Localización de campos de materia y correciones a la ley de Coulomb en un mundo membrana grueso 5D

Presenta:
Refugio Rigel Mora

I.C.F. U.N.A.M

Gabriel Germán V. et. al; A de Sitter tachyon thick braneworld; JCAP 02 (2013) 035

- $$S = \int d^5x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa_5^2}R - \Lambda_5 - V(T)\sqrt{1 + g^{AB}\partial_A T\partial_B T}\right),$$
- Las ecuaciones de Einstein para este modelo están dadas por
$$G_{AB} = -\kappa_5^2\,\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5^2\,T_{AB}^{bulk}$$
- Anzats para la métrica
$$ds^2 = e^{2f(w)}\left[-dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + dw^2\right],$$

- la ecuación del campo

$$\partial_A \left[\frac{\sqrt{-g} V(T) \partial^A T}{\sqrt{1 + (\nabla T)^2}} \right] - \sqrt{-g} \sqrt{1 + (\nabla T)^2} \frac{\partial V(T)}{\partial T} = 0.$$

- la solución para la métrica

$$a(t) = e^{H\,t}, \qquad f(w) = \frac{1}{2} \ln \left[s \,\mathrm{sech} \left(\, H \, (2w + c) \right) \right],$$

- la solución para el campo

$$T(w) \;=\; \pm \sqrt{\frac{-3}{2\,\kappa_5^2\,\Lambda_5}} \; \text{arcsinh} \left[\tanh \left(\frac{H \;(2w + c)}{2} \right) \right]$$

- la forma del potencial es

$$V(T) = \Lambda_5 \,\text{sech}\left(\sqrt{-\frac{2}{3}\kappa_5^2\,\Lambda_5}\;T\right)\sqrt{6\,\text{sech}^2\left(\sqrt{-\frac{2}{3}\kappa_5^2\Lambda_5}\;T\right) - 1}$$

- donde H, c y $s > 0$ son constantes arbitrarias y además

$$s = -\frac{6H^2}{\kappa_5^2\,\Lambda_5},$$

Campos escalares: espín–0, R.R.M. et.al. arxiv:1407.0131v1

- Empezaremos considerando la localización de campos escalares reales sobre la membrana gruesa

$$S = \int d^5x\sqrt{-g}\,\left(-\frac{1}{2}\,g^{MN}\partial_M\Phi\partial_N\Phi - \frac{m_s^2}{2}\Phi^2\right),$$

- usando la métrica conforme . La ecuación de movimiento resultante de la variación de la acción es

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi\right) + e^{-3f}\partial_w\left(e^{3f}\partial_w\Phi\right) = 0.$$

- Entonces, usando la descomposición de KK

$$\Phi(x,z) = \sum_n \phi_n(x)\chi_n(w)e^{-3f/2}$$

- demandamos que Φ_n satisfaga la ecuación masiva de Klein–Gordon en 4D

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\partial_\mu\left(\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\right)-m_n^2\right]\phi_n(x)=0,$$

- luego, podemos obtener la ecuación para los modos escalares de KK $\chi_n(w)$:

$$\left[-\partial_w^2+V_s(w)\right]\chi_n(w)=m_n^2\chi_n(w);$$

- esta es una ecuación tipo Schrödinger con un potencial efectivo dado por

$$V_s=\frac{3H^2}{4}\left[3-7\mathrm{sech}^2(2Hw)\right]+s\,m_s^2\,\mathrm{sech}(2Hw).$$

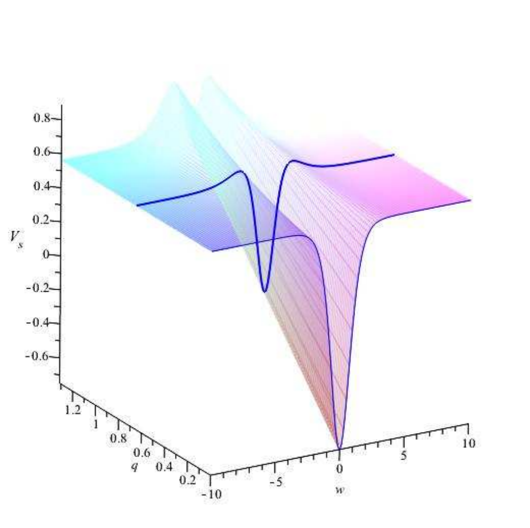

Figura : La figura muestra la forma del potential para diferentes valores de $q = \frac{3m_s^2}{2k_5^2\Lambda_5}$ tomando $H = \frac{1}{2}$.

