseño del T-Mic

Se desarrolló un segundo micrófono de menor direccionalidad, denominado T-Mic. Éste es un micrófono piezoeléctrico compuesto por un transductor, como los utilizados en el levitador, acoplado a la punta plástica de una micropipeta, con un diámetro en la punta de $d_t = 500 \mu\text{m}$. Su tamaño puede compararse con el del micrófono GRAS 46DE en la figura 3.9.

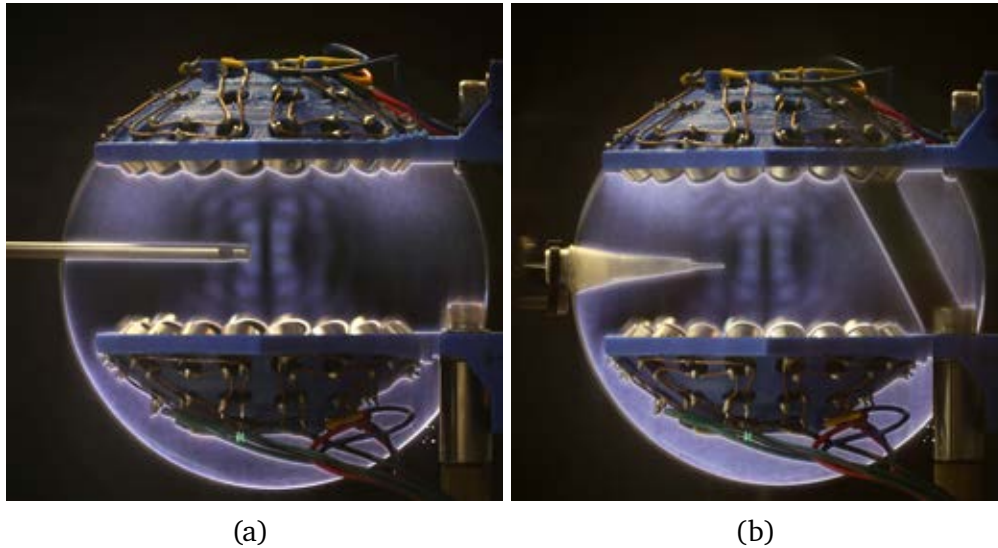


Figura 3.9: Imágenes de schlieren en el modo $m = 3$. En (a) se encuentra el micrófono GRAS 46DE y en (b) el T-Mic. En ambas imágenes se observan dos columnas de lóbulos. La punta del GRAS 46DE tiene dimensiones similares a las de un lóbulo, mientras que la punta del T-Mic es significativamente menor.

La directividad de un micrófono depende del factor de difracción [21]:

$$D = \frac{\langle p_B \rangle}{p}, \quad (3.1)$$

donde $\langle p_B \rangle$ es la presión en el punto de medición en presencia de un receptor con el diafragma bloqueado, y p es la presión en ausencia del receptor. Este factor se aproxima a la unidad cuando el diámetro del micrófono es mucho menor

que la longitud de onda (para el T-Mic, $d_t \ll 8,6$ mm). La direccionalidad de un micrófono está influenciada por dos factores: difracción e interferencia de fase a lo largo del diafragma [21]. Al ser D cercano a uno, los efectos de difracción son despreciables. Además, dado que el radio de la boquilla del micrófono cumple $k \frac{d_t}{2} = 0,185 \ll \pi/4$, también son despreciables los efectos de interferencia de fase. Así, el T-Mic representa una opción adecuada para realizar mediciones en el levitador, lo cual se demostró experimentalmente durante el proceso de calibración. Un diagrama del T-Mic se observa en la figura 3.10.

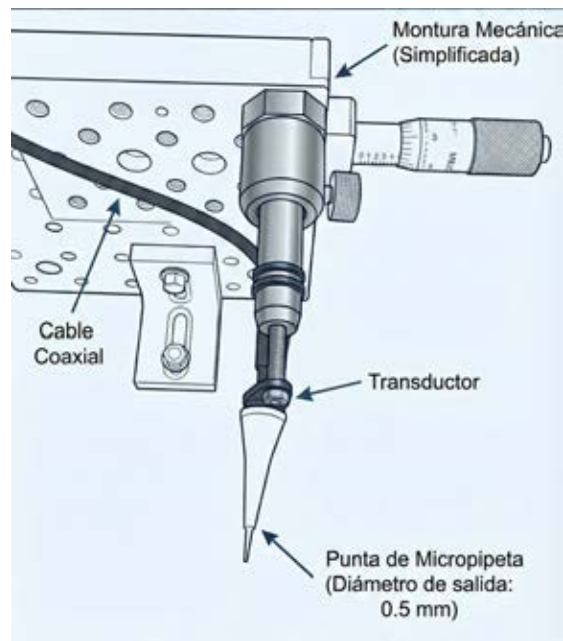


Figura 3.10: Diagrama del T-Mic acoplado a una montura mecánica. Se pueden realizar desplazamientos controlados lateralmente. El cable coaxial se conecta a un osciloscopio para realizar mediciones.

Para obtener medidas absolutas de presión acústica se compararon los valores obtenidos con el T-Mic y el GRAS 46DE. Primero, se aseguró la correcta calibración del 46DE. El fabricante proporciona un valor para la sensibilidad de $S = 0,73 \frac{mV}{Pa}$ en un rango de frecuencias que abarca los 40 kHz utilizados en el presente trabajo. Utilizando el calibrador GRAS 42AG se verificó dicha especificación técnica. El GRAS 42AG produce una señal de 1 kHz a 114 decibels y, con auxilio de un osciloscopio, se verificó que el micrófono presentara la sensibilidad señalada por el fabricante.

El proceso para calibrar el T-Mic fue el siguiente. Se montó el GRAS 42AG sobre un riel alineado con la salida de un transductor emisor alimentado con una señal sinusoidal de 40 kHz a $10V_{rms}$. Se tomaron medidas del voltaje registrado a diferentes distancias del emisor. Finalmente, se repitió el proceso a las mismas

distancias con el T-Mic. En esta medición, como en todas las otras de este trabajo, se evitó tener paredes demasiado cercanas al arreglo experimental. Qué tan cerca puede estar un muro antes de presentar reflexiones que afecten la medición varía ampliamente entre experimentos; por lo tanto, se recomienda verificar estos efectos en cada arreglo y hacer ajustes acordes a las condiciones presentes.

Con el valor del voltaje registrado por el T-Mic y el valor de la presión medida por el GRAS 46DE a las mismas distancias se obtuvo la sensibilidad del T-Mic, $\frac{1}{s_T} = 12,55 \pm 0,4 \frac{Pa}{mV}$. El ajuste lineal se observa en la figura 3.11. Todos los voltajes relacionados con la sensibilidad de los micrófonos están dados en V_{rms} . El T-Mic adicionalmente tiene incorporada una resistencia para disminuir el ruido de la señal medida; sin embargo, no hay evidencia concluyente de este beneficio.

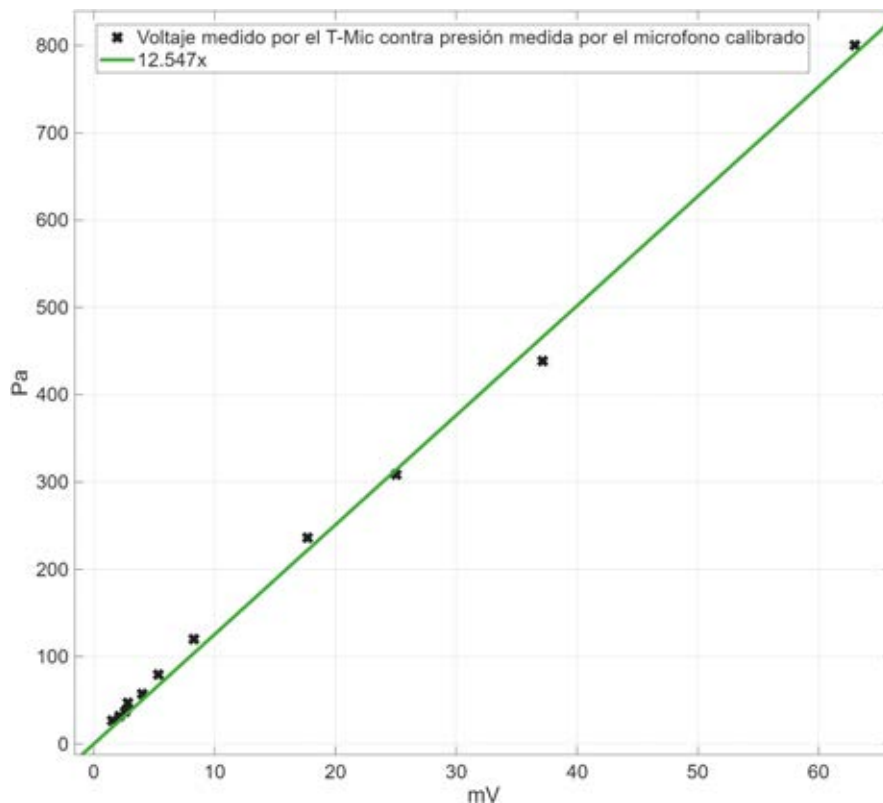


Figura 3.11: Ajuste lineal del voltaje medido con el T-Mic contra la presión medida con el micrófono 42AG, ambas a las mismas distancias del emisor. El emisor fue el transductor 519 alimentado con $10V_{rms}$ a 40 kHz. Las distancias variaron desde ,5 cm hasta 16 cm respecto al emisor. El ajuste arroja una sensibilidad de $12,55 \pm 0,4 \frac{Pa}{mV}$ y un valor de Chi cuadrada superior a 0.99.

Con el mismo sistema de riel se midió el voltaje registrado por el T-Mic a las mismas distancias, pero con dos orientaciones diferentes: a 90 grados y apuntando

al emisor. Esto se realizó para verificar su baja direccionalidad. Los resultados se muestran en la figura 3.12. El micrófono presenta una pérdida mínima entre ambas orientaciones.

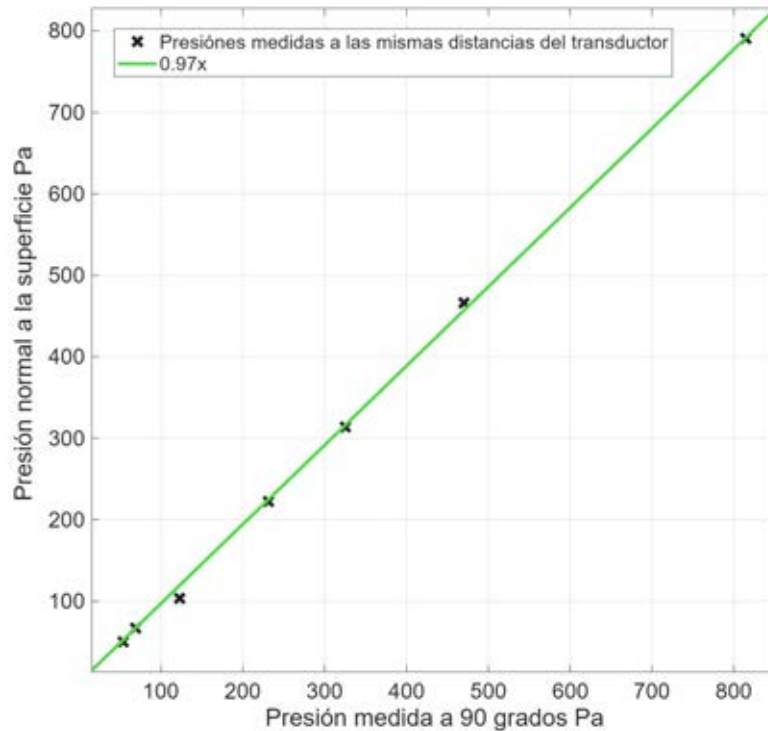


Figura 3.12: Ajuste lineal de la presión medida con el micrófono apuntando al emisor y la presión medida con el micrófono a 90 grados. El emisor fue el transductor 519 alimentado con $10V_{rms}$ a 40 kHz. El ajuste tiene una Chi cuadrada y un valor de pendiente cercano a 1.

Consideraciones sobre el T-Mic

Pese a los beneficios del T-Mic, existen también algunas limitaciones. La primera es el rango de frecuencia al que es sensible: $40\text{ kHz} \pm 0,1$. La segunda es que se registraron variaciones inusuales de presión medida por el micrófono, como que la amplitud de la señal medida se incrementaba al alejar el T-Mic de la fuente. Estas se dieron únicamente en algunos experimentos y a presiones menores a 60 Pa emitidas por un solo emisor. En el presente trabajo la presión excedió este umbral, ya que se mide la presión generada por el arreglo de 72 transductores que conforman el levitador.

3.1.6 Sistema de schlieren

Para visualizar las ondas acústicas se utilizó un arreglo de Schlieren de un solo espejo, con longitud focal $f = 90$ cm. El esquema del arreglo puede verse en la figura 3.13. Este incluyó una navaja comercial, una cámara con lente telescópica, un divisor de haz y una fuente LED de alta potencia cuya emisión se acopló a una fibra óptica; de este modo, la salida de la fibra actuó como una fuente casi puntual. El espejo se colocó a una distancia igual a dos veces su longitud focal respecto de la salida de la fibra óptica, de modo que formara la imagen de dicha fuente. Esta imagen se bloqueó parcialmente con la navaja, orientada horizontalmente, para convertir en variaciones de intensidad las desviaciones angulares del haz en la dirección perpendicular a su filo. Finalmente, el divisor de haz permitió dirigir la imagen del espejo hacia la cámara para visualizar y registrar la deflectometría.

La configuración de ISO, tiempo de exposición y apertura del diafragma se ajustó para obtener una imagen clara y nítida. El sistema de schlieren es sensible a las variaciones de temperatura, por lo que es importante evitar que los transductores se calienten en exceso. Por ello, se recomienda mantener el levitador apagado cuando no se esté utilizando. Las imágenes reportadas en este trabajo se obtuvieron con iluminación continua y tiempo de exposición finito.

