Capítulo 3

Tipografía de fórmulas matemáticas

La redundancia inevitable de la lengua hablada y escrita se reduce a un mínimo en las fórmulas matemáticas. Simples erratas o ambigüedades pueden no ser corregibles por el contexto entendido del lector. Compenetrarse con las reglas de tipografía matemática es de utilidad para el autor, pues le sugerirá escribir sus fórmulas de manera que sean lo más sencillas de interpretar. Para el tipógrafo, las pautas avaladas por el uso son las que debe seguir al producir la matriz del escrito. La tipografía matemática, más aún, tiene un encanto propio. Por ese solo hecho, esperamos, será placentero leer este capítulo.

3.1 Los tipos y las fuentes

3.1.1 Medidas en tipografía

Los tipógrafos usan, por tradición, medidas que no son métricas para designar el tamaño de sus caracteres. Estas a menudo aparecen en combinación con especificaciones de *página* métricas o inglesas. En realidad, en tipografía de suficiente calidad como para justificar ambos márgenes, el *ancho* de los caracteres no es fijo. Es útil pensar en las líneas de una página como compuestos de *letras* y de *goma*. La goma tiende a expanderse y ajustar el espaciamiento entre las letras, de manera que el texto sea agradable a la vista.

Nuestra unidad de referencia en caracteres de imprenta es la letra de *diez puntos*, como la que se lee aquí.

Nuestra unidad de referencia para caracteres en máquina de escribir es la letra de diez caracteres por pulgada, como la que se lee aquí. Corresponde a las esferas IBM de la serie 10.

El tamaño menor con el que comúnmente alterna el texto principal es el de *ocho puntos*, para cornisas de página, notas al pie y subíndices o superíndices

En muchas máquinas de esfera existe la posibilidad de escribir con esferas de doce caracteres por pulgada. Es útil guardar este tamaño para notas al pie y subíndices o superíndices.

En sistemas de tipografía automatizados (y en imprentas tradicionales) es común manejar los siguientes *tipos*:

40 puntos en títulos de libros,

18 puntos en títulos de capítulos,

12 puntos en títulos de secciones.

El texto común se escribe en letra de diez puntos. Como tipos pequeños se tienen:

9 puntos para el texto de ejemplos y ejercicios,

8 puntos para notas al pie e índices,

7 puntos (no todo debe tener uso ¿verdad?),

6 puntos para índices de índices o trozos de texto en tablas y

5 puntos que son demasiado pequeños para leer.

Una vez que hemos visto los tipos de cada medida (que pueden haber sido reducidos al fotocopiar la matriz de este manual) y cuyo objeto es dar un tamaño intuitivo a las letras usadas, agregaremos que el ***punto (pt)*** es:

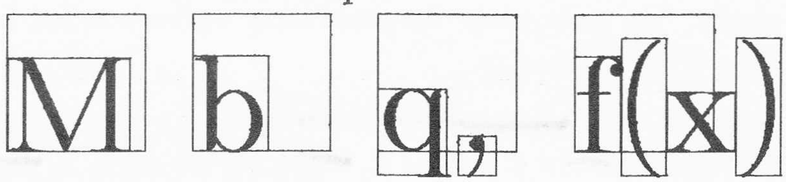
$$1 \text{ pt} \doteq 0.035 \text{ cm}, \qquad 1 \text{ cm} \doteq 28.2 \text{ pt}.$$

Cajas de diez puntos son: □□□□□□□□□□.

Existen otras medidas: la ***pica*** = 12 pt = □,
el ***punto didot*** = 0.038 cm, 10 didots = □
la ***pulgada*** = 2.54 cm = □.

Hay una medida peculiar a la tipografía: el ***cuadratín***. Esto es un □ cuando escribimos en letra de diez puntos, **pero disminuye a □ cuando escribimos en** ocho, y se vuelve □ cuando reducimos a seis.

La altura de los caracteres tipográficos —su *línea*— se distribuye en atención a los *ascendientes* y *descendientes* de las letras. Comparemos las cajas que encierran a las letras con la forma en que éstas se distribuyen dentro de un cuadrado □ del tamaño nominal del tipo:



Los ascendientes y descendientes normalmente ocupan la quinta parte cada uno del puntaje nominal del carácter. La *base* de un carácter es el punto situado sobre la línea que se escribe (la base común a todas las letras sin contar las que tienen descendientes), a la izquierda del carácter. La distancia vertical normal entre líneas en un texto de diez puntos es de doce puntos.

En texto de diez puntos como éste caben aproximadamente 76 letras en un renglón. El número exacto se determina pidiendo que el texto esté justificado a la derecha, a la izquierda, y que, en caso de tener que cortar una palabra, el silabeo sea adecuado.

En máquina de escribir de diez caracteres por pulgada caben entre 50 y 60 caracteres, de acuerdo a los tamaños de los márgenes.

El número de renglones por página es alrededor de 42 y depende de la división por párrafos para introducir ***goma*** vertical entre los renglones, para producir un efecto óptimo.

A renglón seguido tendremos 50 renglones por página; a renglón y medio 36 y a doble renglón, 25.

3.1.2 El empleo de fuentes

Los tipos de imprenta vienen en varias *fuentes* o "estilos". Algunos tienen una función específica, mientras que otros simplemente embellecen el texto dándole variedad a los títulos de secciones. Dentro del texto, sin embargo, tenemos que atenernos a ciertas reglas en cuanto al uso de las fuentes, mismo que ha sido marcado por la costumbre.

3.1.2.1 Letras romanas

- Las letras romanas forman la fuente tipográfica básica del texto. Reciben varios nombres según su forma, que difiere de una imprenta a otra. En este manual estamos usando TEX como lenguaje de procesamiento de texto, que usa el designador *Computer modern roman* de diez puntos para la letra que el lector ve ahora. En **`máquinas de escribir`** corresponden a las esferas IBM **`courier`** 10 o IBM **`courier 12`**.
- En texto matemático, algunas funciones aparecen escritas siempre en letras romanas: escribimos $\cos\vartheta$ y *no* $cos\,\vartheta$, $\log_{10} x$ y *no* $log_{10}\,x$, $\lim_{\epsilon\to 0} e^{\epsilon} = 1$ y *no* $lim_{\epsilon\to 0}\mathrm{e}^{\epsilon} = 1$. Principalmente se trata de *(a)* las funciones trigonométricas, hiperbólicas y sus inversas, *(b)* las funciones logaritmo y exponencial, *(c)* evaluadores como límite, supremo, determinante, traza, argumento, parte real e imaginaria, etc. En el apéndice B damos una lista de funciones y sus notaciones aceptables.
- Los índices o superíndices que son abreviaturas, como $v^{\mathrm{máx}}$, $T_{\mathrm{crítica}}$, $\Psi_{\mathrm{Schrödinger}}$, etcétera. En estos casos, si el cuerpo del texto es de diez puntos, las letras del índice serán de seis puntos. En **`máquina de escribir`** estos sólo podrán ser de **`12 caracteres por pulgada`** (cuidando que el espaciamiento de los caracteres esté acorde con el tamaño usado y, de ser posible, el espaciamiento entre renglones).

3.1.2.2 *Letras cursivas*

- En el texto, una palabra escrita en cursivas (o *itálicas*) equivale a una palabra entrecomillada (aunque se usen independientente comillas "X" o «X»para citas). En un manuscrito en **`máquina de escribir`** las palabras que deberán ser puestas en cursivas se **`subrayan`** o se escriben en esferas IBM **`script`**.

- Se escriben en cursivas las palabras extranjeras, en particular las locuciones latinas (excepto "etcétera", la cual es la versión castellana de *et cætera*). En el apéndice D presentamos una lista de locuciones latinas comunes.