- tomando $2Hw = \mathrm{arcsech}(z)$ y usando el anzats $\chi(w)_n = z^{\frac{3}{4}} Y(z)_n$, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\frac{d^2Y(z)_n}{dz^2} + \frac{\left(\frac{7}{2}z^2 - \frac{5}{2}\right)}{z(z-1)(z+1)}\frac{dY(z)_n}{dz} + \frac{\left(\frac{3m_s^2}{2k_5^2\Lambda_5}z - \frac{m_n^2}{4H^2}\right)}{z^2(z-1)(z+1)}Y(z)_n = 0$$

- La solución general para la ecuación anterior tiene la forma

$$\begin{aligned} Y(z)_n &= \Bigg[K_1\, z^{\frac{-3H+\sqrt{9H^2-4m_n^2}}{4H}}(1-z)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{HeunG}\left(-1, a_+, b_+, c_+, d_+, \frac{1}{2}, -z\right) \\ &\quad + K_2\, z^{-\frac{3H+\sqrt{9H^2-4m_n^2}}{4H}}(1-z)^{\frac{11}{4}}\,\mathrm{HeunG}\left(-1, a_-, b_-, c_-, d_-, \frac{1}{2}, -z\right))\Bigg] \end{aligned}$$

- $$a_\pm = \frac{2Hk_5^2\Lambda_5 \pm \sqrt{9H^2 - 4m_n^2}}{4Hk_5^2\Lambda_5} + q, \quad b_\pm = \frac{9H \pm \sqrt{9H^2 - 4m_n^2}}{4H}, \quad c_\pm = -\frac{H \pm \sqrt{9H^2 - 4m_n^2}}{4H}$$

- En particular tenemos para el modo cero de KK $m_n = 0$

$$\frac{d^2Y(z)_0}{dz^2}+\frac{\left(\frac{7}{2}z^2-\frac{5}{2}\right)}{z(z-1)(z+1)}\frac{dY(z)_0}{dz}+\frac{q}{z(z-1)(z+1)}Y(z)_0=0,$$

donde $q = \frac{3m_s^2}{2k_5^2\Lambda_5}$

- la solución para el modo cero tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \operatorname{sech}^{\frac{3}{4}}(2Hw)\left[C_1\cosh^{\frac{3}{2}}(2\mathrm{Hw})\mathrm{HeunG}\left(1,q,\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\operatorname{sech}(2Hw)\right)\right.\\ &+ \left. C_2\,\mathrm{HeunG}\left(1,q,0,\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{2},\operatorname{sech}(2Hw)\right)\right].\end{aligned}$$

- para tener una solucion localizada sobre la membrana tenemos que hacer $C_1 = 0$

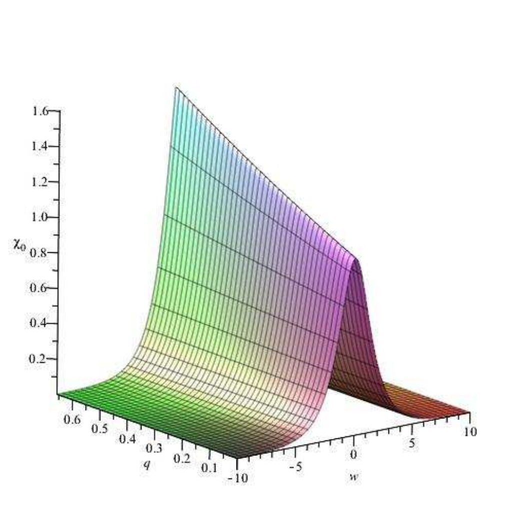

Figura : la figura 3D muestra el modo cero para los difeerentes valores $0 \leq q < \frac{21}{32}$.