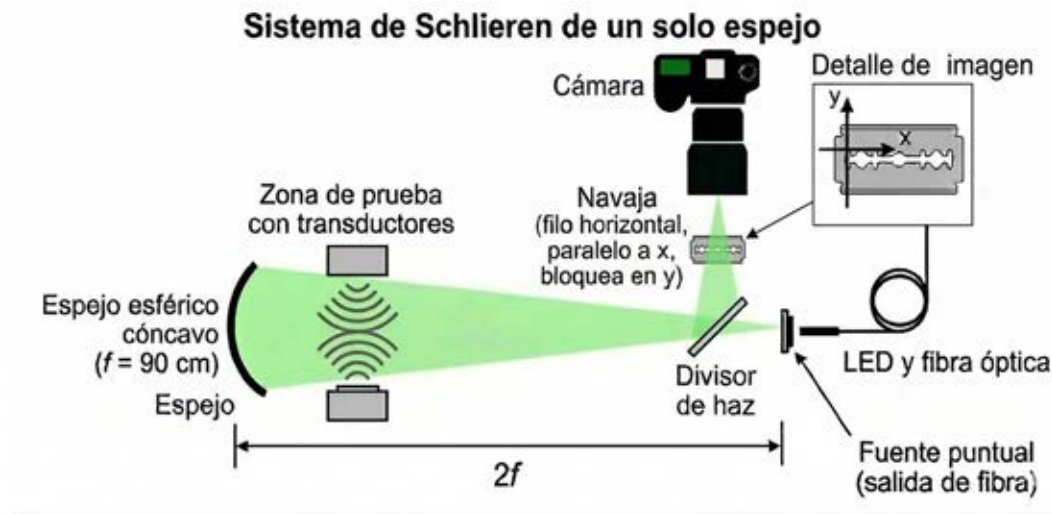


Figura 3.13: Esquema del sistema de schlieren de un solo espejo utilizado en este trabajo. El arreglo consistió en una fuente casi puntual generada por la salida de una fibra óptica acoplada a un LED, un espejo esférico cóncavo de longitud focal $f = 90$ cm, un divisor de haz, una navaja orientada horizontalmente y una cámara con lente telescópica. La salida de la fibra se colocó a una distancia $2f$ del espejo. En la figura también se indica el sistema de coordenadas empleado específicamente para el análisis de schlieren: z corresponde a la dirección de propagación de la luz, x es paralelo al filo de la navaja y y es perpendicular a éste.

Desde el punto de vista teórico, considérese un rayo de luz que se propaga a lo largo del eje z . Si el índice de refracción varía transversalmente en la dirección y , el rayo experimenta una deflexión angular ϵ_y en el plano yz . En la aproximación paraxial, dicha deflexión está dada por

$$\epsilon_y = \frac{1}{n_0} \int \frac{\partial n}{\partial y} dz \quad (3.2)$$

donde n_0 representa el índice de refracción del medio sin perturbar y ϵ_y es el ángulo de deflexión en la dirección y , bajo la aproximación $\tan(\epsilon_y) \approx \epsilon_y$ [22]. Para relacionar la densidad con el índice de refracción se utiliza la ecuación de Gladstone–Dale:

$$n = G\rho + 1 \quad (3.3)$$

donde G es la constante de Gladstone–Dale y ρ la densidad del medio. De esta manera se obtiene:

$$\epsilon_y = \frac{G}{n_0} \int \frac{\partial \rho}{\partial y} dz \quad (3.4)$$

Finalmente, para perturbaciones acústicas pequeñas, $p_1 = c_a^2 \rho_1$, con lo que se obtiene:

$$\epsilon_y = \frac{G}{n_0 c_a^2} \int \frac{\partial p_1}{\partial y} dz \quad (3.5)$$

3.2 Desarrollo computacional: cómputo de fuerzas acústicas

Se desarrollaron códigos en MATLAB para simular los campos de fuerzas acústicas, los puntos de atrapamiento estable y los valores de rigidez para una esfera elástica de tamaño arbitrario.

En simulaciones donde deben procesarse grandes volúmenes de información y explorarse múltiples condiciones de operación, el tiempo de cómputo se vuelve un recurso central. No es práctico registrar datos para cientos de puntos de equilibrio ni ejecutar múltiples simulaciones variando parámetros si el usuario debe supervisar continuamente el programa y realizar trabajo manual adicional. Tampoco lo es si cada simulación requiere varias horas de ejecución. En consecuencia, el desarrollo de los códigos respondió a dos objetivos principales: automatizar la obtención de datos y optimizar el uso de los recursos computacionales.

El primer objetivo se logró mediante un código que recibe como argumento un arreglo con distintos radios de esfera. Para cada radio, calcula el campo de fuerzas, determina los puntos de equilibrio estable, guarda los valores de las derivadas parciales y almacena esta información en una matriz. Cada una de estas

matrices, correspondiente a un tamaño de partícula específico, se guarda a su vez en un conjunto de celdas. Posteriormente, un segundo programa, denominado *analizador*, accede a la información de dichas celdas y la procesa por separado.

El segundo objetivo se abordó mediante paralelización en CPU utilizando el *Parallel Computing Toolbox* de MATLAB. Para ello, se inicia un *parpool* con un número de *workers* igual al número de núcleos disponibles en el sistema. En términos prácticos, esto permite distribuir el cómputo entre varias ejecuciones simultáneas y reducir el tiempo total de cálculo. Así, al ejecutar un ciclo *for* paralelizado, denominado *parfor*, distintos *workers* realizan las iteraciones en paralelo. Algunos elementos pueden clasificarse manualmente, como las constantes (`parallel.pool.Constant()`). Al indicar que un elemento es una constante, MATLAB sabe que solo será leído, lo que evita transferencias redundantes de datos a cada *worker* y reduce el uso de memoria RAM. No obstante, MATLAB clasifica automáticamente la mayor parte de las variables en categorías como *sliced variables*, *broadcast variables*, *reduction variables* y *temporary variables*. Aunque MATLAB suele gestionar correctamente esta clasificación cuando se respetan ciertas reglas de sintaxis, el incumplimiento de dichas reglas puede provocar un uso excesivo de memoria RAM. En ese caso, la velocidad de cálculo queda limitada por memoria y no por CPU. Por ello, en el desarrollo del código se procuró que la principal limitación del tiempo de cómputo proviniera del procesador y no del manejo de memoria. Estos códigos se desarrollaron a partir de las funciones propuestas por Diego Baresch [5] para el cálculo de fuerzas acústicas.

El resultado fue un programa que, por mencionar un ejemplo, puede calcular en aproximadamente una hora y media todos los puntos de equilibrio estable para un conjunto de 20 radios distintos en el modo $m = 3$, guardar su información y graficarla con mínima intervención del usuario. Esto se realizó en una computadora equipada con un CPU AMD Ryzen 9 5900HX de 8 núcleos. En otro ejemplo ilustrativo, el cómputo del campo de fuerzas para un tamaño dado, con $m = 3$ y $NA = 0,74$, se redujo de 150 segundos en cómputo secuencial a 30 segundos en cálculo paralelo.

Esta estrategia no corresponde a cómputo masivo del tipo que usualmente se implementa en GPU, sino a una paralelización moderada en CPU orientada a acelerar tareas independientes y repetitivas, como el cálculo del campo de fuerzas para distintos radios o distintas iteraciones del mallado espacial. En este contexto, el uso de 8 núcleos resultó justificado, ya que permitió una reducción apreciable en los tiempos de ejecución sin requerir hardware especializado ni una reescritura completa del código para GPU.

En todas las simulaciones se consideró una esfera de EPS con las siguientes pro-

iedades: velocidad de onda transversal $c_t = 630$ m/s, velocidad de onda longitudinal $c_l = 900$ m/s y densidad $\rho = 13,8$ kg/m³. Tanto las distancias como el radio de la partícula se expresan siempre en múltiplos de λ .

3.2.1 Cálculo de fuerzas

La función que calcula las fuerzas acústicas evalúa siempre la fuerza en el origen del sistema de coordenadas. En consecuencia, para obtener un mapa espacial del campo de fuerzas es necesario aplicar una serie de rotaciones y traslaciones.

Esto se logra mediante matrices de traslación C , que actúan sobre los coeficientes de forma. Dichas matrices deben tener la dimensión adecuada para los coeficientes considerados y dependen de la distancia de traslación.

Con el fin de agilizar los cálculos, se implementó además el uso de procesos paralelizados en MATLAB. Estos distribuyen las iteraciones independientes entre distintos *workers* de la CPU, lo que permite ejecutar en paralelo partes del cálculo.

También se implementó un procedimiento computacional para identificar los puntos de equilibrio o de atrapamiento estable. Para ello, se buscan en el campo de fuerzas coordenadas que cumplan dos condiciones: primero, que haya un cambio de signo al desplazarse en la dirección positiva tanto del eje x como del eje y ; segundo, que el valor de la derivada direccional en ambas dimensiones espaciales sea negativo. Esta última condición se utiliza como criterio de estabilidad local.

Existen algunas fuentes de error asociadas con el procedimiento anterior. La primera aparece cuando la malla con la que se discretiza el espacio no es lo suficientemente fina, pues en ese caso pueden surgir falsos puntos de estabilidad. De ahí que sea necesario trabajar con una discretización suficientemente fina. La segunda se presenta al identificar puntos de equilibrio que, por simetría, deberían coincidir exactamente. En la práctica, estos pueden aparecer separados por una distancia δx asociada a la discretización espacial; esta distancia corresponde al tamaño de malla. En las simulaciones realizadas, dicho tamaño fue suficientemente pequeño, menor que $300 \mu\text{m}$, por lo que se consideró despreciable. Nótese que, dado que en este trabajo $\lambda = 8,57$ mm, este error corresponde aproximadamente al 3,5% de la longitud de onda.

Cabe señalar que, pese al bajo error obtenido, en este trabajo no se realizó un estudio sistemático de convergencia respecto al tamaño de malla. En consecuencia, los resultados numéricos presentados deben entenderse dentro de esta limitación. Un análisis de convergencia más exhaustivo se deja como trabajo futuro. Además, para $NA = 0,74$, valor correspondiente al levitador diseñado en este trabajo, y para los modos $m = 0$ y $m = 3$, las unidades no son arbitrarias, sino que corresponden cuantitativamente al experimento. Esto se debe a un proceso

de calibración descrito en el desarrollo experimental.

3.2.2 Consideraciones especiales para el estudio de los modos de orden superior

En las simulaciones con $m = 0$ solo fue necesario calcular la estabilidad en el plano xz , debido a la simetría radial de este campo. En cambio, para los modos de orden superior fue necesario calcular también la estabilidad en la dirección y . Todos los resultados presentados a continuación consideran estabilidad en las tres direcciones.

Para los casos con $m \geq 1$ se estudian dos planos, los cuales se muestran en la figura 3.14. La línea morada corresponde al plano que atraviesa los antinodos y que en este trabajo se denomina *plano antinodal*. La línea verde corresponde al *plano nodal*, por ser la que atraviesa los nodos de presión.

El *plano nodal*, tal como su nombre lo sugiere, tiene una presión promedio igual a cero en todos sus puntos. Sin embargo, para que al lector le resulte más sencillo ubicarse en las figuras de este documento, se visualiza la presión del corte antinodal. Esta aparece atenuada, y es importante tener presente que en las imágenes del plano nodal la presión de fondo es meramente ilustrativa.

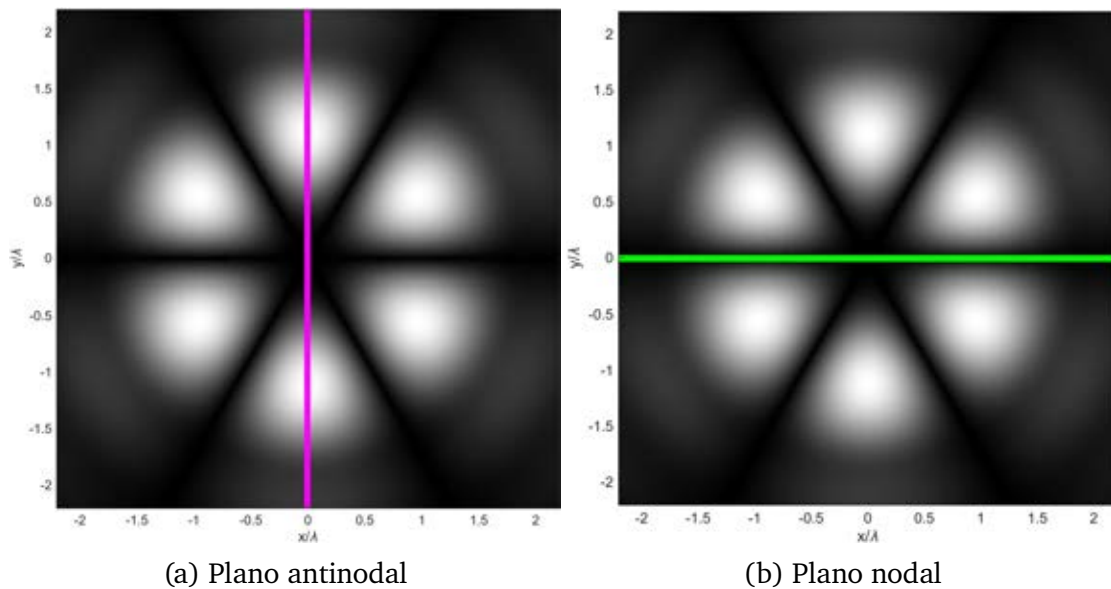


Figura 3.14: Cortes en los planos nodal, en verde, y antinodal, en morado. Estos son los únicos planos en los que se atrapan las partículas, por lo que el estudio tridimensional del campo puede reducirse al análisis de ambos planos para cada modo de orden superior.

Para los modos con m mayor a 0, el procedimiento anterior se complementa verificando también la estabilidad en la dirección y . En la práctica, el programa

calcula primero los puntos estables en el plano xz y posteriormente conserva solo aquellos que también resultan estables en el plano xy .

4 Resultados

4.1 Resultados

4.1.1 Presión en la superficie del transductor

En la figura 4.1 se presentan las mediciones realizadas con el arreglo experimental con el T-Mic mostrado en la figura 3.8. En ella se graficó la presión medida en función de la distancia a la superficie emisora del transductor 519, ubicada aproximadamente dos milímetros al interior de la malla, alimentado con $8V_p$. En la misma gráfica se incluye el ajuste correspondiente.

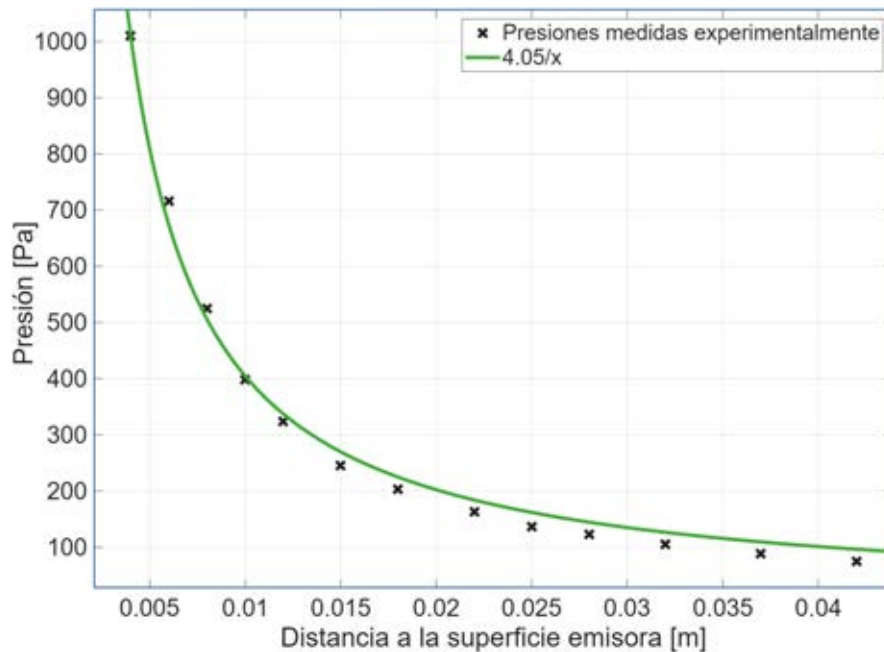


Figura 4.1: Ajuste de mínimos cuadrados de la presión medida en función de la distancia a la superficie emisora. La línea verde corresponde a la ecuación 4.2. El valor del coeficiente del ajuste es $4,05 \pm 0,12$ con chi cuadrada reducida de 0,99. El transductor emisor 519 fue alimentado con una señal de $8V_p$.