- En texto matemático, *todas* las variables se escriben en cursivas: escribimos $ax^2+bx+c=0$ y *no* $\mathrm{ax}^2+\mathrm{bx}+\mathrm{c}=0$, la función de Bessel es $J_n(x)$ y *no* $\mathrm{J}_n(x)$, etc. En fuente romana, sin embargo, aparecen los *números* y los *paréntesis*. Así, tenemos x^2 y *no* x^{2}, $f(x)$ y *no* *f(x)*. Existen esferas IBM `script 10` y `script 12` que se pueden usar para literales normales e índices.

3.1.2.3 Letras negritas

- Las letras negritas se usan para títulos de subsecciones; en un texto funcionan para dar **énfasis** a las palabras. Deben ser usadas con mesura pues **ennegrecen la página si se usan para párrafos enteros**. Escrito a mano, marcamos los caracteres que deben ir en negritas por una onda. En **`máquina de escribir`**, las letras por aparecer en negritas se **subrayan** con tildes.

- En matemáticas, las negritas se suelen usar para denotar entes con rango en algo más que la recta real o el plano complejo. Son principalmente vectores $\mathbf{v}=\|v_m\|_{m=1}^N$ y matrices $\mathbf{M}=\|M_{ij}\|_{i,j=1}^N$ los que aparecen en esta fuente. Esta convención se ha establecido, probablemente, por presión de los editores y tipógrafos, que encontraban difícil el uso de colocar *flechitas* sobre letras $\vec{v}$ (que a menudo requieren de separación de líneas del texto), y feo el uso de góticas ($\mathfrak{v}$), como lo favorecían los autores alemanes de la vieja escuela.

3.1.2.4 *Letras bastardillas*

El uso de letras bastardillas se reduce al texto; *no* incluye a los símbolos matemáticos. Se emplea para *enfatizar* palabras, usarlas en sentido figurado o separar párrafos del texto de manera visible para enunciar una definición o un teorema.

Existen multitud de fuentes para resaltar títulos de secciones de estilo más o menos moderno (en este manual utilizamos únicamente letras romanas de varios tamaños). Podemos, por ejemplo, dirigir prólogos en letras inglesas, distinguir elementos de la portada con letras **sans serif**, invocar citas antiguas o hablar de Cosas Sagradas con varias fuentes góticas. Fuentes que son muy diferentes a la romana son inadecuadas para escribir textos científicos.

3.1.2.5 Fuentes para matemáticas

Al escribir símbolos matemáticos, a menudo la misma letra se usa para la descripción de varios objetos matemáticos relacionados. Aquí, el editor tendrá que encontrar la fuente más adecuada dentro de su caja limitada de fuentes.

- Letras inglesas:
  $\mathcal{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$.
- Letras dobles:[1]
  $\mathbb{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$.
- Letras alemanas:
  a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y .
- Letras góticas minúsculas:
  $\mathfrak{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,l\,m\,n\,o\,p\,q\,r\,s\,t\,u\,v\,w\,x\,y\,z}$.
- Letras góticas mayúsculas:
  $\mathfrak{A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q\,R\,S\,T\,U\,V\,W\,X\,Y\,Z}$.

Es necesario prestar mucha atención a las fuentes usadas, especialmente aquellas que pueden confundirse con facilidad pero que significan cosas diferentes. Algunos ejemplos son:

unión $\cup$ *vs.* U, u, U, letras 'u',

cero 0 *vs.* O, o, letras 'o',

conjunto vacío $\emptyset$ *vs.* ϕ, φ, dos formas de la 'fi',

número uno 1 *vs.* l, ℓ, l, letras 'ele',

'elemento de' $\in$ *vs.* ϵ letra 'épsilon',

suma, producto $\sum, \prod$ *vs.* Σ, Π letras sigma, pi,

---

1 *Blackboard boldface.*

- \- guión de concatenación en texto,
- – guión de continuación entre números,
- − signo aritmético de sustracción,
- — guión largo indicando frase subordinada.

Existen muchos símbolos especiales de uso común en matemáticas. La American Mathematical Society tiene una lista de 180 símbolos para sus revistas que están numeradas para uso de los editores y tipógrafos. Para procesadores de texto automatizados, el American Standard Code for Information Interchange tiene una lista de 128 códigos ("ASCII") que incluyen símbolos y señales para el manejo de terminales (como «sonar la campanita», etc.). El Stanford Artificial Intelligence Laboratory tiene su propio código ("SUAI") que amplía el juego de caracteres a costa de las señales para la terminal. TEX tiene sus propios juegos de fuentes y caracteres. Mediante la instrucción `\char'` tiene acceso a 144 símbolos de cada fuente, además de sus combinaciones que tienen definición de **macros**, 18 operadores binarios, 29 relaciones binarias, 15 delimitadores, 13 operadores de estilo desplegado y 26 símbolos varios. Recordemos además las letras griegas[2] y la ℵ (*álef*) hebrea. Para **máquinas de escribir** existen las esferas `SYMBOL-10`,[3] `PRX-11-G`, `PRX-11-T` y `PRX-11-M` que guardan un total de 352 símbolos especiales, incluyendo letras griegas y números pequeños para exponentes. En el apéndice D presentamos el total de estos símbolos.

3.1.3 Empleo de diacríticos

Los idiomas que emplean el alfabeto latino utilizan también diacríticos. En castellano tenemos el acento ortográfico, que puede aparecer sobre cualquiera de las cinco vocales, la tilde de la *ñ* y la diérisis en *güe* y *güi*. Otros idiomas usan diacríticos diferentes que hemos resumido en el apéndice E.

En matemáticas, los diacríticos son marcas que se colocan arriba (o, en pocas ocasiones, abajo) del carácter. No todos los diacríticos ortográficos se usan y hay otros que no son ortográficos.[4] Los más comunes son

---

[2] Véase la tabla en el apéndice B.

[3] Existen también las esferas de la serie de **12 caracteres por pulgada**, pero suponemos que éstos se usan solamente para índices.

[4] El simple *acento*, agudo (´) o grave (`), no se usa.

$$\overline{x},\ \hat{x},\ \tilde{x},\ \check{x},\ \breve{x},\ \mathring{x},\ \overrightarrow{x},\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},\ \overset{1}{x},\ \underset{1}{x},\ \text{etc.}$$

Notemos que el empleo de las literales i o j bajo un diacrítico comúnmente conlleva la eliminación del punto sobre estas letras, a $\imath$ o $\jmath$. Por ejemplo, los vectores base en $\Re^3$ son $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, y *no* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Los diacríticos están hechos para sobreponerse a un solo caracter. A veces queremos poner una tilde o un gorro a una expresión compuesta; el resultado es $f \tilde{*} g$ o $\frac{1}{2}p^2 \hat{+} V(q)$. A mano se pueden pintar tildes o gorros (perdón, *acentos circunflejos*) del largo necesario, pero en tipografía esto es muy difícil si no se quiere usar plantillas especiales. Existe la alternativa muy respetable de indicarlas como superíndice *después* de la expresión encerrada en delimitadores, como $(f * g)^{\sim}$ o $\left(\frac{1}{2}p^2 + V(q)\right)^{\wedge}$.

La variedad de otros *caracterizadores* (que *no* se colocan *encima* del símbolo, sino *alrededor* de él) es infinita. Así tenemos x' (prima), x'' (biprima), $x^{\dagger}$ (daga), $x^{\ddagger}$ (doble daga), x^{*} (asterisco), x° (círculo), $x^{\odot}$ (solar), $x^{\angle}$ (ángulo), x^{∞} (infinito), $x^{\pm}$ (más–menos), $x^{\S}$, $x^{\P}$, …, $x^{\aleph_0}$, etcétera.