Campos vectoriales: espín–1

- La localización de campos vectoriales A.H.A. et. al. EPJ April 2014, 74:2770,

$$S_1 = -\frac{1}{4}\int d^5x\sqrt{-g}\; g^{MN}g^{RS}F_{MR}F_{NS},$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\partial_\nu\left(\sqrt{-\hat{g}}\;\hat{g}^{\nu\rho}\hat{g}^{\mu\lambda}F_{\rho\lambda}\right) + \hat{g}^{\mu\lambda}e^{-f}\partial_w\left(e^f F_{5\lambda}\right) = 0,$$
$$\partial_\mu\left(\sqrt{-\hat{g}}\;\hat{g}^{\mu\nu}F_{\nu 5}\right) = 0.$$

$$A_\mu(x^\lambda, w) = \sum_n a_\mu^{(n)}(x^\lambda)\rho_n(w)e^{-f/2}$$

- la forma del modo cero es

$$\rho_0(w) = \frac{\sqrt{H}(\pi/2)^{\frac{1}{4}}}{2\Gamma(5/2)}\text{sech}^{\frac{1}{4}}(2Hw)$$

- la solución general para la ecuación de Schrödinger es

$$\rho_n(w) = K_1 \mathsf{P}^{\mu}_{\frac{1}{4}}\left[\tanh(2Hw)\right] + k_2 \mathsf{Q}^{\mu}_{\frac{1}{4}}\left[\tanh(2Hw)\right]$$

donde $\mu = i\sigma = i\sqrt{\frac{1}{16} - \frac{m^2}{4H^2}}$, espectro continuo de KK epieza en $m = \frac{H}{2}$

Campos fermiónicos: espín–1/2

- La acción de Dirac para un fermión masivo con espín-$1/2$ en 5D tiene la siguiente forma :

$$S_{\frac{1}{2}} = \int d^5x\sqrt{-g}\left[\bar{\Psi}i\Gamma^M\left(\partial_M + \omega_M\right)\Psi - M\bar{\Psi}F(T)\Psi\right],$$

- donde ω_M es la conexión de espín definida como $\omega_M = \frac{1}{4}\omega_M^{\bar{M}\bar{N}}\Gamma_{\bar{M}}\Gamma_{\bar{N}}$ con

$$\begin{aligned}\omega_M^{\bar{M}\bar{N}} &= \frac{1}{2}e^{N\bar{M}}(\partial_M e_N^{\bar{N}} - \partial_N e_M^{\bar{N}}) - \frac{1}{2}e^{N\bar{N}}(\partial_M e_N^{\bar{M}} - \partial_N e_M^{\bar{M}}) \\ &\quad -\frac{1}{2}e^{P\bar{M}}e^{Q\bar{N}}(\partial_P e_{Q\bar{R}} - \partial_Q e_{P\bar{R}})e_M^{\bar{R}},\end{aligned}$$

- Las componentes distintas de cero para la conexión de espín ω_M calculadas con la métrica de fondo son

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}(\partial_w f)\gamma_\mu\gamma_5 + \hat{\omega}_\mu,$$

- donde $\hat{\omega}_\mu = \frac{1}{4}\bar{\omega}_\mu^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\Gamma_{\bar{\mu}}\Gamma_{\bar{\nu}}$ es la conexión de espín derivada de la métrica de fondo $\hat{g}_{\mu\nu}(x) = \hat{e}_\mu^{\;\bar{\mu}}(x)\hat{e}_\nu^{\;\bar{\nu}}(x)\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$.

$$\Big[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu) + i\gamma^5\left(\partial_w + 2\partial_w f\right) - \mathrm{e}^f MF(T)\Big]\,\Psi = 0,$$