El transductor puede modelarse como una fuente tipo pistón y, dadas las distan-

cias de trabajo, el sistema se encuentra en el régimen de campo lejano. En esta aproximación, la presión acústica sobre el eje del emisor está dada por [16]:

$$p(r) = i \frac{P_0 R_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (4.1)$$

donde k es el número de onda, ω la frecuencia, r la distancia medida sobre el eje del pistón, S el área de la superficie emisora y

$$R_0 = \frac{S}{\lambda}$$

la distancia de Rayleigh. Además, P_0 representa una presión efectiva asociada a la superficie emisora: no corresponde exactamente a la presión real sobre la cara del pistón, sino a una cantidad idealizada que equivale a la presión que existiría allí si el diámetro del pistón fuese infinito. No obstante, para los fines del presente trabajo esta aproximación resulta adecuada.

Al tomar la magnitud de la ecuación anterior se obtiene:

$$p(r) = \frac{P_0 R_0}{r} = \frac{4,05 \pm 0,13}{r}, \quad (4.2)$$

y, al despejar, se obtiene un valor de $P_0 = 684,8$ Pa. Para ello se consideró un radio del emisor de 4 mm, menor que el de la pieza completa, ya que la superficie emisora no corresponde a los 10 mm que mide la carcasa del transductor. Esto da un valor de $R_0 = 5,91$ mm considerando $\lambda = 8,6$ mm. Este valor de la longitud de onda corresponde a una velocidad del sonido de 343 m/s.

Por último, el transductor 519 en el diagrama de dispersión de la figura 3.4 tiene una amplitud de 78,6 mV. El promedio de los transductores del levitador, de acuerdo con el mismo diagrama, es de 56 mV. Si se asume linealidad entre la amplitud de emisión y el voltaje de alimentación, se concluye que los transductores del levitador construido tienen una potencia promedio del 71% de la del transductor 519 para un voltaje dado. Por tanto, la presión promedio de los transductores del levitador construido a $8 V_p$ de alimentación es $P_0 = 0,71 \times 684,8 = 486$ Pa. Los datos anteriores están dados en V porque no han sido ajustados aún con algún factor de sensibilidad que relacione voltaje y presión.

4.1.2 Presión en la superficie del casquete

Cada casquete esférico tiene 36 transductores, un radio de curvatura de 43 mm y un valor de $NA = 0,74$. Esto da un área de $38,47 \text{ cm}^2$. Sin embargo, no toda el área de la superficie del casquete está emitiendo. En cada casquete hay 36 transductores, cada uno con un radio de emisor de 4 mm, lo que da un área emisora de

aproximadamente el 47,6%. Por ello, si se desea caracterizar la presión a la que emite el casquete, no puede tomarse directamente el valor de P_0 ya calculado, sino que debe considerarse un factor de corrección. Así, la presión del casquete a $8 V_p$ es $0,476P_0 = 231 \text{ Pa}$.

Cada transductor es diferente, como se discutió antes, por lo que no todos tienen la misma amplitud. Una caracterización meticulosa requeriría medir la amplitud de vibración de cada piezoeléctrico en todos los transductores utilizados por casquete. Sin embargo, debido a que el grupo seleccionado es suficientemente similar entre sí, este valor constituye una buena primera aproximación y será de relevancia para explicar el factor de ganancia que relaciona cuántas veces un casquete esférico concentra la presión en el centro de curvatura teórico con respecto al experimental.

Ganancia por enfocamiento geométrico

La ganancia por enfocamiento geométrico es la relación entre la presión en la superficie de un emisor cóncavo y la presión en el centro de curvatura. Para un radiador esférico cóncavo que emite uniformemente en su superficie, a una presión lo suficientemente pequeña como para ignorar efectos no lineales y con una longitud de onda pequeña respecto al radio de curvatura, la ganancia por enfocamiento se define como [23]:

$$G = \frac{P_R}{P_0} = kR_c(1 - \cos(\alpha)) \quad (4.3)$$

donde p_R es la presión en el centro de curvatura, P_0 la presión en la superficie del casquete y $\alpha = \arcsin(\text{NA})$. Dicho emisor es el modelo al que idealmente se asemejan los casquetes esféricos del TinyLev y el simulado computacionalmente. Cabe destacar que el máximo de presión de un radiador esférico no se encuentra exactamente en el centro de curvatura, sino que presenta una ligera corrección; sin embargo, el cambio en posición y magnitud es lo suficientemente pequeño como para despreciarlo.

Bajo estos parámetros se espera una amplificación para el levitador del presente trabajo de $G = 10,4$. Dado que la presión en la superficie del casquete es 231 Pa, se predice una presión en el centro de curvatura de 2404 Pa a $8 V_p$ de alimentación.

4.1.3 Perfiles transversales y efecto de resonancia

Las secciones anteriores describieron los preparativos para desarrollar la instrumentación necesaria para analizar experimentalmente el levitador e introducir algunos de los fenómenos físicos que se expondrán a continuación. Con ello se

cumple uno de los objetivos de este trabajo: medir la presión en el interior de la cavidad con el fin de calibrar las simulaciones computacionales y desarrollar un modelo cuantitativo que exprese no solo la posición de equilibrio estable de partículas de distintos tamaños, sino también la magnitud de la fuerza y los valores de *stiffness* o rigidez.

Para afrontar este desafío se desarrolló el T-Mic y se discutieron los efectos de reflexión, así como las limitaciones de técnicas de observación como la schlieren. En la presente sección se expondrán los efectos de las reflexiones internas y el proceso de calibración de la simulación. Además, se compararán los perfiles de presión medidos con el T-Mic con los perfiles transversales considerados en la simulación.

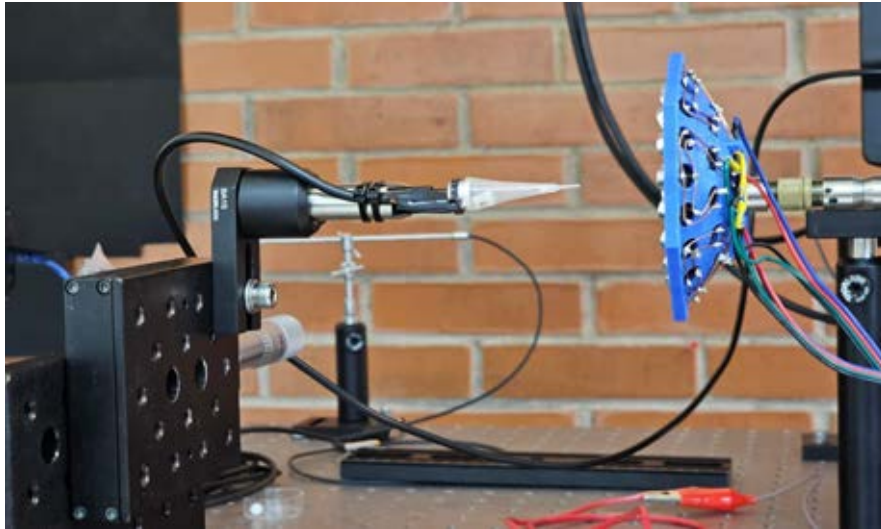


Figura 4.2: Fotografía del experimento para la adquisición de perfiles transversales de presión de un casquete. Se colocó el T-Mic en una base con ajuste micrométrico. La separación entre el casquete y la boca del micrófono fue la que garantizaba medir los máximos de presión en cada modo. Se accedió a los distintos modos recableando las conexiones a la fuente, como se expuso en una sección anterior.

Ganancia por reflexiones internas de la cavidad

La ganancia por reflexiones internas de la cavidad cuantifica el incremento de presión producido por la formación de una cavidad resonante, en comparación con el caso en que actúan únicamente los dos casquetes sin ganancia adicional debida a reflexiones internas. Para estimarla, se toma como referencia el doble de la presión medida para un solo casquete, $2p_{\text{cas}}$, que corresponde a la presión esperada en el levitador si ambos casquetes contribuyeran linealmente y no exis-

tiera resonancia intracavidad. La ganancia relativa se define entonces como

$$G = \frac{p_{\text{cav}} - 2p_{\text{cas}}}{2p_{\text{cas}}} \times 100\%, \quad (4.4)$$

donde p_{cas} es la presión medida para un solo casquete y p_{cav} es la presión medida en el antinodo central de la cavidad ajustada al modo longitudinal resonante que maximiza la presión. Estas cantidades se midieron usando el T-Mic con el levitador alimentado a $4V_p$, en un arreglo como el de las figuras 4.2 y 4.3. Para el modo fundamental, la longitud de cavidad correspondiente al máximo de presión fue $L = 80$ mm, mientras que para el tercer modo de orden superior fue $L = 72$ mm.

En el modo fundamental se midió una presión de $p_{\text{cas}} = 793$ Pa para un casquete y de $p_{\text{cav}} = 2823$ Pa en el levitador ajustado a $L = 80$ mm. Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$G = \frac{2823 - 2(793)}{2(793)} \times 100\% \approx 78\%.$$

Para el tercer modo de orden superior se midió $p_{\text{cas}} = 430$ Pa para un casquete y $p_{\text{cav}} = 1845$ Pa en el levitador ajustado a $L = 72$ mm, de modo que

$$G = \frac{1845 - 2(430)}{2(430)} \times 100\% \approx 114\%.$$

Así, para las longitudes de cavidad que maximizan la presión en cada caso, la cavidad produce una ganancia por reflexiones internas del 78% en el modo fundamental y del 114% para $m = 3$.

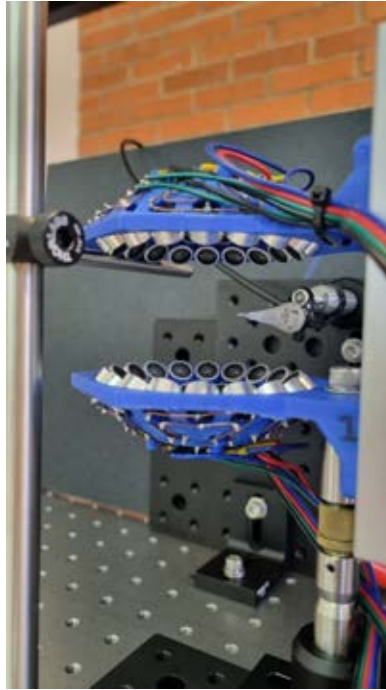


Figura 4.3: Fotografía del experimento para la adquisición de perfiles transversales de presión en cavidad. Se colocó el T-Mic en una base con ajuste micrométrico. La separación entre el casquete y la boca del micrófono fue la que garantizaba medir los máximos de presión en cada modo. La cavidad se ajustó a resonancia.

Perfiles transversales de presión

Utilizando el T-Mic se midieron perfiles transversales de presión para un casquete y para una cavidad ajustada a un modo resonante longitudinal. Los resultados para los dos modos estudiados se muestran en las figuras 4.4 y 4.5 para el modo fundamental, y en las figuras 4.6 y 4.7 para el tercer modo de orden superior. En cada caso se realizaron mediciones a $8V_p$ y a $4V_p$, con el fin de examinar si al aumentar el voltaje de alimentación aparecían efectos no lineales en la respuesta de los transductores. No se observaron cambios significativos en la forma de los perfiles al comparar ambos voltajes. En estas figuras se presenta tanto el perfil de presión medido experimentalmente como el perfil de presión obtenido numéricamente a partir del potencial de velocidad del campo acústico incidente, dado por la expresión (2.41). La amplitud del perfil simulado se calibró a partir de los datos experimentales aquí mostrados.

Para ilustrar la importancia de operar en el modo longitudinal resonante óptimo, los perfiles transversales en $m = 0$ se adquirieron con una longitud de cavidad $L = 69$ mm, la cual no corresponde al modo resonante de mayor amplitud ($L = 80$ mm). Esto llevó, para $4V_p$, a una amplitud máxima de 2228 Pa, menor que los 2823 Pa obtenidos en el modo resonante óptimo.

En el modo fundamental, las figuras 4.4a y 4.5a muestran los perfiles de presión para un solo casquete a $8V_p$ y $4V_p$, respectivamente, mientras que las figuras 4.4b y 4.5b muestran los perfiles correspondientes en cavidad. En la figura 4.4a se observa que el pico central de la simulación es más ancho que el medido experimentalmente. Además, en cavidad, figura 4.4b, la presión experimental no alcanza valores nulos, en contraste con el modelo simulado. La ausencia de mínimos nulos puede atribuirse a las reflexiones internas de la cavidad o a efectos de difracción asociados con la discretización de los emisores del casquete. Dado que, para un solo casquete, los mínimos de presión se encuentran mucho más cercanos a 0, aun en presencia de difracción, es más probable que la no anulación del campo en cavidad se deba principalmente a las reflexiones internas.

La presión máxima medida para un casquete a $8V_p$ en el modo $m = 0$ fue de 2070 Pa. Previamente se estimó para ese voltaje una presión característica de emisión $P_0 = 231$ Pa y un factor de ganancia $G = 10,4$, lo que conduce a una presión ideal estimada en el centro de curvatura de 2402 Pa. Por ello, registrar experimentalmente una presión del mismo orden de magnitud resulta consistente con la estimación teórica.

En el tercer modo de orden superior, las figuras 4.6a y 4.7a muestran los perfiles para un solo casquete a $8V_p$ y $4V_p$, respectivamente, mientras que las figuras 4.6b y 4.7b muestran los perfiles correspondientes en cavidad. En ambos voltajes, los picos del campo medido en cavidad aparecen más cercanos al centro que los de la simulación numérica. Esto podría indicar que el campo del levitador está más focalizado de lo que se supuso en el modelo.