3.2 Estilos en fórmulas matemáticas

La construcción de fórmulas matemáticas es un arte que tiene sus reglas. Regresemos a los ejemplos del capítulo 1.

3.2.1 Fórmulas en texto

Una fórmula *en texto* como, por ejemplo, $A = B + C$, en buena tipografía aparecerá compuesta de los siguientes elementos: $\boxed{A}\underset{;}{\,}\boxed{=}\underset{;}{\,}\boxed{B}\underset{;}{\,}\boxed{+}\underset{;}{\,}\boxed{C}\boxed{,}$ que incluyen los caracteres A, B, C, los símbolos $+$ y $=$, el *espacio grueso* de tamaño $\boxed{\,}$, indicado[5] por $\underset{;}{\,}$ (y la *coma* que hemos incluido como caja, pero que en realidad pertenece al *texto* y *no* a las matemáticas). En **`máquina de escribir`**, todos los caracteres y espacios tienen el mismo ancho, de modo que podemos escribir solamente `A = B + C`, evitando formas *comprimidas* como `A=B+C` (a menos que estemos en un índice o exponente). Formas como `A = B+C`, `A=B + C` o `A= B +C`, simplemente indican descuido.

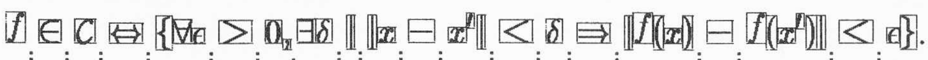
[5]Véase **3.3.9**.

3.2.2 Fórmulas desplegadas

Es común en textos matemáticos dar énfasis particular a ciertas fórmulas *desplegándolas*, es decir, *separándolas* del texto por espacios verticales en blanco y *centrándolas* en la página. Cuando se citan en el texto, van acompañadas por su *número de ecuación* que se escribe generalmente entre paréntesis y justificado con el margen derecho. Una expresión que parece ser sencilla (por estar toda en *una línea*) es:

$$f \in C \Leftrightarrow \{\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta \mid |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon\}. \qquad (3.1a)$$

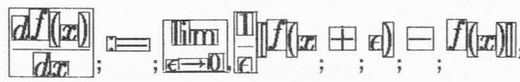
En términos de sus *cajas* y espacios, ésta es:



(3.1*b*)

Con posiciones y tamaños diferentes, tenemos:

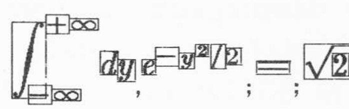
$$\frac{df(x)}{dx} := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}[f(x+\epsilon) - f(x)], \quad \text{escrita}$$



(3.2)

o bien (incluyendo un *espacio delgado* “ ”):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2/2} = \sqrt{2\pi}, \quad \text{escrita}$$



(3.3)

Cuando el número de ecuación no cabe en la misma línea, se coloca debajo de ella, como en (3.2). En artículos no segmentados o cortos, las ecuaciones se numeran consecutivamente (1), (2), ..., cuando es conveniente segmentar el texto, el mismo sistema se puede usar, precediéndolo del número de capítulo o sección, como (3.1), (3.2), ... Varias fórmulas relacionadas pueden colocarse bajo el mismo número distinguiéndolas por letras, como (3.2*a*), (3.2*b*), ... En ocasiones se usan otras formas como (3.3*I*), (3.3*II*), (3.3∗), (3.3*bis*), etc., pero pueden originar confusiones.

3.2.3 Fórmulas y texto

Tanto las fórmulas *en texto* como las *desplegadas* son parte de oraciones *completas*; si la oración termina en fórmula, a la fórmula seguirá un *punto*. Al término de una fórmula puede haber cualquier signo de puntuación o ninguno. No es conveniente *comenzar* una oración con una fórmula en texto, pues el lector puede no darse cuenta de que ha comenzado una nueva oración. **Nunca** se debe comenzar una oración con una fórmula desplegada. Una página puede terminar con fórmula en texto o desplegada, pero para iniciar una página es muy recomendable tener al menos una línea de texto en el márgen superior.

Las fórmulas no deben llevar notas al pie, como $x = y^6$ ni indicadores de referencias. Las fórmulas que van en texto *no* van numeradas; las fórmulas desplegadas pueden o no llevar número. Cuando se hace referencia a una fórmula por su número, éste actúa como su nombre propio, de modo que podemos escribir «...haciendo referencia a la ecuación (3.1) vemos...», o «...refiriéndonos a (3.2) tomamos...». *No* son recomendables las formas «... según vimos en las (3.3)...», «...viendo la Ec. (3.4)...»[7]

3.2.4 Estilos/tamaños

Comenzaremos hablando de los *estilos* en los que se escribe un símbolo o expresión matemática[8] y que corresponde ***prima facie*** al *tamaño* de los caracteres. Para ello, abreviaremos

D Estilo **desplegado**: corresponde al tamaño que toman las expresiones *desplegadas*. Así, cuando escribimos una ecuación $x = y$, estamos en estilo D. El estilo D aparece claramente cuando usamos expresiones más *altas*, como por ejemplo la fracción $\displaystyle\frac{A}{B}$ o la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2/2}$. El estilo D se ve incómodo en texto, donde hace falta separar las líneas arriba y abajo de la línea que contiene la expresión. El tamaño de las literales latinas y griegas en estilo D es el normal de 10 puntos.

T Estilo de **texto**: corresponde al tamaño que toman los símbolos cuando están *en texto*. El tamaño normal de literales latinas y griegas en estilo T es también el normal de 10 puntos. Así $A+B$ y A/B están en estilo de

[6] Los indicadores de notas al pie pueden confundirse fácilmente con elementos de la fórmula.

[7] En inglés es muy común y aceptable usar «Eq. (3.4)» o «Eqs. (3.2)». Por no sabemos qué razón, en castellano esto suena aparatoso.

[8] Esta manera de ver las cosas corresponde a la forma como opera TEX al construir expresiones matemáticas.

texto. Una fracción en estilo D tendrá su numerador y su denominador en estilo T. La expresión $\frac{A}{B}$ también está en estilo T, pues la fracción ocupa el espacio de un carácter no mucho más alto que 10 puntos; la x en x^2, x_m y en $\sqrt{1-x^4}$ están en estilo T. El estilo T se hace notorio cuando escribimos fórmulas que ocupan mucho espacio vertical, como $\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2/2}$, donde los límites de la integral —y de otros *colectivizadores*— son tratados como índices. En `máquina de escribir` el estilo T se traduce por esferas de `10 puntos por pulgada`.

I Estilo **índice**: corresponde al tamaño que toman los símbolos *(a)* que son los *índices* de símbolos T o *(b)*, el numerador y el denominador de fracciones en estilo T. Así, los caracteres 2, m y 4 en x^2, x_m y $\sqrt{1-x^4}$, respectivamente, están en estilo I; la A y B en $\frac{A}{B}$ están en estilo I. El tamaño en que se colocan literales en estilo I es de *ocho* puntos. (En `máquina de escribir`, si el texto se escribe en esfera de `10` caracteres por pulgada, los índices irán en esfera de `12 caracteres por pulgada`.)

ii Estilo **índice de índice**: *(a)* los índices de literales en estilo I están en estilo ii y *(b)*, el numerador y el denominador de fracciones en estilo I están en estilo ii. Los caracteres 2, m y 4 en e^{x^2}, $A_{t(m)}$ y $\frac{1}{\pi^{1/4}}$ están en estilo ii. El tamaño de literales ii es de *seis* puntos. En `máquina de escribir` no podemos más que utilizar las esferas de `12 caracteres por pulgada` para el estilo ii.