- donde $i\gamma^\mu(\partial_\mu + \hat{\omega}_\mu)$ es el operador de Dirac sobre la 3–membrana.

$$\Psi = \mathrm{e}^{-2A}\left(\sum_n \psi_{Ln}(x)L_n(w) + \sum_n \psi_{Rn}(x)R_n(w)\right),$$

- donde $\psi_{Ln}(x)$ y $\psi_{Rn}(x)$ son las componentes izquierdas y derechas del campo de Dirac en 4D, respectivamente,
- supondremos además que $\psi_{Ln}(x)$ y $\psi_{Rn}(x)$ satisfacen las ecuaciones de Dirac en 4D. Entonces, los modos de KK $L_n(w)$ y $R_n(w)$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones acopladas:

$$\begin{aligned} \left[\partial_w + \mathsf{e}^f M F(T)\right] L_n(w) &= m_n R_n(w), \\ \left[\partial_w - \mathsf{e}^f M F(T)\right] R_n(w) &= -m_n L_n(w). \end{aligned}$$

- Las podemos recombiar para obtener

$$\begin{aligned} \big(-\partial_w^2 + V_L(w)\big) L_n &= m_{L_n}^2 L_n, \\ \big(-\partial_w^2 + V_R(w)\big) R_n &= m_{R_n}^2 R_n, \end{aligned}$$

- la forma de los potenciales esta dada por

$$
\begin{aligned}
V_L(w) &= \mathrm{e}^{2f} M^2 F^2(T) - \mathrm{e}^{f} f' M F(T) - \mathrm{e}^{f} M \partial_w F(T), \\
V_R(w) &= \mathrm{e}^{2f} M^2 F^2(T) + \mathrm{e}^{f} f' M F(T) + \mathrm{e}^{f} M \partial_w F(T).
\end{aligned}
$$

- fijando $m_n = 0$, se desacoplan las ecuaciones anteriores y calculamos facimente los modos cero L_0 y R_0

$$
\begin{aligned}
L_0 &\propto e^{-M \int e^{f} F dz}, \\
R_0 &\propto e^{M \int e^{f} F dz}.
\end{aligned}
$$

- considerando $F(T) = \frac{\text{sinh}(2\sqrt{\frac{-2k_5^2\Lambda_5}{3}}T)}{2\sqrt{1-\text{sinh}^2(\sqrt{\frac{-2k_5^2\Lambda_5}{3}}T)}}$ tenemos que
- los potenciales izquierdo y derecho tienen la forma siguiente

$$\begin{aligned} V_L(w) &= sM(M - (\sqrt{\frac{-k_5^2\Lambda_5}{6}} + M)sech(Hw)^2), \\ V_R(w) &= sM(M + (\sqrt{\frac{-k_5^2\Lambda_5}{6}} + M)sech(Hw)^2). \end{aligned}$$

donde la forma de los modos de KK para las quiralidades izquierda y derecha se ven como

$$\begin{aligned} L_0 &\propto \text{sech}^{\frac{M\sqrt{s}}{H}}(Hz), \\ R_0 &\propto \cosh^{\frac{M\sqrt{s}}{H}}(Hz). \end{aligned}$$

- la solución general para los modos izquierdos y derechos de KK esta dada por

$$L_n = C_1 \mathsf{P}_{\nu}^{i\mu}(\tanh(Hz)) + C_2 \mathsf{Q}_{\nu}^{i\mu}(\tanh(Hz))$$

$$R_n = B_1 \mathsf{P}_{-\nu}^{i\mu}(\tanh(Hz)) + B_2 \mathsf{Q}_{-\nu}^{i\mu}(\tanh(Hz))$$

donde C_2, C_2, B_1, B_2 son constantes arbitrarias, $\mu = \frac{\sqrt{m^2 - sM^2}}{H}$ y $\nu = \frac{\sqrt{s}M}{H}$, espectro continuo de KK empieza en $m = \sqrt{s}M$