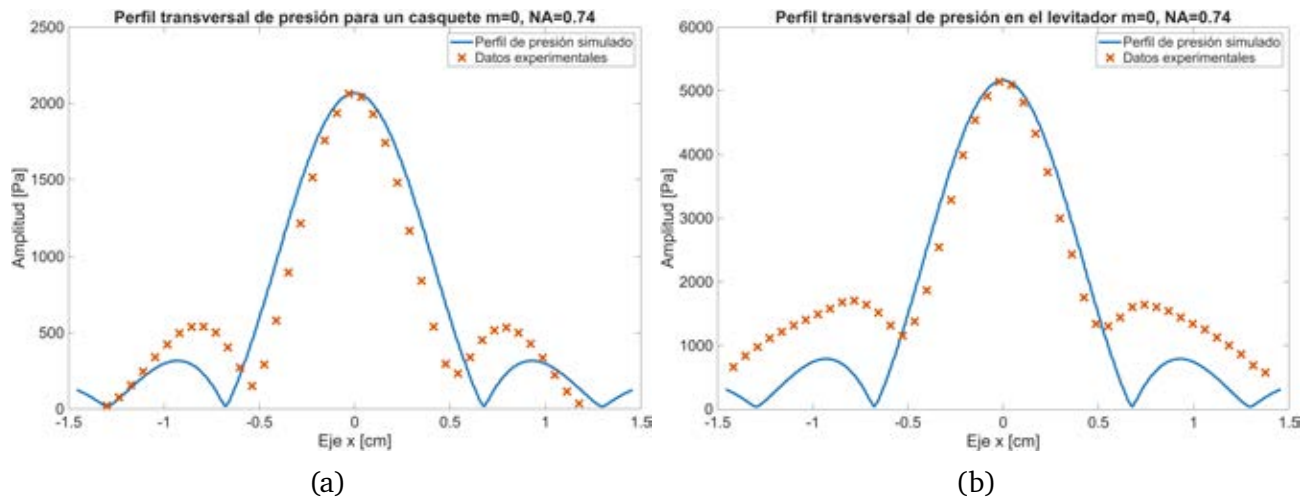


Figura 4.4: Mediciones realizadas a $8V_p$ en el modo fundamental con una longitud de cavidad de 69 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.4a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 2070 Pa; en 4.4b se tiene un máximo de 5109 Pa en cavidad ajustada a resonancia.

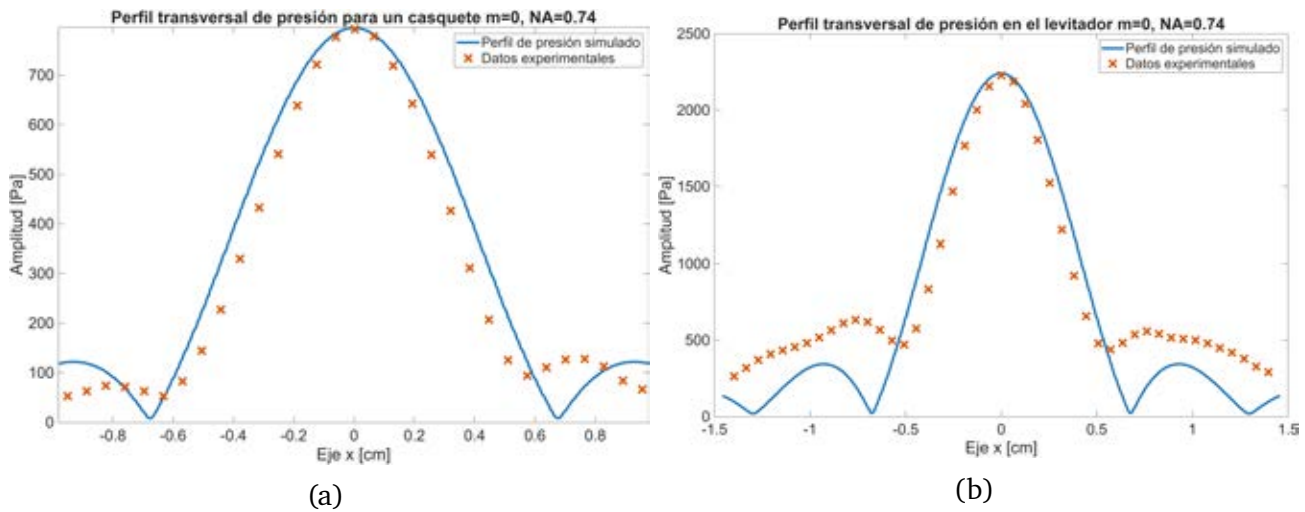


Figura 4.5: Mediciones realizadas a $4V_p$ en el modo fundamental con una longitud de cavidad de 69 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.5a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 793 Pa; en 4.5b se tiene un máximo de 2228 Pa en cavidad ajustada a resonancia.

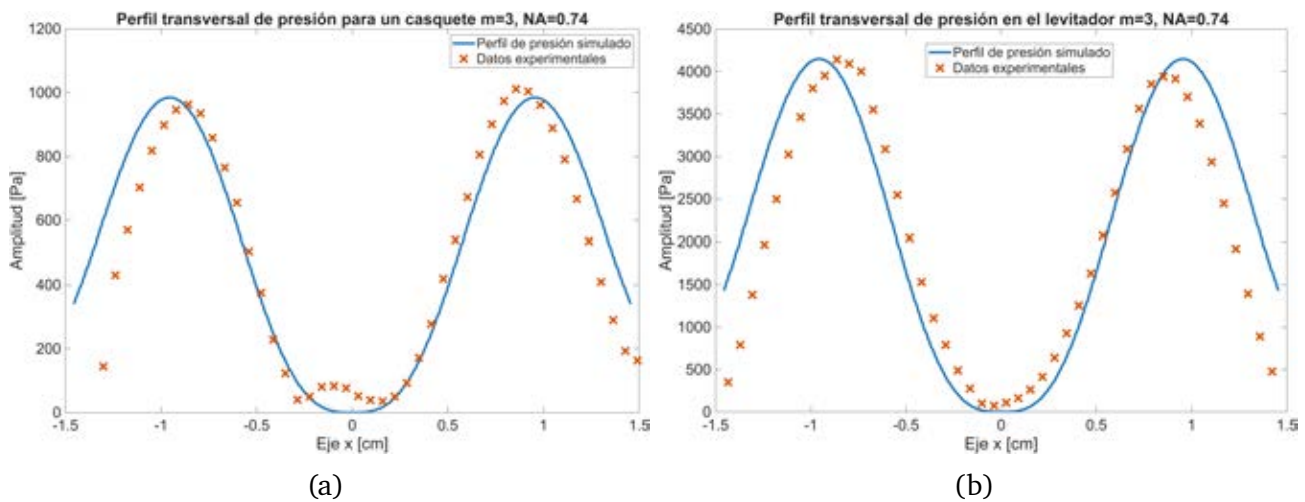


Figura 4.6: Mediciones realizadas a $8V_p$ en el tercer modo de orden superior con una longitud de cavidad de 72 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.6a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo de 1013 Pa; en 4.6b se tiene un máximo de 4147 Pa en cavidad ajustada a resonancia.

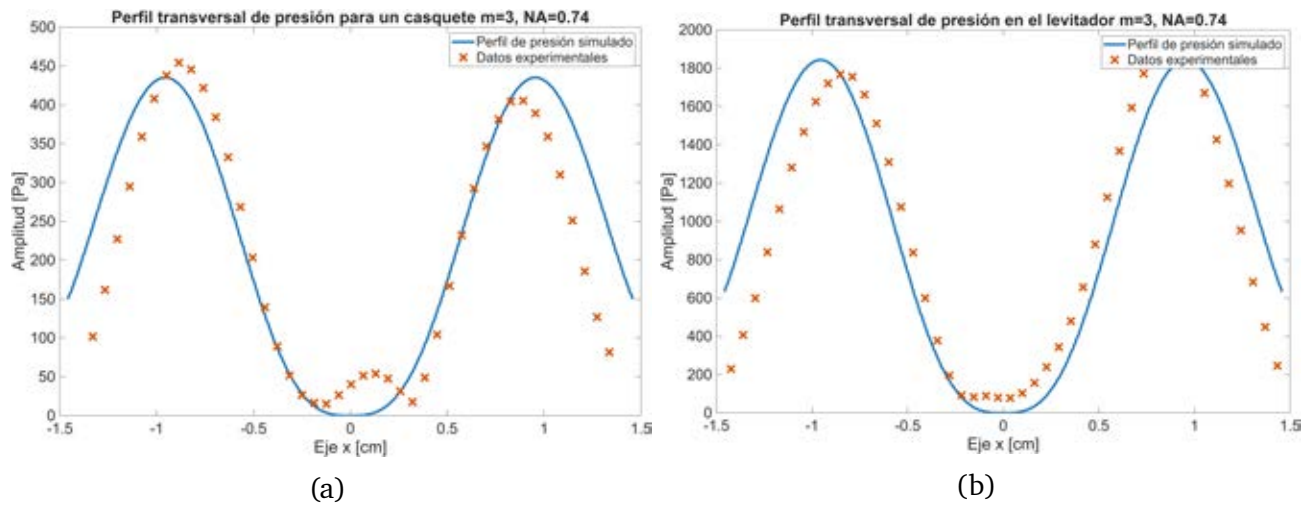


Figura 4.7: Mediciones realizadas a $4V_p$ en el tercer modo de orden superior con una longitud de cavidad de 72 mm. El intervalo entre posiciones es de 0,61 mm. En 4.7a se observa el perfil para un solo casquete con un máximo promedio de ambos picos de 430 Pa; en 4.7b se tiene un máximo promediado de los dos picos de 1845 Pa en cavidad ajustada a resonancia.

4.1.4 Deflectometría schlieren

La deflectometría Schlieren ha demostrado ser de gran utilidad para visualizar campos acústicos en levitadores acústicos [18, 15], incluyendo el estudio de modos de orden superior [10]. En el contexto de este trabajo, esta técnica es relevante porque la propagación de ondas acústicas intensas en aire produce variaciones espaciales de presión, densidad y temperatura, las cuales modifican localmente el índice de refracción. Como consecuencia, los rayos de luz que atraviesan la cavidad sufren una deflexión cuya magnitud depende del gradiente transversal del índice de refracción y, por tanto, del campo acústico.

En este trabajo se identificó una característica relevante: para modos impares de orden superior, y bajo ciertas orientaciones de observación, la deflexión neta del haz puede reducirse considerablemente cuando el rayo atraviesa sucesivamente regiones en las que el gradiente transversal responsable de la deflexión cambia de signo. En esas condiciones, las contribuciones locales a la integral de la ecuación 3.5 tienden a compensarse, lo que disminuye el contraste y puede dificultar la observación de la onda estacionaria. Este comportamiento es consistente con lo observado en las figuras 4.8a y 4.8b: en 4.8b las contribuciones a la deflexión se cancelan en mayor medida, mientras que en 4.8a dichas contribuciones se suman de manera acumulativa, produciendo una desviación neta.

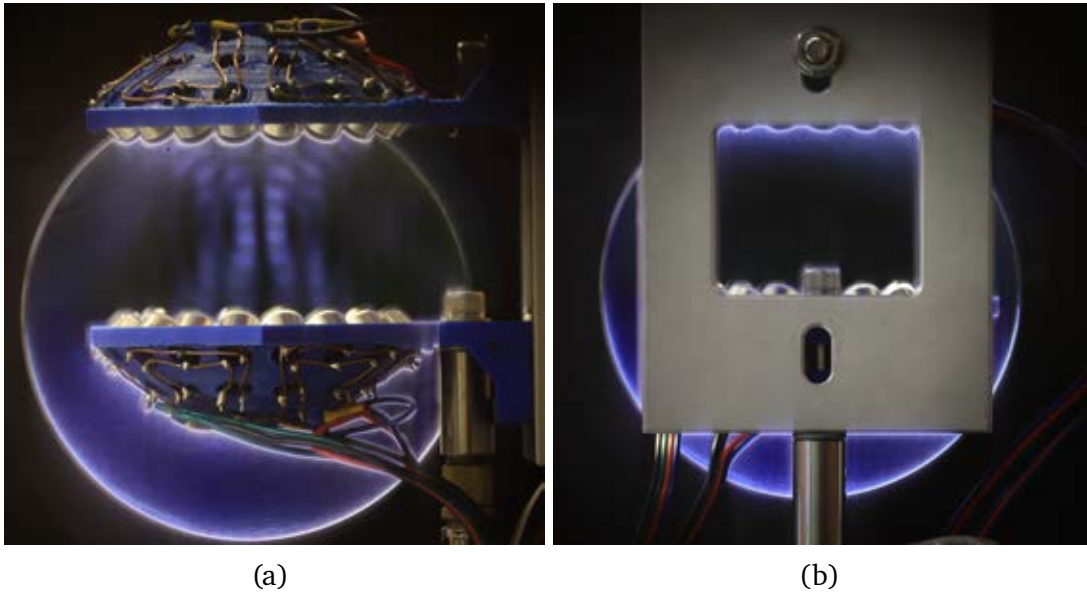


Figura 4.8: Imágenes de deflectometría Schlieren. En 4.8a se observa el levitador en el modo $m = 3$ con el plano nodal en el centro. En 4.8b se muestra el mismo levitador observado a 90° .

Para entender el comportamiento anterior, conviene recordar que el patrón observado con esta técnica se origina en la componente vertical de la deflexión del haz de luz al atravesar regiones con distinto índice de refracción. La intensidad registrada depende de cómo esa deflexión desplaza la imagen de la fuente con respecto a la navaja. En este experimento, la navaja se encontraba orientada horizontalmente; por ello, el sistema es sensible a desviaciones en la dirección y : si el rayo se desvía hacia la navaja, la región se oscurece; si se desvía en sentido opuesto, la región se vuelve más brillante [24]. Por ello, el contraste no depende únicamente de la magnitud de la deflexión, sino también de su signo con respecto a la orientación de la navaja. Tal como se ilustra cualitativamente en la figura 4.9, si un rayo de luz viaja en la dirección z a la altura de un nodo, por ejemplo en $y = 0,3\lambda$, y la navaja se orienta paralela al eje x , el haz atraviesa primero una región donde la derivada parcial de la presión respecto a y es negativa y después otra donde es positiva. Bajo la aproximación en la que la perturbación del índice de refracción sigue la del campo de presión, las contribuciones a la deflexión pueden compensarse casi por completo, de modo que $\epsilon_y \approx 0$. Así, la desviación neta del haz se reduce y, por tanto, el contraste Schlieren asociado a esa trayectoria se debilita.

Conviene señalar, sin embargo, que las imágenes experimentales presentadas en este trabajo se obtuvieron con iluminación continua y tiempo de exposición finito. En consecuencia, la cámara registra un promedio temporal de la intensidad, no una instantánea estricta del campo acústico. Por ello, la figura 4.9 debe in-

terpretarse como una ilustración cualitativa del mecanismo de cancelación de la deflexión, y no como una correspondencia punto a punto entre el campo instantáneo simulado y la imagen registrada. Aunque en la figura solo se muestra un instante del campo, el campo acústico oscila armónicamente conservando la distribución espacial de regiones que contribuyen con signos opuestos a la deflexión. En consecuencia, la atenuación de la deflexión no es exclusiva del instante mostrado, sino que ocurre a lo largo de todo el ciclo de oscilación. Dado que la cámara registra un promedio temporal de la intensidad, esta atenuación también se refleja en la imagen experimental obtenida.