Indices de índices de índices (como $u^{v^{w^{x^{y^{z^{\cdots}}}}}}$) ya no pueden decrecer más sin desaparecer del mapa. Los índices de símbolos en estilo ii siguen estando en ii. Por lo general, deben evitarse símbolos en esta situación.

Es necesario insistir que los cuatro estilos anteriores se refieren a las fórmulas que escribimos en ellos. Normalmente, fórmulas en estilo D están desplegadas y fórmulas en estilo T van en texto; no es conveniente escribir en texto fórmulas en estilo D, pues si se trata de una fórmula «alta» habrá que separar mucho las líneas del texto. Escribir fórmulas desplegadas que han sido construídas en estilo T indica descuido, ya que las fracciones, sumas e integrales aparecerán demasiado pequeñas.

3.3 Elementos básicos de las fórmulas

3.3.1 Gramática de las fórmulas

En la subsección introductoria **1.1.2** indicamos que las fórmulas se comportan como una oración, cuyas partes tienen, casi todas, funciones análogas al lenguaje hablado. La sección anterior trató de los símbolos que componen una fórmula. De entre ellos, tenemos:

- **Sustantivos.** Pueden ser *átomos* indicados por lo general con letras de los alfabetos romano y latino, con índices u otros diacríticos como exponentes o raíces, o pueden ser *expresiones* más complejas que se comportan como palabras compuestas —como las palabras en alemán.
- **Modificadores.** Estos cumplen las funciones de adjetivos, pues son condicionantes. Toman muchas formas que en este manual presentamos bajo rubros separados: *colectivizadores* u *operadores* del tipo de suma e integral, *evaluadores* como límites y máximos, y algunos de los *delimitadores* que se utilizan para indicar que una variable es función de otra u otras.
- **Verbos.** Estos son *operadores binarios* que, cuando leídos en castellano, son verbos. Estos definen, operan, relacionan o comparan sustantivos, con o sin adjetivo. Tipográficamente nos referiremos a ellos como operadores binarios. Una operación binaria que merece consideración especial por su comportamiento tipográfico es la *división* que da lugar a *fracciones*.
- **Conjunciones.** Estos son también *operadores binarios* entre sustantivos pero que, leídos en castellano, son conjunciones, como las operaciones aritméticas u operaciones entre conjuntos más generales. Tipográficamente se comportan de la misma manera[9]

No hay razón para extender la analogía más allá de lo necesario. No parece haber adverbios, preposiciones ni interjecciones![10] Por otra parte, merecen consideración especial:

- **Los espacios.** En la gramática de la lengua, las pausas y la entonación se indican por medio de la puntuación; éstas pertenecen a la sintaxis. En

[9] TeX hace que se diferencíen por su espaciamiento en los estilos I y ii.

[10] Lo más cercano a una interjección como ¡Ευρέκα! es el Q.E.D., *Quod Erat Demonstrandum*, al final de una demostración de teorema.

matemáticas la sintaxis de las fórmulas requiere de espacios precisos.

- **La puntuación.** La *puntuación matemática* es diferente de la puntuación en castellano, y conviene tener en mente la diferencia al escribir fórmulas con estos símbolos, pues se comportan tipográficamente de manera diferente. Para el autor debe ser claro cuál es cual y debe comunicarlo de manera eficiente al tipógrafo.

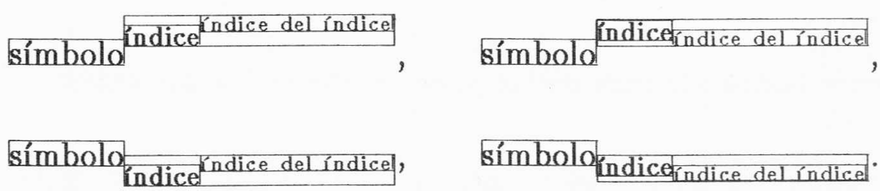
En las subsecciones que siguen usaremos la clasificación tipográfica de estos elementos dada arriba (en *bastardillas*). Corresponde, básicamente, a la gramática de la lengua. Habiendo tratado los sustantivos en la sección anterior, daremos los modificadores (adjetivos) con el desglose en índices, exponentes y raíces.

3.3.2 Modificadores de los elementos

3.3.2.1 Indices e índices de índices

Los ***índices*** son identificadores subordinados de los símbolos matemáticos: x_i, y^2, z_{a^n}, etc. El primero es un *sub*índice, el segundo un *super*índice, el tercero incluye el superíndice n del subíndice a.

La colocación de los superíndices o subíndices es tal que, aproximadamente, el márgen superior o inferior de la caja que contiene al símbolo está alineado con la mitad de la caja que contiene al índice. Cuando los índices tienen a su vez índices, se debe cuidar que ningún descendiente de superíndice o ascendiente de subíndice se coloque sobre la línea del símbolo portador. Así:



En **`máquina de escribir`** estamos limitados a subir o bajar medios renglones a lo menos. Por ello tenemos que cuidar muy especialmente que ningún elemento del sistema de índices llegue a la línea base del símbolo, de ser necesario levantando la línea de los superíndices de primer grado o bajando la de los subíndices del primer grado. La misma construcción aplicada a las figuras anteriores será entonces:

$$\boxed{\texttt{símbolo}}^{\boxed{\texttt{índice}}^{\boxed{\texttt{índice del índice}}}}, \qquad \boxed{\texttt{símbolo}}^{\boxed{\texttt{índice}}_{\boxed{\texttt{índice del índice}}}},$$

$$\boxed{\texttt{símbolo}}_{\boxed{\texttt{índice}}^{\boxed{\texttt{índice del índice}}}}, \qquad \boxed{\texttt{símbolo}}_{\boxed{\texttt{índice}}_{\boxed{\texttt{índice del índice}}}}.$$

3.3.2.2 Exponentes

La elevación de un número x a una potencia n generalmente se denota como x^n; el *exponente*, n, va en estilo de (super)índice I. En ocasiones los exponentes se vuelven complicados; por legibilidad, es conveniente mantenerlos en una línea. Así, $(ax+b)^{dy^2+e}$ o $z^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$ son inevitables, pero es preferible escribir:

$$\pi^{\frac{1}{4}} \quad \text{como} \quad \pi^{1/4} \qquad \text{y} \qquad e^{\frac{ax+b}{c+dx}} \quad \text{como} \quad e^{(ax+b)/(c+dx)}.$$

La función *exponencial* de x (la base de los logaritmos neperianos a la potencia x), e^x, tiene la notación equivalente $\exp x$ (o $\exp(x)$). Su uso facilita muchas expresiones con exponentes largos, con exponentes a su vez, fracciones u otros símbolos altos. Así, es preferible escribir:

$$e^{2\pi i \sum_{i=1}^{n+1} x_i p_i} \quad \text{como} \quad \exp\left(2\pi i \sum_{i=1}^{n+1} x_i p_i\right) \quad \text{o} \quad \exp\bigl(2\pi i \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i p_i\bigr).$$

Recordamos algunas reglas para operar con exponentes:

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \left(x^a\right)^b = x^{ab}, \quad x^0 = 1, \quad \frac{1}{x^a} = x^{-a}, \quad \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c = x^{(a-b)c},$$

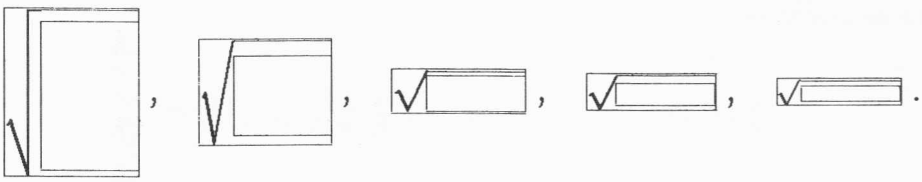
$$x^a = y \Leftrightarrow x = y^{1/a} \Leftrightarrow a = \log_x y \quad \left(\begin{array}{c}\text{en la primera}\\ \text{hoja de Riemann}\end{array}\right).$$