- En electrodinamica cuantica en 4D el potencial creado por la interaccion de Yukawa entre dos fermiones y un campo de norma esta dado por $L_I = -e\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}A_{\mu}(x)\psi(x)$.
- Considerando que los campos vectoriales masivos se propagan libremente sobre la quinta dimensión y por simplicidad asoció el fermion 4D con quiralidad izquierda con el modo cero del fermion 5D, entonces la interacción entre los fermiones y el boson de norma esta dada por

$$S_I = \int d^4xdz\,\sqrt{-g}\,(-e_5)\bar{\Psi}(x,w)\Gamma^M A_M(x,w)\Psi(x,w),$$

donde e_5 es una constante de acoplamiento en 5D.

- Después de una reducción dimensional todos los modos vectoriales de kk interaccionaran con el modo cero izquierdo fermionico que esta localizado sobre la membrana:

$$S_I \supset \sum_n \int d^4x dz \sqrt{-\hat{g}}\, \mathrm{e}^{5f} (-e_5) \mathrm{e}^{-2f} \bar{\psi}_0(x) L_0(w) \mathrm{e}^{-f} \gamma^\mu a_\mu^{(n)}(x) \mathrm{e}^{-f/2} \rho_n(w) \mathrm{e}^{-2f} \psi_0(x) L_0(w)$$
$$= (-e_5) \sum_n \int dz\, \mathrm{e}^{-f/2}\, \rho_n(w) L_0^2(w) \int d^4x \sqrt{-\hat{g}}\, \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(n)}(x) \psi_0(x)$$
$$= \int d^4x\, \sqrt{-\hat{g}} \left\{ - e \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(0)}(x) \psi_0(x) - \sum_n\, \epsilon_n \bar{\psi}_0(x) \gamma^\mu a_\mu^{(n)}(x) \psi_0(x) \right\},$$

donde,

$$e = e_5 \int dz\, \mathrm{e}^{-f/2}\, \rho_0(w) L_0^2(w) = e_5 \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/4} \left(k_5^2 \Lambda_5\right)^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \int dz\, L_0^2(w) = e_5 \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/4} \left(k_5^2 \Lambda_5\right)^{1/4}}{2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

es la carga 4D usual atrapada sobre la membrana,

- las ϵ_n's son constantes efectivas 4D

$$\epsilon_n \equiv e_5 \int dz\ \mathrm{e}^{-f/2}\ \rho_n(w) L_0^2(w) = e \frac{2\sqrt{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{(k\Lambda_5)^{\,1/4}} \int dz\ \mathrm{e}^{-f/2}\ \rho_n(w) L_0^2(w),$$

- En el limite no relativista el potencial de Coulomb y sus correcciones entre dos fermiones cargados esta determinado por el intercambio de fotones de kk y tiene la forma

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{e^2}{4\pi r} + \int_{m_0}^{\infty} dm \frac{\epsilon_n^2}{4\pi r} \mathrm{e}^{-mr} \\ &= \frac{e^2}{4\pi r}\left[1 + e_5^2 \int_{m_0}^{\infty} dm\ \mathrm{e}^{-mr} \left(\int dz\ \mathrm{e}^{-f(w)/2}\ \rho_n(w) L_0^2(w)\right)^2\right], \end{aligned}$$

donde $m_0 = H/2$ es el primer modo masivo exitado.

- Cálculo analitico de $V(r)$, calculando primeramente las constantes de acoplamiento efectivas 4D ϵ_n considerando $F(w) = \frac{\text{sinh}(2\sqrt{\frac{-2k_5^2\Lambda_5}{3}}T)}{2\sqrt{1-\text{sinh}^2(\sqrt{\frac{-2k_5^2\Lambda_5}{3}}T)}}$ para esta elección de $F(T)$ el modo cero fermionico con quiralidad izquierda de KK normalizado es

$$L_0(w) = \sqrt{\frac{H\alpha}{4^\alpha \beta}}\text{sech}(Hz)^\alpha, \quad \alpha > 0$$

donde $\alpha = \frac{\sqrt{6}M}{\sqrt{-k^2{}_5\Lambda_5}}$ y $\beta = {}_2\text{F1}(\alpha, 2\alpha, 1+\alpha, -1)$