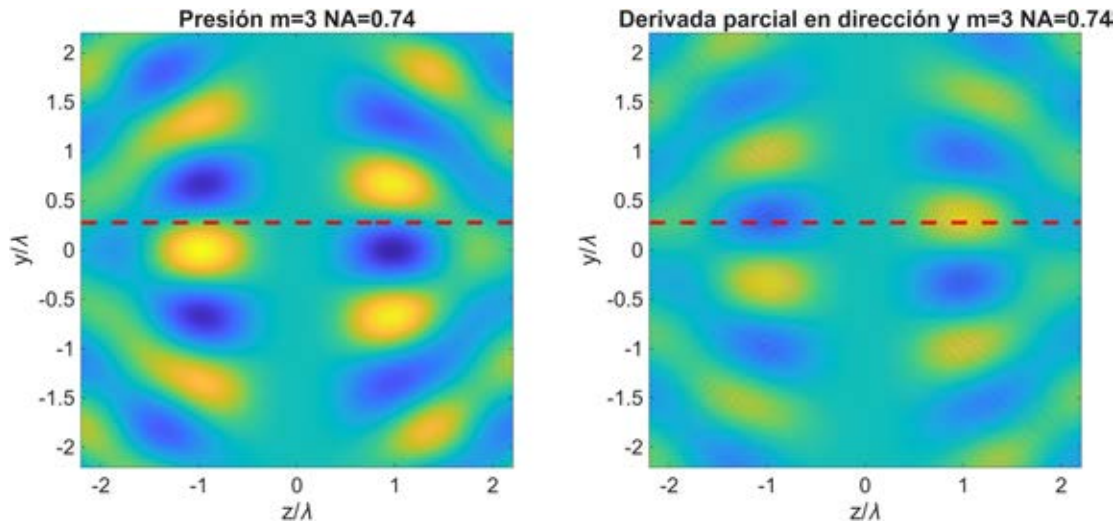


Figura 4.9: Simulación del campo de presión instantáneo y de su derivada parcial respecto al eje y . En ambas imágenes, el amarillo representa magnitudes positivas y el azul magnitudes negativas. A la izquierda se muestra el campo de presión; a la derecha, la derivada respecto al eje y , cuya integración a lo largo de trayectorias ópticas paralelas al eje z determina la deflexión angular del haz. Nótese que la convención de ejes en estas figuras se eligió de modo que la dirección de propagación de la luz corresponda al eje z .

4.1.5 Capacidad de levitación

En los modos transversales de orden superior, el levitador es capaz de sostener un número considerablemente mayor de partículas que en el modo fundamental. En particular, en el modo $m = 3$, como se muestra en la figura 4.10a, pueden levitarse 6 partículas simultáneamente en un mismo plano transversal. Al existir 4 planos nodales, esto corresponde a un total de 24 partículas levitadas simultáneamente. En la figura 4.10b se observan dos esferas levitando; la de mayor tamaño tiene un radio de 4,5 mm, correspondiente aproximadamente a $0,53\lambda$.

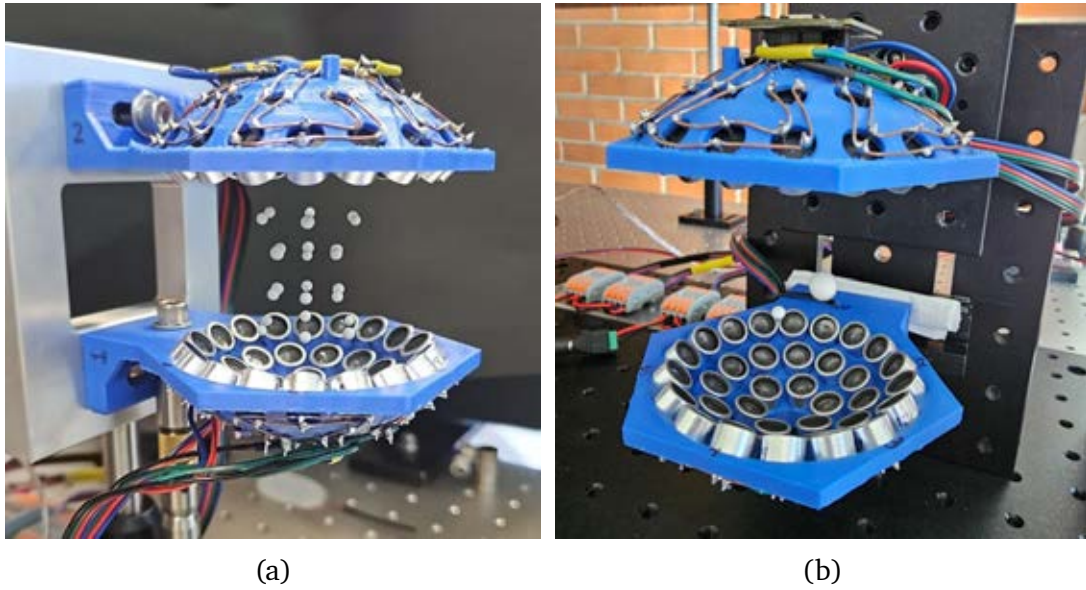


Figura 4.10: Ejemplos de levitación en el modo $m = 3$. En 4.10a se observan múltiples esferas de EPS atrapadas simultáneamente. En 4.10b se muestran dos esferas levitando, una de ellas de gran tamaño.

El campo esparcido incrementa su efecto conforme aumenta el radio de la partícula. Del mismo modo, las imperfecciones en la superficie de la esfera se vuelven más notorias para tamaños mayores. Por ejemplo, al levitar partículas grandes como la de la figura 4.10b, es común que comiencen a rotar, lo que dificulta su atrapamiento estable, aun cuando este sea teóricamente posible. Experimentalmente en este trabajo se ha observado que acercar una herramienta delgada, como unas pinzas, puede estabilizar temporalmente la partícula y evitar que rote mientras se coloca en la cavidad. Sin embargo, este efecto desaparece al alejar dicha herramienta, y en este trabajo no se presenta una justificación teórica de este comportamiento.

4.2 Mapa de posiciones de equilibrio

Para un rango dado de tamaños de partícula, se calculó el punto de equilibrio estable, se guardaron sus coordenadas y se determinó también el valor de la rigidez en las tres direcciones espaciales: k_x , k_z y k_y . Los modos simulados fueron $m = 0$, $m = 1$ y $m = 3$. Para los modos $m = 0$ y $m = 3$ se calibró el campo de la simulación para que se asemejara al del levitador con el que se experimentó. El modo $m = 1$ sólo se estudió de manera cualitativa, por lo que de él se muestran únicamente las posiciones de equilibrio. La apertura numérica fue $NA = 0,74$, correspondiente al levitador fabricado en el desarrollo experimental del presente trabajo. Adicionalmente, también se exploraron $NA = 0,40$ y $NA = 0,57$ para

el modo fundamental. La apertura numérica es un parámetro útil para la caracterización del levitador, pues permite variar radios de curvatura o aperturas y, mientras este valor permanezca constante, obtener sistemas muy similares.

4.2.1 Modo fundamental $m = 0$

Se generaron mapas con todas las posiciones de equilibrio en un área o volumen dado para diferentes sistemas. Dichos mapas abarcan un rango de tamaños que varía desde $a = 0,12$ hasta $a = 0,7$. Se recuerda al lector que a está dada en unidades de λ , de modo que $r = a\lambda$. Si en estos mapas hay partículas ausentes dentro del rango antes descrito, significa que para dichos tamaños no se encontró una posición de equilibrio estable.

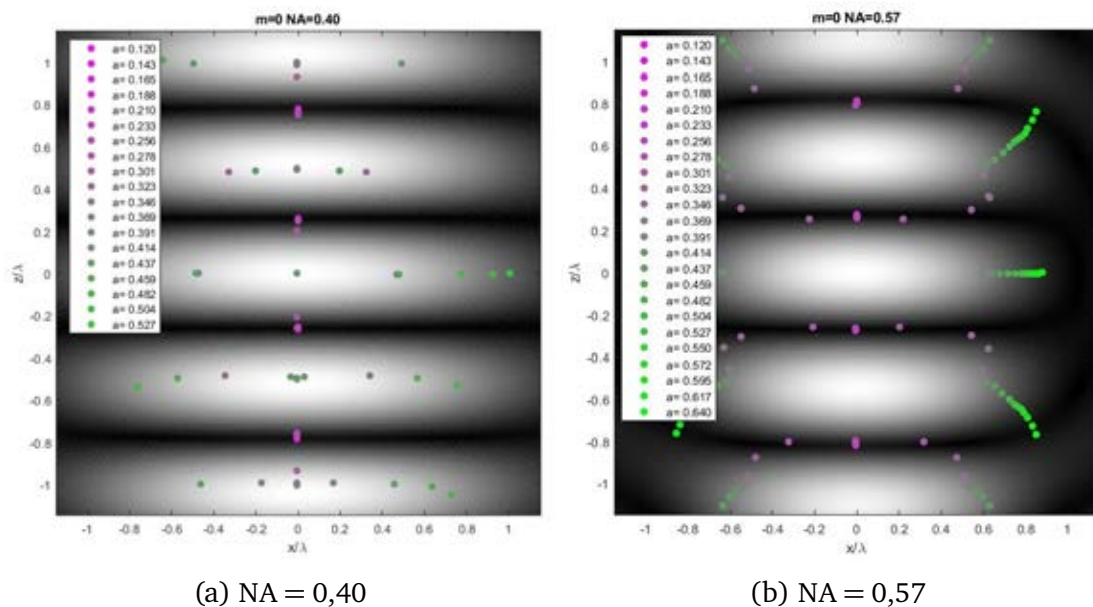


Figura 4.11: Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color que va de magenta para $a = 0,120$ a verde para $a = 0,700$, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ .

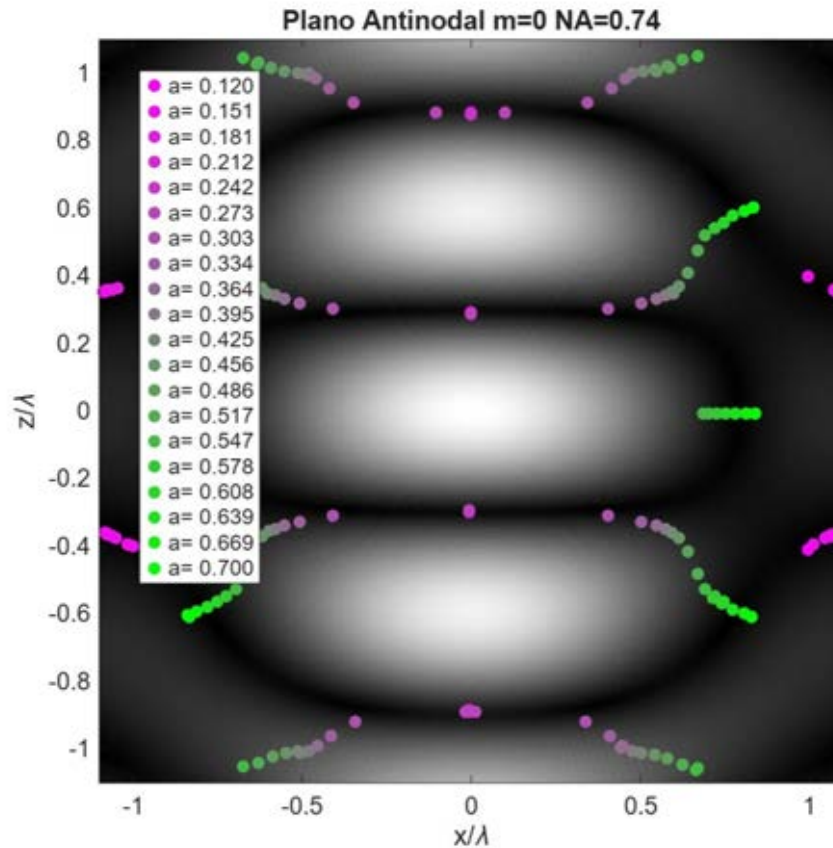


Figura 4.12: Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ .

Las figuras 4.11 y 4.12 muestran estos mapas para $m = 0$. Las partículas pequeñas, señaladas con color morado, tienen su posición de equilibrio en el centro de la columna de antinodos. Conforme aumenta el tamaño, la posición de equilibrio estable se desplaza fuera del eje y cambia de una altura nodal a una antinodal. Nótese también que, para una misma área de estudio, los tamaños accesibles de atrapamiento son más limitados para $NA = 0,40$. Además, las posiciones de equilibrio de las partículas más grandes en 4.11b y 4.12 se encuentran en regiones donde el campo acústico está más curvado, lo cual coincide con posiciones fuera del eje. Debe tomarse en consideración que, conforme NA incrementa, el sistema se desplaza entre dos casos límite: cuando su valor es pequeño, el campo tiende al de una onda plana; cuando se acerca a 1, tiende al campo emitido por una superficie esférica cerrada. Puede concluirse, por tanto, que la curvatura del campo es un factor clave para acceder a posiciones de equilibrio en ciertos rangos de tamaño.

Además, existe atrapamiento fuera del eje tanto a alturas nodales como antinodales. Sin embargo, este fenómeno sólo se observa en las áreas examinadas para los campos más curvos, como $NA = 0,57$ y $NA = 0,74$.

4.2.2 Modos superiores $m = 1, m = 3$

Mientras que el modo fundamental presenta una única columna central de antinodos, los modos de orden superior presentan dos columnas por cada plano antinodal, cuya definición puede consultarse en la figura 3.14. Se observa una tendencia general: en los planos antinodales, de manera análoga al caso $m = 0$, la posición de equilibrio de la partícula $a = 0,120$ inicia en los nodos de estas columnas y se desplaza fuera del eje conforme a aumenta. Además, en los planos nodales las partículas de mayor tamaño, mostradas en verde, quedan atrapadas a la altura de los antinodos.

Los mapas de puntos de equilibrio estable mostrados no aportan información sobre los valores de *rigidez* de la trampa. Este parámetro desempeña un papel clave en la viabilidad experimental del atrapamiento de una partícula y será analizado en la siguiente sección.