3.3.2.3 Raíces

El símbolo de raíz, $\surd$, es uno de los más bellos y nobles de los símbolos matemáticos. Si $x = y^2$, entonces $y = \pm\sqrt{x}$. Si x es una expresión de más de un carácter, entonces el $\surd$ desarrolla un ala que coloca una barra sobre toda la expresión, como en $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ por ejemplo. Esto es la pesadilla de los tipógrafos, pues por lo general requiere de más espacio entre líneas cuando va en texto, y símbolos de diferentes tamaños que tienen que embonar con la expresión delimitada por la raíz. Así, en estilos D, T, I e II, tendremos:

$$\sqrt{\frac{ax+b}{c}}, \quad \sqrt{(ax+b)/c}, \quad e^{\sqrt{(ax+b)/c}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{(ax+b)/c}}}.$$

La colocación y profundidad del símbolo y ala de la raíz es tal que sigue los límites de la *caja* del radicando. Así,



La dificultad tipográfica hace que generalmente se prefiera la notación equivalente $\sqrt{x} = x^{1/2}$ de potencia fraccionaria.[11] Así, las funciones de onda del oscilador armónico cuántico podrían aparecer como:

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \\ &= \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{-x^2} H_n(x) = 2^{-n/2}(n!)^{-1/2}\pi^{-1/4} e^{-x^2} H_n(x).\end{aligned}$$

Las últimas expresiones en cada renglón parecen las más adecuadas.

El ala de la raíz es la que determina la extensión del radicando (tal vez sería más cómodo que se hiciese con delimitadores como paréntesis, pero esto

[11] Pensándolo bien, podríamos definir la función sqrt$(x) := \sqrt{x}$, así como lo hacemos con las funciones trigonométricas. Esta idea —natural en FORTRAN o ALGOL— no parece haber prosperado.

tradicionalmente no se da). Como consecuencia, a veces se corre el riesgo de perder claridad: cuando escribimos $\sqrt{2}\pi$ el tipógrafo o el lector pueden confundirlo con $\sqrt{2\pi}$. En productos conviene por ello dejar un *espacio delgado* $\boxed{\,}$ entre la raíz y el siguiente factor, escribiendo $\sqrt{2}\,\pi$ o —para evitar ambigüedades— $\pi\sqrt{2}$ o $\pi\sqrt{2}$, relegando las raíces al último factor. En **máquina de escribir** este espacio conviene conservarlo como el espacio blanco normal de un carácter de ancho: $\boxed{}$.

Las raíces cúbicas, cuartas, etc., de una cantidad x, se denotan por exponentes fraccionarios: $x^{1/3}$, $x^{1/4}$, etc., o —algunas veces— por

$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}, \quad \sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}; \quad \boxed{\sqrt[\boxed{k}]{\boxed{x}}}.$$

El índice aquí va en estilo ii, levantado cinco puntos y a 2.5 puntos a la derecha del límite izquierdo del símbolo $\surd$. Si éste crece, el índice debe levantarse y crecer acorde. Por esta razón, los coeficientes fraccionarios son mucho más convenientes. A continuación resumimos algunas equivalencias que permitirán cambiar estas formas:

$$\sqrt[n]{x^k} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^k = x^{k/n}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = x^{1/nm}.$$

En **máquina de escribir**, existe el símbolo $\surd$ en PRX-11-M/;[12] y el símbolo $\sqrt{}$ en PRX-11-T/:. La primera admite extensiones diagonales (/) u horizontales y la segunda sólo horizontales. En todo caso, el símbolo $\surd$ debe aparecer en la misma línea que la línea más baja del radicando.

3.3.3 Operaciones binarias

La suma, el producto y la igualdad son ejemplos de ***operaciones binarias*** entre *dos* elementos de una fórmula. Pueden corresponder a verbos o a conjunciones en la lengua hablada. Los símbolos de estas operaciones, $+$, $\times$ y $=$ entre otros, se colocan a la mitad de la altura vertical de los elementos —que pueden ser de cualquier tamaño. En estilo D esto es lo más notorio. Tomemos como

[12] Es decir, la tecla ";" de PRX-11-M.

ejemplos las ecuaciones (3.2) y (3.3) destacando estos arreglos:

$$\boxed{\frac{df(x)}{dx}} \;=\; \boxed{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\boxed{\boxed{f(x+\epsilon)} - \boxed{f(x)}}}, \qquad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}} \boxed{dx\, e^{-y^2/2}} = \boxed{\sqrt{2\pi}}. \tag{3.4}$$

Notemos que en estos arreglos colocamos un espacio grueso (marcado en la primera ecuación) *antes* y *después* del operador binario en estilos D, T, I e II.

La *suma* $+$ puede estar reemplazada por otros símbolos como $-$, $\pm$, $\mp$, $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$, $\uplus$, $\cup$, $\cap$, $\sqcup$, $\sqcap$, $\wedge$, $\vee$, dependiendo del tipo de objetos que se suman. El *producto* entre símbolos suele omitirse: $ab = a \times b$, pero puede indicarse por un punto central $a \cdot b$. Cuando se trata de otros tipos de producto, tenemos también el producto vectorial $\times$ (o *producto cruz*), el producto directo $\otimes$, el semidirecto $\otimes$ y otros como $\circ$, $\bullet$, $*$, $\top$, etc. Igualdades son $=$ (*es igual* a), $:=$ (*se define por*), $=:$ (*define* a), $\doteq$, $\simeq$, $\approx$ (*aproximadamente igual* a), $\equiv$ (*equivalente* a), etc. y sus negaciones $\neq$, $\not\equiv$, etcétera.

Otros símbolos binarios son todos aquellos que indican relación entre dos partes de la fórmula, como $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\ll$, $\gg$, $\subset$, $\supset$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\prec$, $\succ$, $\preceq$, $\succeq$, $\leftarrow$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $|$, $\|$, $:$, $\perp$, $\mapsto$, $\in$, $\notin$, etc.[13] TEX hace aun la distinción entre *operadores* binarios (verbos) y *relaciones* binarias (conjunciones), donde estas últimas pierden los espacios gruesos a ambos lados en los estilos I e II, como el $\epsilon \mapsto 0$ en la ecuación (3.2).

La traducción de lo dicho para **`máquina de escribir`** se aplica en cuanto a los centrados verticales; los espacios a ambos lados del operador binario se reducen a la única posibilidad de dejar un espacio ( ) a ambos lados de `+`, `-`, `=`, etc. En casos I e II, este espacio se puede omitir para disminuir la longitud de estas expresiones.

Cuando un signo ($+$, $-$, $\pm$, $\mp$) precede a un símbolo, como en $+0.8$, $-\infty$, ± 1, **no** es operador binario, sino un símbolo *ordinario* que se coloca sin espacio entre él y el símbolo que le sigue.

3.3.4 Fracciones

Una *fracción* $\frac{A}{B}$ indica la división del *numerador* A por el *denominador*

[13] Notemos con cuidado la diferencia entre el signo de inclusión $\in$ y ϵ, la épsilon griega.