Sustituyendo el factor de deformación $f(w)$ y ρ_n en la expresión para ϵ_n tenemos

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &= e\frac{2^{\frac{7}{4}-2\alpha}(3)^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{H}M}{(\pi^{\frac{1}{4}})\,(-k_5^2\Lambda_5)^{\,1/2}\beta}\int dz\ \text{sech}(Hz)^{-\frac{1}{4}+2\alpha}\times \\
&\times\left[\sum_{\pm}C_{\pm}(\beta)P^{\pm i\beta}_{1/4}\left(\text{tanh}(2Hw)\right)\right] \\
\epsilon_n &= e\frac{2^{\frac{7}{4}-2\alpha}(3)^{1/2}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\pi^{1/4}M\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{H}\,(-k_5^2\Lambda_5)^{\,1/2}\beta\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{8}\right)}\times \\
&\times\left[\sum_{\pm}C_{\pm}(\sigma)P^{\pm i\sigma}_{1/4}\left(0\right)\right]
\end{aligned}$$

donde hemos utlizado la siguiente definición para la delta de Dirac correspondiente al limite de membranas delgadas $H\to\infty$:

$$\delta(w)=\lim_{H\to\infty}\frac{H\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{8}\right)}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)}\text{sech}(x)^{-\frac{1}{4}+2\alpha},\qquad \alpha>\frac{1}{8},$$

Sustituyendo las constantes de acoplamiento 4D ϵ_n en el potencial de Coulomb tenemos

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{e^2}{4\pi r}\left[1 - \frac{3\times 2^{\frac{7}{2}-4\alpha}\pi^{\frac{1}{2}}}{Hk_5^2\Lambda_5}\left(\frac{M\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)}{\beta\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{8}\right)}\right)^2\int_{m_0}^{\infty} dm\, \mathrm{e}^{-mr}\left|\sum_{\pm} C_{\pm}(\sigma)P_{1/4}^{\pm i\sigma}(0)\right|^2\right] \\ &= \frac{e^2}{4\pi r}\left[1 - \frac{3\times 2^{3-4\alpha}\pi^{\frac{1}{2}}}{Hk_5^2\Lambda_5}\left(\frac{M\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{8}\right)}{\beta\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{8}\right)}\right)^2\int_{m_0}^{\infty} dm\, \mathrm{e}^{-mr}\left|\frac{\Gamma(1+i\sigma)}{\Gamma\left(\frac{3}{8}-\frac{i\sigma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{8}-\frac{i\sigma}{2}\right)}\right|^2\right]. \end{aligned}$$

donde hemos tomado en cuenta que $|C_{\pm}(\sigma)| = \frac{|\Gamma(1+i\sigma)|}{\sqrt{2\pi}}$, y tambien

$$P_{\nu}^{\mu}(0) = \frac{2^{\mu}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}.$$

Aproximando la integral considerando solo una contribución de los primeros modos masivos de KK al rededor de $\sigma = 0$, tenemos

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r}\left[1 + \Delta V\right],$$

donde la corrreción ΔV es

$$\Delta V = -\frac{3 \times 2^{3-4\alpha}\pi^{\frac{1}{2}}}{k_5^2 \Lambda_5}\left(\frac{M\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{8}\right)}{\beta\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{8}\right)}\right)^2 \frac{e^{-Hr/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)^2 \Gamma\left(\frac{9}{8}\right)^2 Hr}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Hr}\right)\right).$$

Conclusiones

- Lalocalización de campos escalares espin-0 sobre la membrana depende de la constante de acoplamiento en 5D
- El modelo permite localizar el modo cero de campos vectoriales espin-1 en constraste con varios modelos de mundos membrana gruesos que no lo hacen.
- La localización de campos fermionicos de espin-1/2 nos permite darnos una idea de las correcciones a la ley de coulomb para este modelo.