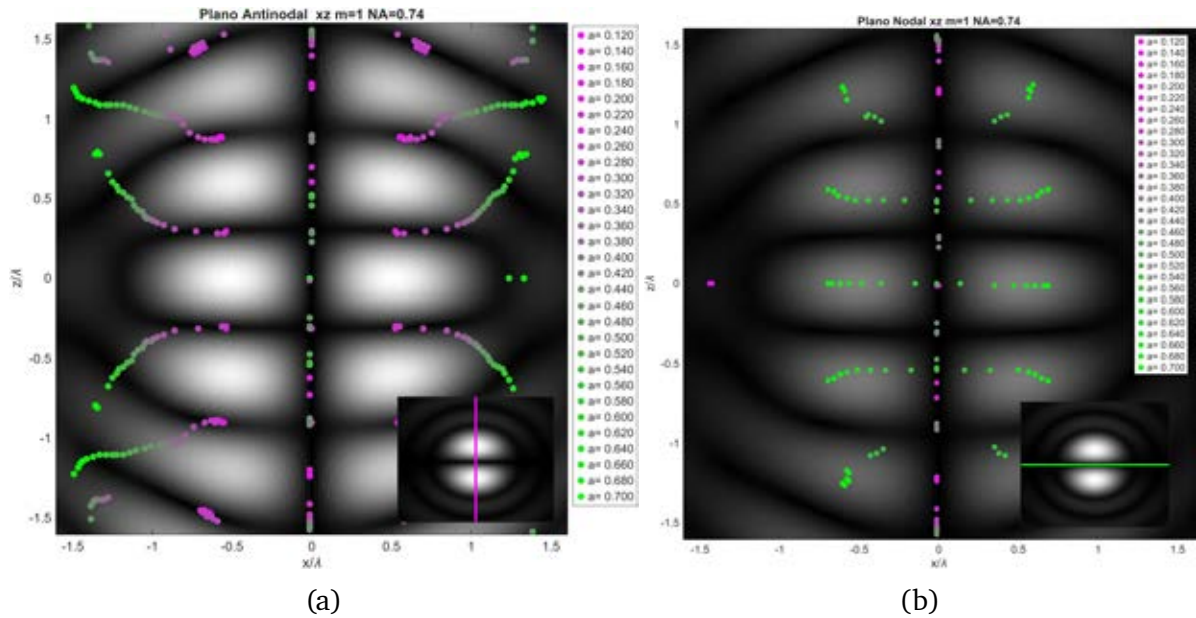


Figura 4.13: Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ . En 4.13a se muestra el plano antinodal y en 4.13b el plano nodal. Recuérdese que, en este último, el campo atenuado del fondo corresponde al plano antinodal y se incluyó únicamente como referencia visual. La presión en el plano nodal es 0.

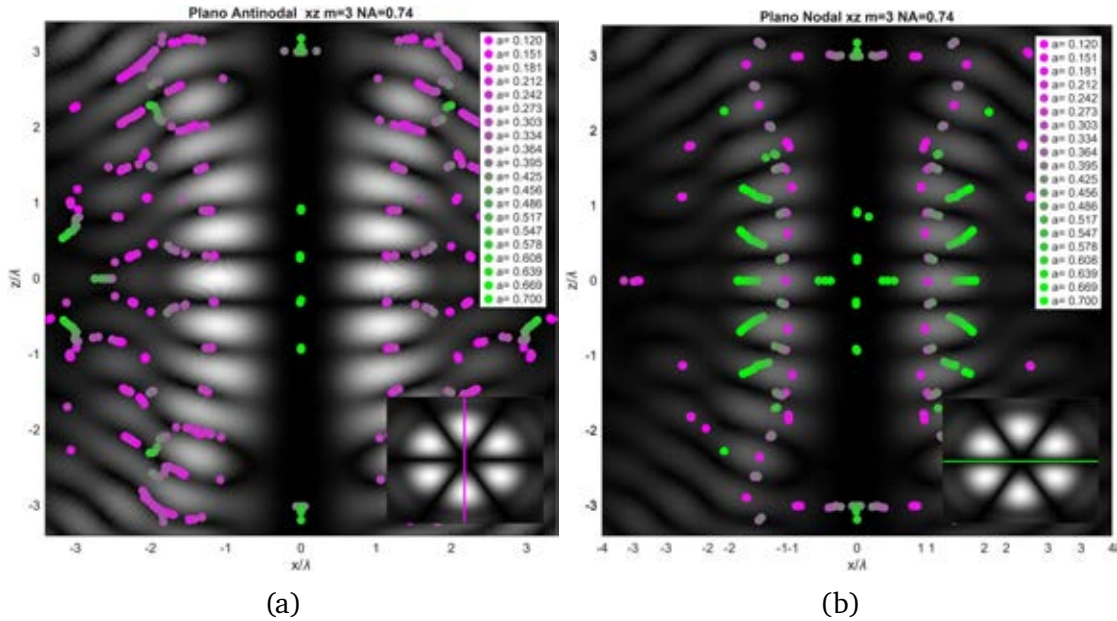


Figura 4.14: Mapa de posiciones de equilibrio estable para distintos radios de partícula. El radio se representa mediante un gradiente de color, donde magenta corresponde a la partícula más pequeña y verde a la más grande. Todos los radios se expresan en unidades de λ . En 4.14a se muestra el plano antinodal y en 4.14b el plano nodal.

4.2.3 Rigidez en ausencia de gravedad y tamaños ideales de atrapamiento

Para analizar la variación de la *rigidez* en los distintos puntos de atrapamiento mostrados en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17, se seleccionaron, para cada radio, aquellos puntos de equilibrio que presentaban el mayor valor de k_z . Con esta selección se graficó la variación de la *rigidez*. En todos los modos y en todos los planos se observaron mínimos y máximos locales de k_z . Los mínimos indican tamaños de partícula cuyo atrapamiento sería comparativamente más difícil, mientras que los máximos corresponden a tamaños para los cuales el atrapamiento sería, en principio, más favorable. Entre el modo fundamental y el tercer modo de orden superior se observan pequeños corrimientos en las posiciones de los máximos y mínimos de k_z , como se aprecia en las figuras 4.15, 4.16 y 4.17. En algunos casos existen varios puntos de equilibrio con valores de *rigidez* muy cercanos entre sí. Por ello, tamaños de partícula próximos pueden aparecer en nodos distintos sin que ello implique un cambio abrupto en el mecanismo de atrapamiento, sino una selección entre posiciones equivalentes o casi equivalentes de acuerdo con el criterio de mayor k_z .

Particularmente, dado que los modos $m = 0$ y $m = 3$ corresponden al mismo levi-

tador acústico, operando en condiciones de resonancia y alimentado con $8V_p$, la comparación entre ambos casos permite aislar el efecto del modo sobre el atrapamiento. Así, si el modo $m = 3$ logra levitar partículas que el modo fundamental no puede atrapar, esta diferencia puede atribuirse a una mayor capacidad de atrapamiento del modo $m = 3$, y no a una variación en las condiciones experimentales.

En los planos nodales, las esferas “magentas”, que en este trabajo corresponden, a grandes rasgos, a tamaños de hasta $a \sim 0,273$, presentan equilibrio estable, pero con valores reducidos de k_z . Esto no impide necesariamente el atrapamiento, pues la componente axial es la que compite directamente con la gravedad; sin embargo, sí sugiere un atrapamiento menos robusto en esa dirección. También se observa que, conforme las esferas simuladas crecen, los valores de k_x y k_y pueden superar a k_z . Aunque valores bajos de k_x y k_y no impiden por sí solos el atrapamiento, un sistema en el que las tres componentes de la rigidez son altas resulta, en general, más favorable desde el punto de vista experimental. Los máximos y mínimos locales de k_z no determinan por sí solos la posibilidad de atrapar una partícula, pero sí brindan información sobre la facilidad experimental de hacerlo.

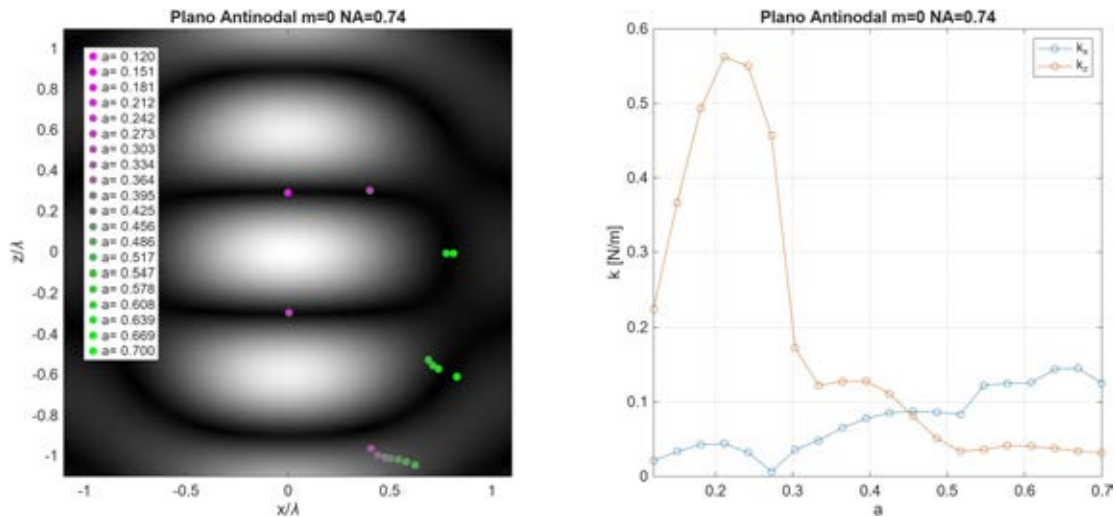


Figura 4.15: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de rigidez. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas y a la derecha el valor de su rigidez. Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,120$, $a = 0,323$ y $a = 0,527$, y máximos locales para $a = 0,233$ y $a = 0,391$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.

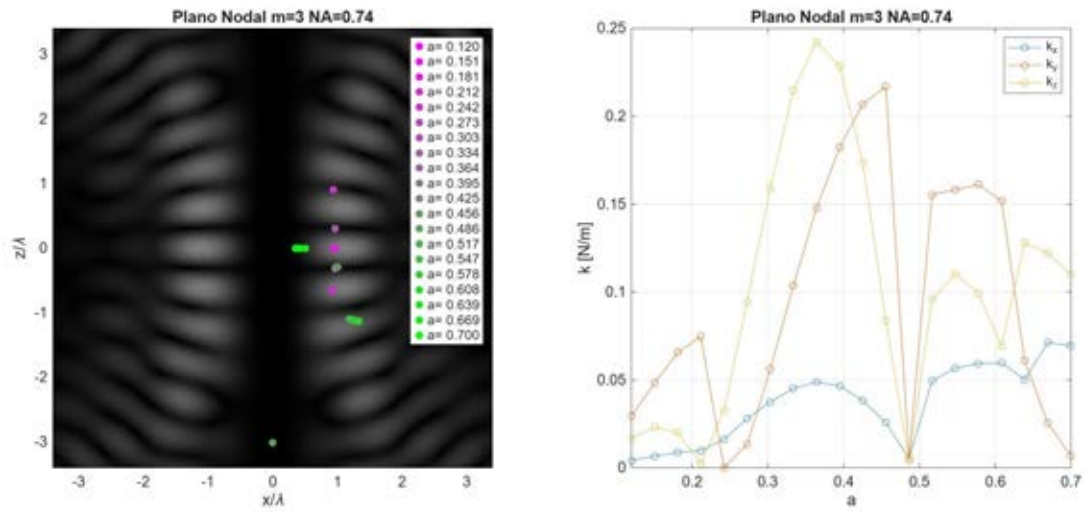


Figura 4.16: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,212$, $a = 0,486$ y $a = 0,608$, y máximos locales para $a = 0,364$, $a = 0,547$ y $a = 0,639$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.

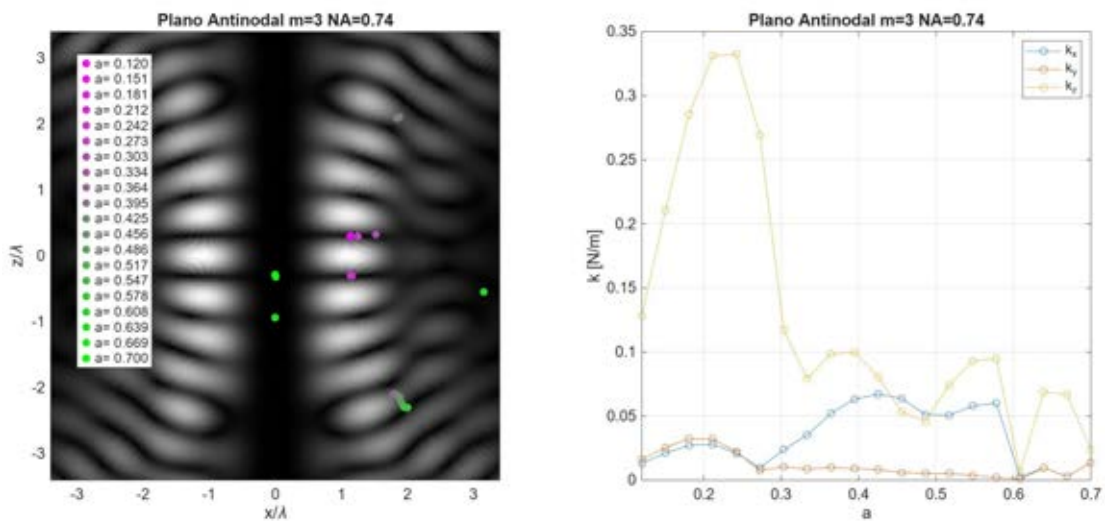


Figura 4.17: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. Nótese cómo se identifican mínimos locales de k_z para $a = 0,334$, $a = 0,486$ y $a = 0,669$, y máximos locales para $a = 0,364$, $a = 0,547$ y $a = 0,639$. Estos últimos corresponden, teóricamente, a tamaños ideales de atrapamiento en este sistema.

4.3 Efectos de resonancia de partícula

En la sección 2.3 se discutió el efecto del tamaño de partícula. En particular, las simulaciones computacionales realizadas con el modelo de GLMT para una onda plana estacionaria indican que, a partir de un radio de $a \sim 0,71$, una partícula de EPS presenta efectos resonantes. Estos tienen un impacto significativo tanto en la posición de atrapamiento como en el valor de la *rigidez*. Con el fin de estudiar el efecto de resonancia, se siguió un procedimiento análogo al de la sección anterior, pero en un intervalo que varía aproximadamente de $a = 0,71$ a $a = 0,81$. Los resultados pueden verse en las figuras 4.18, 4.20 y 4.19.

Las esferas con radios comprendidos aproximadamente entre $0,744\lambda$ y $0,768\lambda$, o bien entre 12,75 mm y 13,17 mm, se encuentran, en términos generales, en la región de mayor valor de k_z . Además, dependiendo del plano considerado, su posición de equilibrio puede localizarse sobre el eje z , en un nodo, o presentar simultáneamente ambas características, como ocurre en algunos de los casos mostrados en las figuras correspondientes.

Los máximos de *rigidez* no ocurren para los mismos radios para todas las gráficas. Una posible explicación es que la forma en que se excita la esfera favorece distintos tipos de modos vibracionales, por lo que el comportamiento resonante varía de un modo de orden superior a otro. Además, para valores mayores que $a \sim 0,71$ se observan cambios abruptos en los valores de *rigidez* y fuerza, lo que sugiere que podría requerirse una discretización más fina para determinar con mayor precisión los picos de *rigidez* o fuerza asociados a frecuencias resonantes.

Para realizar experimentos en el rango de tamaños resonantes de las esferas de EPS, debe considerarse que, conforme aumenta el tamaño de la esfera, también crece la contribución del campo esparcido. En consecuencia, es razonable esperar que las imperfecciones geométricas de la esfera influyan con mayor intensidad en la dinámica del atrapamiento. Entre los posibles efectos asociados se encuentran una disminución de la estabilidad y la aparición de rotación; no obstante, estos aspectos no se estudiaron de manera específica en el presente trabajo.