B, donde A y B pueden ser expresiones matemáticas[14] de cualquier grado de complejidad.[15]

3.3.4.1 Notaciones equivalentes

Son equivalentes las siguientes notaciones para la división:

$$\frac{A}{B}, \qquad A/B, \qquad A \div B, \qquad AB^{-1} \quad \text{y} \quad B^{-1}A.$$

Recordemos también las identidades siguientes:

$$\frac{x}{x} = 1, \qquad \frac{1}{c^n} = c^{-n}, \qquad \frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

3.3.4.2 Fracciones en texto

En *texto* $\frac{A}{B}$ resulta inconveniente, sobre todo cuando se trata de expresiones compuestas. La regla es esta: *en texto no es conveniente el arreglo vertical de símbolos en división.* El símbolo "$\div$" se usa en libros de texto de aritmética elemental, pero no goza del favor en textos científicos. Para expresiones compuestas, como $\frac{a+bx}{c+dx}$, es preferible escribir $(a+bx)/(c+dx)$ o $(a+bx)(c+dx)^{-1}$.

Las fracciones *numéricas* en texto (T), sin embargo, son comunes (aun cuando la fórmula misma esté desplegada. Así, podemos escribir $\frac{1}{2}mv^2$, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{5}{8}V(x)$, en vez de $(1/2)mv^2$ o $mv^2/2$, $(2/3)\pi$ y $(5/8)V(x)$: el ojo reconoce fácilmente las fracciones sencillas, donde hay a lo más un número de un dígito y uno de dos dígitos, como $\frac{3}{16}$. No así $\frac{348}{547}$. El propósito y contexto de la expresión determina, en última instancia, la forma usada. Podemos gustar de $mv^2/2$ cuando aparece sola la energía cinética, pero escribir el Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$; podemos escribir $120° = \frac{2}{3}\pi$ pero preferir $e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$. Trataremos sólo que la estética dicte *en forma consistente* el estilo a seguir.

---

[14]De hecho, TeX distingue entre el estilo T del numerador y el estilo T′ del denominador. Estos difieren ligeramente en la posición que se asigna a sus índices superiores.

[15]Suponemos que A y B toman valores en campos *conmutativos* y que $B \neq 0$. Cuando se trata con objetos no conmutativos podemos tener A/B y $B\backslash A$ diferentes, y $AB^{-1} \neq B^{-1}A$.

3.3.4.3 Fracciones en desplegado

Los cálculos hechos por el autor en el curso de escribir su artículo o libro generalmente funcionan como fórmulas desplegadas. La facilidad de manejo y simplificación de la barra horizontal de división es considerable; a veces se olvida que la expresión final que aparece en el artículo impreso debe reflejar el resultado, y no simplemente el último paso del cálculo. Debe también tomar en cuenta que la abundancia de espacio en blanco en una página encarece el producto y resulta poco informativa. Un editor o tipógrafo que conozca el tema puede introducir, con ventaja, cambios en el formato de la barra de división. Personas no tan informadas en matemáticas harán bien en consultar a quien que sí lo esté, antes de mejorar la notación del autor. En todo caso, ofrecemos a continuación algunas reglas del juego.

Por ejemplo:

podemos reemplazar	por	o por	pero **no** por
$\dfrac{x+y}{z}$	$(x+y)/z$	$(x+y)z^{-1}$	$x+y/z$
$\dfrac{x}{2}+\dfrac{3y}{8}$	$\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}y$	$x/2+3y/8$	$\frac{1}{2}x+3y/8$
$\dfrac{u}{(v+w)^2}$	$u/(v+w)^2$	$u(v+w)^{-2}$	
$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$	$\dfrac{a/b}{c}$	a/bc	$\frac{a}{\frac{b}{c}}$
$\cos\dfrac{\pi}{m}$	$\cos(\pi/m)$	$\cos(\pi m^{-1})$	$\cos\pi/m$
$\dfrac{\sin cx}{x}$	$x^{-1}\sin cx$	$(\sin cx)/x$	$\sin cx/x.$

El uso de las fracciones en su estilo tradicional de línea horizontal a menudo se ha visto impedido por su difícil tipografía. En términos de visibilidad y simetría, hay muchos arreglos de división en los que el estilo desplegado clásico es insuperable. Por ejemplo, en la definición de la función hipergeométrica generalizada:

$$ {}_pF_q\left({a_1, a_2, \cdots, a_p \atop b_1, b_2, \cdots, b_p}; z\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n}\,\frac{z^n}{n!}. $$

En todo caso, considerados como *cajas*, el numerador y el denominador deberán ir centrados en forma vertical, con la barra horizontal del tamaño del más ancho de los dos. Horizontalmente, una fracción hace coincidir la altura de la barra horizontal con la mitad de la altura normal de los símbolos que forman la línea principal del desplegado. En `máquina de escribir` será necesario subir medio renglón. Así:

$$2\frac{ax^2+bx+c}{m+ny}+z, \qquad 2\frac{\mathtt{ax^2+\ bx\ +\ c}}{\mathtt{m\ +\ ny}}\ \mathtt{+\ z.}$$

3.3.4.4 Derivadas

El cálculo diferencial utiliza varios tipos de ***derivadas***, cuyo símbolo las hace parecer una fracción. Entre otras, tenemos las derivadas:

$$\text{total } \frac{df}{dx}, \quad \text{parcial } \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \text{variacional } \frac{\delta f}{\delta x}, \quad \text{incremental } \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ etcétera.}$$

En estos casos **no** se aplica la simplificación $d/d = 1$, pues *no* se trata de una división. Las ds podemos manejarlas en las siguientes formas equivalentes:

$$\frac{df}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}f, \qquad df/dx, \qquad (d/dx)f,$$

pero **no** como $d/dx\ f$. Derivadas de *orden* superior a uno se expresan como:

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \quad \text{o} \quad \frac{\partial^{n_1+n_2+\cdots+n_k} f}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_k^{n_k}}.$$

3.3.5 Colectivizadores

3.3.5.1 Sumas e integrales

En matemáticas se tiene una clase especial de símbolos ***colectivizadores***, que indican que una operación se efectúa repetidamente entre un conjunto de elementos, por lo general numerados por un índice. Así, tenemos la ***suma***

$\sum_{k=1}^{N} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_N$, el ***producto*** $\prod_{k=1}^{N} b_k := b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_N$ y la ***unión*** $\bigcup_{k=1}^{N} a_n := a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_N$, etc. Está también la ***integral definida*** $\int_a^b dx\, f(x)$ o *indefinida* $\int^x dx'\, f(x')$, uno de los símbolos más estilizados de las matemáticas. De entre los colectivizadores, describiremos en detalle los de suma e integral, pues son los más comunes.

3.3.5.2 Estilos desplegado y texto

Los colectivizadores existen en los estilos D y T;[16] que rebasan la altura normal de una línea. Escritos en *estilo de texto,* $\sum$ es algo más grande que la letra griega Σ e $\int$ algo más grande que la letra S que le dio origen, alterada como S o $\int$. Los colectivizadores en texto tienen tamaño de 12 puntos, mientras que las letras griegas y las relaciones binarias correspondientes tienen los 10 puntos normales. En estilo desplegado, los colectivizadores tienen un alto de 18 puntos.

Tipográficamente, los colectivizadores se comportan de una forma especial en cuanto a la colocación de índices. En estilo de *texto,* los *límites* de la suma $(k = 1, N)$ en $\sum_{k=1}^{N}$ y (a, b) en la integral $\int_a^b dx$, se colocan en la posición exacta de subíndices y superíndices.

En *estilo desplegado,* formas típicas de suma e integral, sencillas y múltiples son:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{ijk} = \sum_{\substack{0<i<\infty\\ 0<j<\infty\\ 0<k<\infty}} b_{ijk} = \sum_{i,j,k\in Z^+} b_{ijk};$$

$$\int_0^1 dx\, f(x), \qquad \int_{\Re^3} d^3\mathbf{x}\, f(\mathbf{x}) = \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f\big(\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi)\big).$$

3.3.5.3 La diferencial

Hacemos notar que cada integral contiene una *diferencial* dx, $d^3\mathbf{x}$ o

[16] En estilos I y II son demasiado pequeños e inconvenientes. Escribir "$\int$" es un crimen.