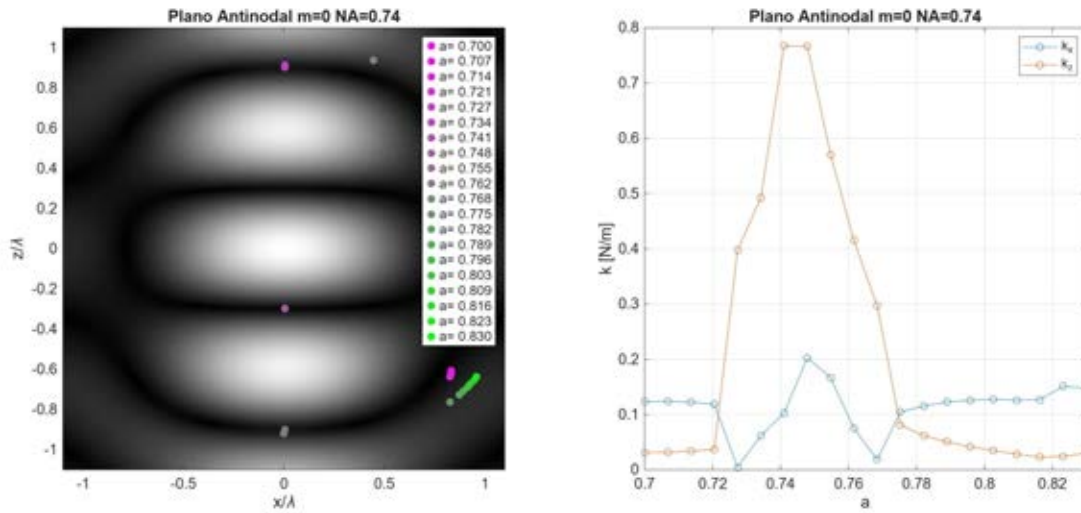


Figura 4.18: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas y a la derecha el valor de su *rigidez*. En el entorno de $a \approx 0,744$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante. También es destacable que esta partícula se localiza en un nodo, al igual que las partículas pequeñas. El levitador está alimentado a $8V_p$.

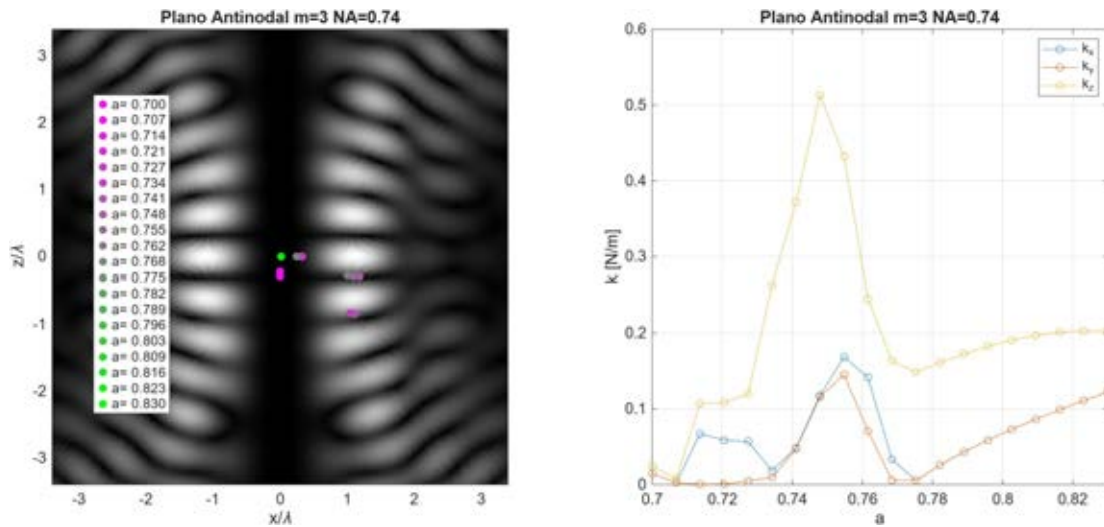


Figura 4.19: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. En el entorno de $a \approx 0,747$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante. Esta partícula se localiza en un nodo, al igual que las partículas pequeñas. El levitador está alimentado a $8V_p$.

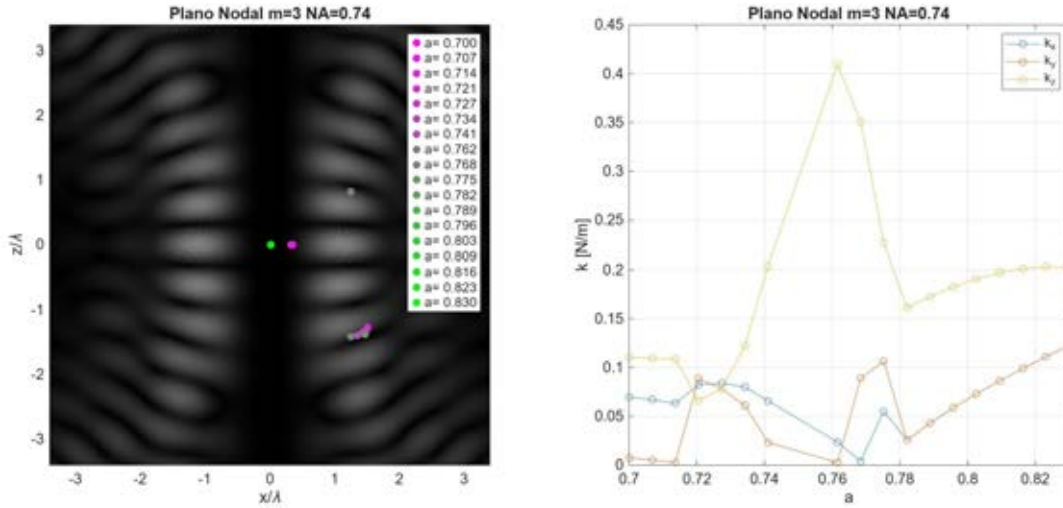


Figura 4.20: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. En $a = 0,768$ se tiene un máximo de k_z cuyo valor excede al máximo de la región no resonante y se localiza en la posición de un nodo, al igual que las partículas pequeñas. Debe recordarse, sin embargo, que el fondo en esta imagen es meramente ilustrativo, pues al ser un plano nodal la presión es 0. Asimismo, en torno a ese valor los componentes k_x y k_y son comparativamente pequeños, por lo que, aunque el atrapamiento no se descarta, cabe esperar una menor robustez lateral que en el caso antinodal. El levitador está alimentado a $8V_p$.

4.4 Simulaciones considerando el peso

El peso de la esfera escala como $\sim a^3$. La fuerza acústica, en cambio, está relacionada con la superficie de la esfera, lo que sugiere una dependencia aproximada de $\sim a^2$, siempre que el nivel de presión acústica se mantenga constante. Esto indica que, para tamaños pequeños, la fuerza acústica puede superar claramente al peso, pero que, conforme a aumenta, el peso terminará por dominar.

En secciones anteriores se realizó un análisis en el que se despreciaba toda fuerza distinta de la acústica. En esta sección se discutirán los mapas de atrapamiento estable de esferas de EPS considerando el peso. Esto limita el rango de tamaños con atrapamiento estable y, al modificar la posición de equilibrio en z , también afecta los valores de k_z , k_x y k_y , especialmente para radios grandes.

El peso solo puede incorporarse a la simulación si las fuerzas acústicas simuladas corresponden a las del levitador experimental. Para ello, se obtuvieron perfiles transversales de presión en los modos $m = 0$ y $m = 3$, a $8V_p$, para longitudes de cavidad resonantes y partículas dentro del rango de tamaños de partícula resonantes como fuera de él. Con estos datos se ajustaron los coeficientes A_n^m para

que el máximo del campo de presión coincidiera con el observado experimentalmente, tal como se vio en la sección 4.1.3.

Lo anterior constituye una primera aproximación que considera parcialmente las múltiples reflexiones internas de la cavidad. Sin embargo, es importante tener presentes sus limitaciones, pues se asume que la forma del campo no se modifica por las reflexiones, sino que sólo se intensifica. Tampoco se consideran cambios en la forma del campo acústico debidos a efectos de difracción asociados a emisores discretos, en lugar de una superficie emisora continua. Estos factores pueden dar lugar a ligeras desviaciones entre el experimento y la teoría.

4.4.1 Rigidez y posiciones de equilibrio

Para incorporar el peso, se repitieron las simulaciones realizadas para los modos $m = 0$ y $m = 3$ a $8V_p$. Sin embargo, al evaluar la estabilidad en el plano xz , se incorporó la fuerza gravitacional antes de determinar los puntos de equilibrio. De esta lista de candidatos se seleccionaron aquellos puntos que también resultaban estables en xy , y se guardaron los valores de las derivadas direccionales. Se recuerda que las propiedades de las esferas de EPS aquí consideradas fueron $c_l = 900 \frac{m}{s}$, $c_t = 630 \frac{m}{s}$ y una densidad de $\rho = 13,8 \frac{kg}{m^3}$.

Los resultados para el modo fundamental se muestran en la figura 4.21 para un intervalo de radios no resonante y en la figura 4.22 para la región resonante. Nótese cómo dejan de existir posiciones de equilibrio estable en $a = 0,456$; sin embargo, en la región de resonancia, a partir de $a = 0,727$, la fuerza acústica vuelve a superar al peso hasta $a = 0,768$.

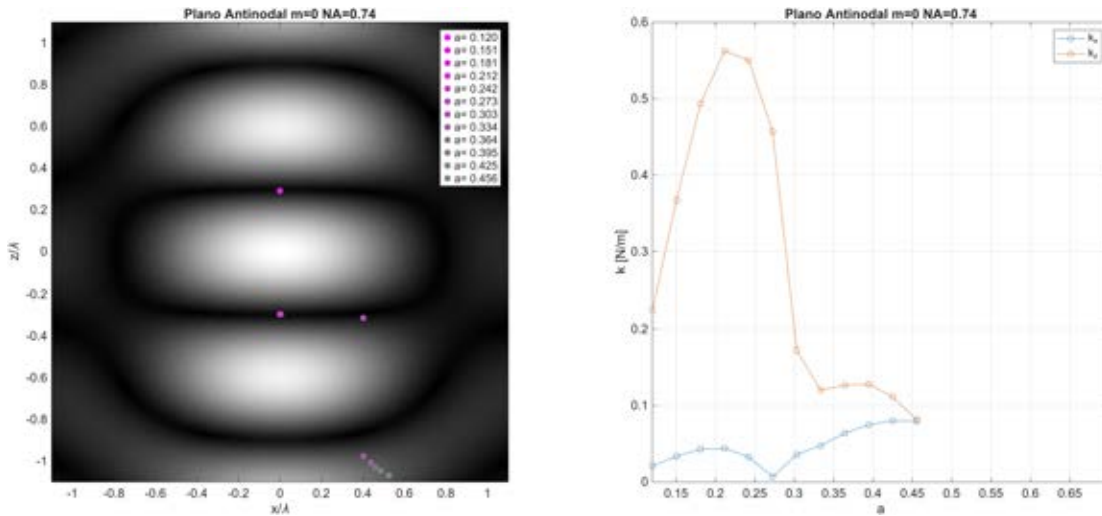


Figura 4.21: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

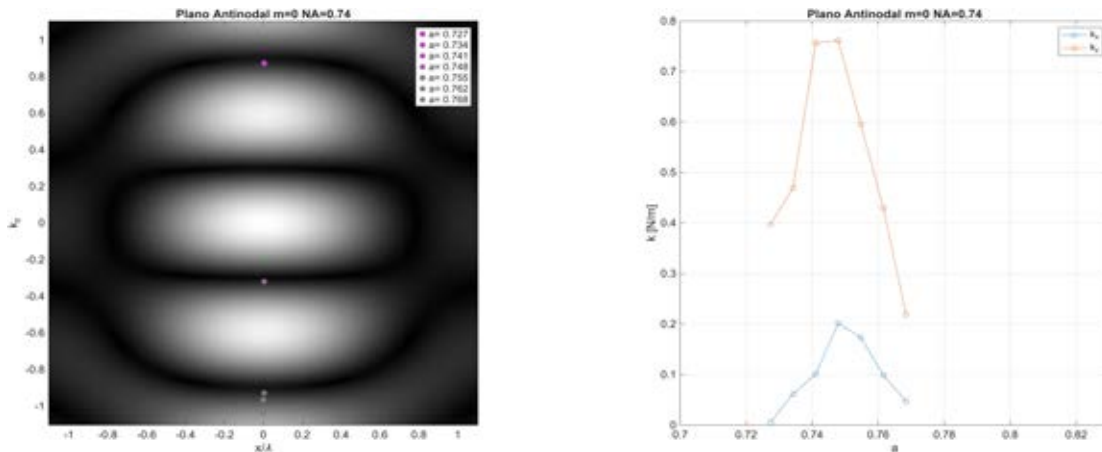


Figura 4.22: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

Para el modo $m = 3$, el conjunto de radios para los cuales existen posiciones de equilibrio estable es significativamente más amplio. En el plano antinodal, por ejemplo, se encuentran partículas atrapables hasta $a = 0,669$ para el mismo voltaje de alimentación. Después, no se hallan posiciones de equilibrio estable en un intervalo intermedio, pero éstas reaparecen a partir de $a = 0,741$ y continúan hasta $a = 0,830$. En particular, la figura 4.23 muestra que, aunque en la región no resonante siguen existiendo posiciones de equilibrio estable para los radios considerados, los valores de *rigidez* disminuyen de manera importante a partir

de $a \sim 0,3$. Esto sugiere que, aun cuando el atrapamiento sigue siendo teóricamente posible, su viabilidad experimental se vuelve más limitada al reducirse la rigidez de la trampa. Especialmente interesante es el caso del plano nodal, en donde hay estabilidad para todos los radios estudiados, desde $a = 0,120$ hasta $a = 0,830$.

En un experimento, el atrapamiento de una partícula depende tanto de la existencia de un punto de equilibrio estable como de la magnitud de la *rigidez*. A diferencia de la estabilidad teórica, que sólo requiere la existencia de un punto de equilibrio estable, en un experimento también resulta deseable un valor alto de *rigidez*, especialmente para los tamaños más grandes. Esto facilita colocar la esfera en una posición estable. En contraste, si el valor de la *rigidez* es pequeño, la partícula puede ser expulsada con mayor facilidad al exterior de la cavidad si no se coloca exactamente en la posición de equilibrio. Por lo tanto, los tamaños ideales de atrapamiento son aquellos para los cuales existe equilibrio y, al mismo tiempo, máximos locales de *rigidez*, especialmente de k_z .