$dr\,d\vartheta\,d\varphi$, que indica la variable sobre la cual se integra.[17] La costumbre no es única, pero el lugar más conveniente para colocar la dx es *inmediatamente después* del signo de integración pues forma una unidad con este último y evita confusión con los límites de integración en integrales múltiples.[18] Por último, notemos que la d y la x en dx no son un simple producto sino un símbolo compuesto; es muy conveniente *separarlo* del resto del integrando por un *espacio delgado* $\boxed{\,}$.[19]

3.3.5.4 Los límites

En estilo desplegado, los *límites* de los colectivizadores como la suma[20] se escriben en estilo I directamente arriba y abajo del símbolo, *centrados verticalmente*. Los límites de la integral definida van en la posición de super y subíndices, y el límite inferior se recorre 5 puntos a la izquierda para embonar en forma adecuada con el razgo recedido de la integral. Para finalizar, la caja que contiene el símbolo y sus límites se centra *horizontalmente* respecto de la línea base. Así,

$$\boxed{\overset{\boxed{k=1}}{\underset{\boxed{N}}{\boxed{\sum}}}}\,\boxed{a_{\boxed{k}}}, \qquad \boxed{\boxed{\int}^{\boxed{1}}_{\boxed{0}}}\,\boxed{dx}\,\boxed{f(\boxed{x})}.$$

La colocación estándar de los límites de la integral es la indicada arriba. En libros antiguos a veces uno se topa con las formas:

$$\textstyle\sum_{k=1}^{N} a_k \qquad \text{y} \qquad \int\limits_0^1 dx\, f(x)$$

que, si no incorrectas, se ven mal. La integral, escrita de esta forma, desperdicia mucho espacio vertical.

---

[17] En el caso de cálculo con formas diferenciales, se suele omitir la dx; así, $\omega = d\alpha$ se invierte con $\alpha = \int \omega$.

[18] Cuando la integración tiene una *función de peso* ω como el factor $\sin\vartheta$ en la integral sobre latitud, es también parte de la integral y *no* del integrando. En estos casos conviene escribir $\int_0^\pi \omega(\vartheta)\,d\vartheta\,f(\vartheta)$.

[19] En `máquina de escribir` esto será un espacio de texto $\boxed{\ }$. Así, $\int_0^1$`dx f(x)`.

[20] De hecho, todos los colectivizadores *excepto* la integral.

3.3.5.5 Otros colectivizadores

Existen otras variantes de los colectivizadores de suma e integral. Una definicion común son: la *sumatoria regularizada*

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \frac{a_k}{x_k - x_N} = \begin{cases} \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k/(x_k - x_N), & N \notin [N_1, N_2], \\ \left(\sum_{k=N_1}^{N-1} + \sum_{k=N+1}^{N_2}\right) a_k/(x_k - x_N), & N \in [N_1, N_2]. \end{cases} \tag{3.5a}$$

En cuanto a integrales tenemos la correspondiente *integral regularizada* o *valor principal* de una integral con integrando singular

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{f(x)}{x - x_k} &= ⨍_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{f(x)}{x - x_k} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} dx\, \frac{f(x)}{(x - x_k)}, & x_k \notin (x_1, x_2), \\ \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\int_{x_1}^{x_k - \epsilon} + \int_{x_k + \epsilon}^{x_2} \right) dx\, \frac{f(x)}{(x - x_k)}, & x \in (x_1, x_2). \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5b}$$

En teoría de variable compleja, tenemos además las integrales *de contorno*, como en el teorema de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{(c)} dz\, \frac{f(z)}{(z - c)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=c} \tag{3.6}$$

(donde hay que especificar que el contorno se recorre en el sentido $\circlearrowleft$) y, en cálculo vectorial, las integrales sobre la frontera $S = \partial V$ de un volumen V en el teorema de Gauss:[21]

$$\iiint\limits_V d^3\mathbf{x}\, \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \iint\limits_{\partial V} d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3.7}$$

TeX nos brinda varios otros colectivizadores como son:

$$\coprod, \ \bigoplus, \ \bigotimes, \ \bigodot, \ \bigcup, \ \bigcap, \ \biguplus, \ \bigsqcup, \ \bigvee, \ \bigwedge, \ldots$$

y podemos definir muchos más.

---

[21] En integrales múltiples, la opción de colocar el dominio de integración directamente debajo de los signos de integral parece más atractiva para muchos editores. Esto no es una regla y la facilidad tipográfica, el espacio y el gusto juegan papeles importantes.

En **máquina de escribir**, el tamaño de los colectivizadores desplegados no puede ser producido con facilidad. En *texto* es posible utilizar la letra griega Σ en **SYMBOL/X**, (esfera **SYMBOL**, posición de la **X**) o el símbolo **PRX-11-M/v** (una sigma de razgos **negroides**). Integrales de un renglón para texto se hallan en **SYMBOL/"** y en **PRX-11-M/e**.

En fórmulas *desplegadas* se puede producir un símbolo de sumatoria grande usando dos renglones: las teclas **SYMBOL/=** (inferior) y **SYMBOL//** (superior). Integrales de dos renglones se componen con **SYMBOL/+** (inferior) y **SYMBOL/&** (superior); líneas verticales de continuación, para integrales de tres —pero no más— renglones se hallan en **SYMBOL/¿**. De hecho, para resultados óptimos en un manuscrito a máquina, es preferible *agregar* las sumas, integrales y delimitadores grandes usando plantillas tipo *letraset*.

3.3.6 Evaluadores

El caso más simple de ***evaluador*** es un símbolo que fija valores de las variables dependientes en una función, como $f(x)|_a = f(a)$. Aquí se trata de una línea vertical donde por subíndice se coloca el valor a que debe tomar x. En otra notación, $f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$. El modo desplegado es idéntico, excepto que la línea vertical se extiende a todo lo alto de la expresión evaluada, como en:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, e^{inx} = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{2\pi i n} e^{inx}\right|_{x=-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Existen otras situaciones en matemáticas en las que se quiere expresar el valor que toma una expresión bajo cierta *propiedad* y condiciones subsidiarias. Un ejemplo de esto fue visto en la ecuación (3.5), $\lim_{\epsilon\to 0^+}\cdots$, el *límite*, cuando ϵ tiende a 0 por valores positivos. En este caso vemos que la propiedad se escribe en tipos romanos (lim, y *no lim*)y las condiciones subsidiarias se comportan como los índices de los colectivizadores: a continuación en texto y abajo en desplegado. Otros ejemplos de evaluadores, con su distribución en caja y los espaciamientos adecuados, son:

$$\min_{n\in Z} n^2 = 0, \quad \sup_{x\in\Re} f(x) = \inf_{x\in\Re} f(x) \Rightarrow f(x) = \text{constante},$$

$$\text{en detalle:} \qquad \boxed{\max}_{\boxed{x\in\boxed{-1,1}}} \boxed{x}^{\boxed{2}} \boxed{=} \boxed{1}.$$

Nótese que *entre un evaluador romano* y la expresión evaluada, *se coloca un espacio delgado* $\boxed{\,}$. En **`máquina de escribir`** éste se vuelve un espacio simple $\boxed{\ }$.