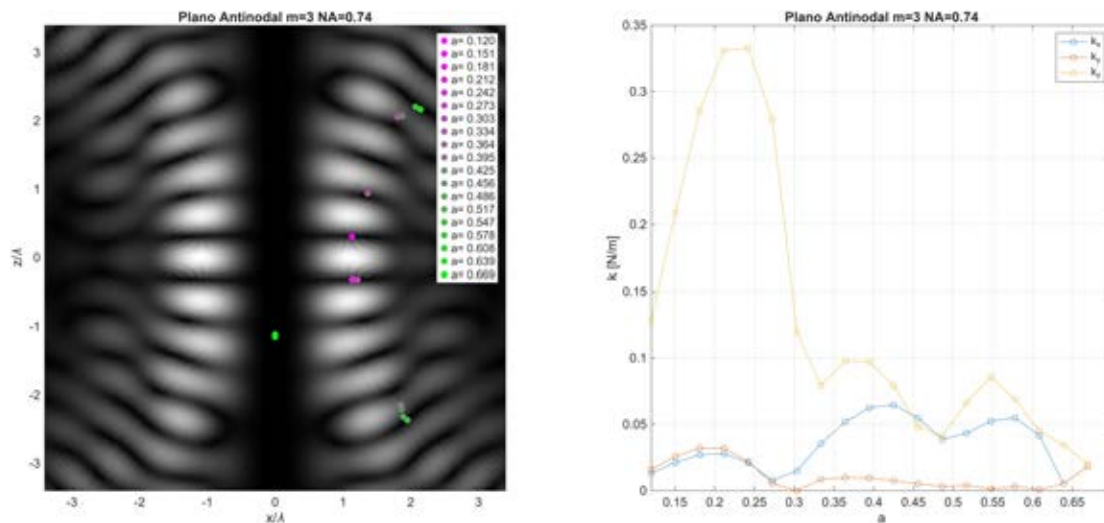


Figura 4.23: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

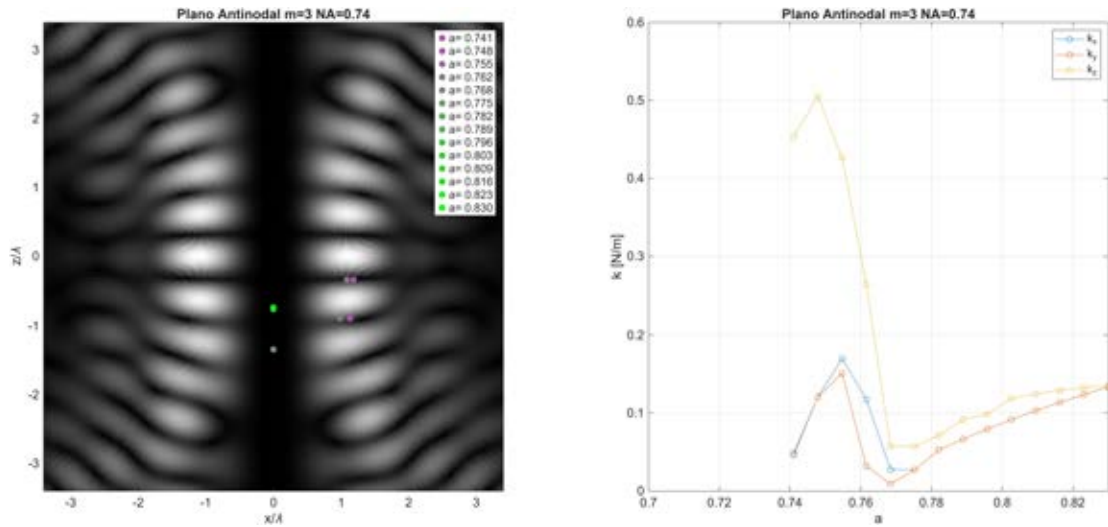


Figura 4.24: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano antinodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

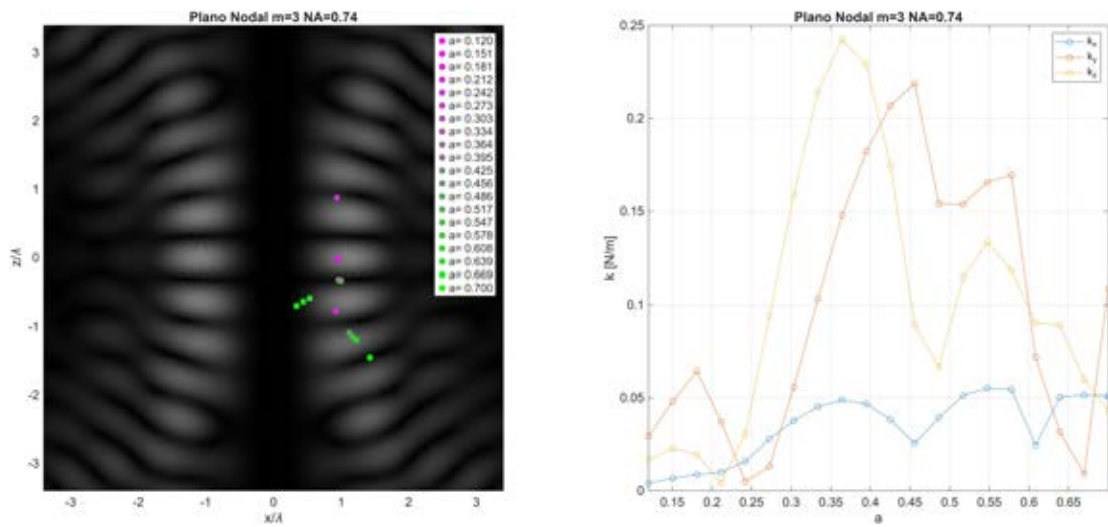


Figura 4.25: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

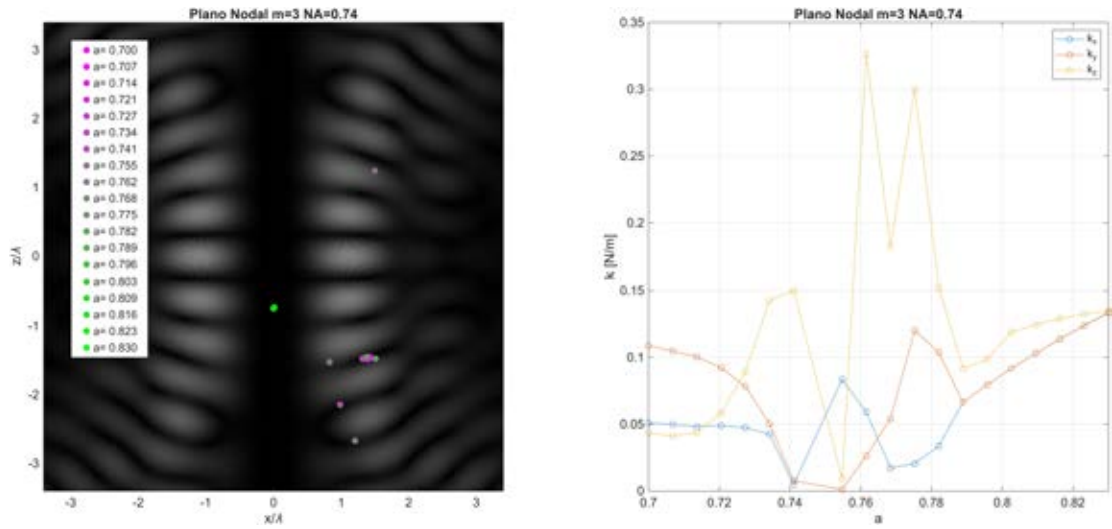


Figura 4.26: Posiciones de equilibrio estable y sus valores de *rigidez*. A la izquierda se observan las posiciones de equilibrio estable de las partículas en el plano nodal y a la derecha el valor de su *rigidez*. El levitador está alimentado a $8V_p$.

5 Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo teórico–experimental del campo acústico y de las fuerzas de radiación en el interior de un levitador capaz de operar en tres modos de orden superior. Dicho levitador fue diseñado y fabricado como parte de esta investigación. En el ámbito computacional, se implementó un programa capaz de calcular las posiciones de equilibrio estable y los valores de *rigidez* para diversos tamaños de partícula en los tres modos estudiados. Las exigencias técnicas de este problema, particularmente el elevado tiempo de cómputo, llevaron a incorporar cálculos paralelizados y optimizaciones en el uso de memoria. Para que estas simulaciones correspondieran con el campo generado por el levitador, se implementó y calibró un micrófono de bajo costo y baja directividad, el cual se empleó para medir los perfiles transversales de los modos $m = 0$ y $m = 3$, ajustar la amplitud de la simulación y comparar la forma del campo simulado con la del campo medido.

Como resultado, se obtuvo una herramienta computacional que proporciona información cuantitativa sobre los distintos modos, incorporando explícitamente la fuerza gravitacional, junto con un protocolo experimental para calibrar dichas simulaciones. Los resultados numéricos mostraron que, al considerar la gravedad, el modo $m = 3$ puede sustentar un rango más amplio de tamaños de partícula que el modo fundamental. Además, se demostró teóricamente que el efecto de resonancia de la partícula, especialmente en el modo fundamental, permite atrapar partículas que fuera de esa región no serían atrapables. En este intervalo resonante, los valores de *rigidez* superan ampliamente los máximos obtenidos para tamaños menores. Por otra parte, se encontró que la deflectometría de schlieren es insensible al campo estacionario de los modos de orden superior bajo ciertas orientaciones, resultado que abre la posibilidad de estudiar por separado otras contribuciones al campo esparcido en trabajos futuros.

En conjunto, este trabajo proporcionó herramientas experimentales y computacionales útiles para el estudio de los modos transversales de orden superior, y dio un paso importante hacia su caracterización cuantitativa. Asimismo, mostró que estos modos no sólo amplían las posibilidades de atrapamiento respecto al modo fundamental, sino que también plantean nuevas preguntas experimentales y teóricas para la levitación acústica.

Referencias bibliográficas

- [1] Gustav Mie. (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. ANNALEN DER PHYSIK, (3), 378–445.
- [2] Maheu, B., Gouesbet, G., & Grehan, G. (1988). A CONCISE PRESENTATION OF THE GENERALIZED FOR ARBITRARY LOCATION OF THE SCATTERER IN AN ARBITRARY INCIDENT PROFILE LORENZ-MIE THEORY. J. Optics (Paris), 19(2), 59–67.
- [3] Lock, J. A., & Gouesbet, G. (2009). Generalized Lorenz-Mie theory and applications. In Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer (Vol. 110, Issue 11, pp. 800–807). <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2008.11.013>
- [4] Karl Bricks, V., & Miiller in Breslau, H. (1933). Über einige Beobachtungen an schwingenden Piezoquarzen und ihrem Schallfeld. Physikalisehes Institut der Teehn', 75–86.
- [5] Baresch, D., Thomas, J.-L., & Marchiano, R. (2013). Three-dimensional acoustic radiation force on an arbitrarily located elastic sphere. The Journal of the Acoustical Society of America, 133(1), 25–36. <https://doi.org/10.1121/1.4770256>
- [6] Peralta, J. C., Shetty, S., Urbina, I. A., Veis, M., Contreras, V., & Veis, P. (2025). Laser-induced breakdown spectroscopy assisted by acoustic levitation (LIBS-AL) for the calibration-free quantification of elements of interest in liquids – Case study of mineral waters. Spectrochimica Acta - Part B Atomic Spectroscopy, 232. <https://doi.org/10.1016/j.sab.2025.107286>
- [7] Hu, D., Wu, Z., Huang, J., & Zhang, G. (2025). A Novel Application of Ultrasound for Removal of Aqueous Microplastics. ACS ES and T Water, 5(9), 5614–5622. <https://doi.org/10.1021/acsestwater.5c00629>
- [8] Marston, P. L., & Robey, J. L. (1988). Acoustic Measurement of the Surface Tension of Levitated Drops. Journal of Colloid and Interface Science, 124, 96–103.

- [9] Marzo, A., Barnes, A., & Drinkwater, B. W. (2017). TinyLev: A multi-emitter single-axis acoustic levitator. *Review of Scientific Instruments*, 88(8). <https://doi.org/10.1063/1.4989995>
- [10] Contreras, V., & Volke-Sepúlveda, K. (2024). Enhanced standing-wave acoustic levitation using high-order transverse modes in phased array ultrasonic cavities. *Ultrasonics*, 138. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2023.107230>
- [11] Thomas, G., Victor, C., Dominique, M., Stéphane, V., Gaillard, T., Contreras, V., Martinez, D., & Viollet, S. (2025). Ultrasound tethering of insects. *Multidisciplinary Biomechanics Journal*, 2, 347–349. <https://doi.org/10.46298/mbj.16144i>
- [12] Bruus, H. (2012). Acoustofluidics 2: Perturbation theory and ultrasound resonance modes. *Lab on a Chip*, 12(1), 20–28. <https://doi.org/10.1039/c1lc20770a>
- [13] Louis Vessot King. (1934). On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 212–240. <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0215>
- [14] Gor'kov, L. P. (2014). On the forces acting on a small particle in an acoustic field in an ideal fluid. In *Selected Papers of Lev P. Gor'kov* (pp. 315-317).
- [15] Pazos Ospina, J. F., Contreras, V., Estrada-Morales, J., Baresch, D., Ealo, J. L., & Volke-Sepúlveda, K. (2022). Particle-Size Effect in Airborne Standing-Wave Acoustic Levitation: Trapping Particles at Pressure Antinodes. *Physical Review Applied*, 18(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.18.034026>
- [16] Blackstock T. David. (2000). *Fundamentals of Physical Acoustics (Primera)*. Wiley-Interscience.
- [17] Volke-Sepúlveda, K., & Jáuregui, R. (2009). All-optical 3D atomic loops generated with Bessel light fields. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 42(8), 085303. <https://doi.org/10.1088/0953-4075/42/8/085303>
- [18] Contreras, V., & Marzo, A. (2021). Adjusting single-axis acoustic levitators in real time using rainbow schlieren deflectometry. *Review of Scientific Instruments*, 92(1). <https://doi.org/10.1063/5.0013347>
- [19] Zamora, K., Reyes, A., Muelas-Hurtado, R. D., & Contreras, V. (2024). Construcción de levitadores acústicos de onda estacionaria empleando arreglos de transductores piezoeléctricos ultrasónicos. <https://www.instructables.com/Acoustic-Levigator/>

- [20] Manorshi. (s.f) Sensor ultrasónico de 10 mm de 40 kHz para medir la distancia <https://www.manorshi.com/es/10mm-40kHz-Ultrasonic-Sensor-for-Measuring-Distance-pd40248866.html>
- [21] Laerence E. Kinsler, Austin R. Frey, & Alan B. Coppens. (2000). FUNDAMENTALS OF ACOUSTICS (Stuart Johnson, Ed.; 4th ed.). Hamilton Press.
- [22] Raffel, M. (2015). Background-oriented schlieren (BOS) techniques. *Experiments in Fluids*, 56(3), 1–17. <https://doi.org/10.1007/s00348-015-1927-5>
- [23] O’Neil, H. T. (1949). Theory of Focusing Radiators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 21(5), 516–526. <https://doi.org/10.1121/1.1906542>
- [24] Bryan Schmidt. (2015). Schlieren Visualization.