3.3.7 Delimitadores

3.3.7.1 Sus funciones

Hay varias funciones que cumplen los delimitadores en matemáticas: *(i)* indican cómo una operación se *distribuye* respecto a otra; por ejemplo, la suma respecto al producto $(a+b)x = ax+bx$. *(ii)* Especifican los elementos sobre los que actúan ciertos operadores; por ejemplo, $\sin(ax)/x$ o $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$.[22] *(iii)* Convencionalmente, indican la función de ciertos símbolos que pertenecen al *contexto* de una expresión: $f(x)$ indica que x es la variable independiente de la cual depende f, $g = f^{(n)}$ indica que g es la n-ésima derivada de f. *(iv)* Indican conjuntos y actúan como *enumeradores*, como en $A := \{a_n\}_{n=1}^{N}$, $\Re = (-\infty, \infty)$ o $x \in (-\pi, \pi]$. *(v)* Operan como símbolos *evaluadores* en $|x| =$ valor absoluto de x, $[x] =$ máximo entero menor o igual a x y en $|\mathbf{A}|$, determinante de la matriz $\mathbf{A}$. *(vi)* Representan *operaciones binarias* de varios tipos, como producto interior de f y g, $(f,g) := \int_{\Re} dx\, f(x)^* g(x)$, conmutador $[f,g]$, paréntesis de Poisson $\{f,g\}$, bra-kets de Dirac $\langle f \mid g\rangle$, etc., incluyendo —como elemento esencial— un símbolo de puntuación o separación entre los elementos de la operación. Tipográficamene, sin embargo, tienen comportamiento similar en todos esos casos.

Entre los delimitadores más usados están:

$$(\text{paréntesis}), \qquad [\text{corchetes}], \quad \text{y} \quad \{\text{llaves}\},$$

cuyo orden de inclusión —cuando se utilizan para *distribuir* operaciones— es:

$$\{[(X)]\}.$$

Este orden no es obligado, sobre todo cuando ciertos pares de delimitadores tienen funciones de contextualizadores, como en el caso $\cos\big(f(x)\big)$ u[23] operadores, como en el caso $\|f\| := (\{f,f\})^{1/2}$.

---

[22] En esto, a menudo somos descuidados al escribir nuestras fórmulas y mucho se relega al uso de espacios —que a veces se pierden en tipografía— y al contexto, como en $\sin\pi x \neq \sin\pi\; x = 0$.

[23] Nótese que los paréntesis exteriores son ligeramente mayores que los interiores.

Otros delimitadores comunes que tienen significados diferentes del de indicadores de distribución son:

$$|\boxed{X}|,\quad \|\boxed{X}\|,\quad \langle\boxed{X}\rangle,\quad \lfloor\boxed{X}\rfloor,\quad \lceil\boxed{X}\rceil,\quad \text{etcétera.}$$

3.3.7.2 Espaciamientos

En los dos desplegados precedentes hemos marcado la *caja* que contiene al símbolo $\boxed{X}$ para indicar que *entre los delimitadores y su contenido se omite todo espacio.* Esto es en contraste con el espacio normal (espacio *grueso*, en la última expresión desplegada) que aparece entre la relación binaria + y el *exterior* del delimitador. Esto es particularmente importante en el caso de la barra vertical "|". Obsérvense con cuidado las siguientes expresiones y la posición de las barras verticales:

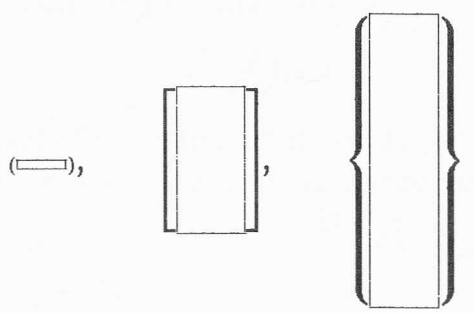
$$|{+X}| = |{-X}| \quad \text{|'s tratados como } \textit{delimitadores,}$$
$$| + X| = | - X| \quad \text{|'s tratados como símbolos ordinarios (incorrecto).}$$

Lo mismo se aplica a los demás delimitadores.[24]

En **`máquina de escribir`** *no* dejamos espacios entre delimitadores y su contenido. Por ejemplo, escribimos $\texttt{1 + |x + iy|}^{2}$ o $\texttt{1+|x+iy|}^{2}$, pero *no* $\texttt{1 + | x + iy |}^{2}$. Lo mismo vale para paréntesis y otros delimitadores.

3.3.7.3 Delimitadores grandes

Los delimitadores pueden encerrar *cualquier* símbolo y deben *crecer* con él. Por ejemplo:



[24]La barra vertical es particularmente vulnerable a los espacios mal puestos; así, "n divide a m" es $m|n$, pero "m es tal que n" es $m \mid n$.

Esto se logra generalmente formando un delimitador grande mediante extensiones verticales. La llave izquierda grande, por ejemplo, consta de arriba a abajo de ⎧, varias ⎪'s, ⎨ en el centro, más ⎪'s y un ⎩ abajo. En **`máquina de escribir`** la esfera **`SYMBOL`** tiene los elementos extremos de paréntesis y llaves en las posiciones `*`, `(`, `f` y `j`, la línea de extensión en `¿`. Para mejores resultados recomendamos usar plantillas *Letraset* o **mecanorma**.

Los bordes superiores e inferiores de los delimitadores se ajustan a la caja contenida como en el ejemplo que dimos arriba. En ocasiones, sin embargo, la caja consta de un colectivizador con límites superiores o inferiores, o alguna expresión que tiene una saliente pequeña que se ve mal dentro de delimitadores que sigan esta regla. Comparemos

$$\left(\boxed{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}\right) \quad \text{con} \quad \boxed{\Bigl(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\Bigr)}\,.$$

¿Cuál se ve mejor?

3.3.8 Matrices

3.3.8.1 Arreglos rectangulares

Este es el *mero mole* de los buenos tipógrafos. Una *matriz* es un arreglo de elementos, en general rectangular, delimitado por paréntesis, como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1,n-1} & A_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2,n-1} & A_{2,n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3,n-1} & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} & \cdots & A_{m-1,n-1} & A_{m-1,n} \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{m,n-1} & A_{m,n} \end{pmatrix}.$$

En esta matriz de $m \times n$, los elementos son los A_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Es común distinguir los símbolos de matrices por **negritas** llamando $\mathbf{A}$ a la matriz arriba. También es común encontrar las matrices delimitadas por *corchetes* $[A_{jk}]$ o por *dobles barras* $\|A_{jk}\|$, pues tipográficamente son más sencillas de extender para arreglos grandes. No existe en la lengua hablada, una contraparte precisa de una *matriz*. Sus elementos no tienen relación secuencial, sino que tienen relación posicional entre sí. Las matrices completas sirven como sustantivos compuestos.

Los arreglos matriciales más comunes son los *vectores columna*, los *vectores renglón* y las matrices *cuadradas*:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Estas son matrices de dimensión $n \times 1$, $1 \times m$ y $N \times N$, respectivamente. La última se puede abreviar $\mathbf{a} = \|a_{jk}\|$, con la dimensión dada por el contexto. Los elementos de una matriz pueden ser números o expresiones matemáticas de cualquier grado de complejidad, incluyendo submatrices. En esto estriba la mala fama que tienen entre los tipógrafos.

3.3.8.2 Centrados

Tipográficamente, los elementos de una matriz se arreglan de tal manera en forma que queden *centrados vertical y horizontalmente*, con un espacio mínimo entre los elementos más próximos.[25] Así, en términos de cajas, la construcción de una matriz de 3×3 con elementos de ancho y alto diferente, es la siguiente:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boxed{\cos\theta} & \boxed{\sin\theta} & \boxed{\sqrt{x}} \\ \boxed{-\sin\theta} & \boxed{\cos\theta} & \boxed{e^{x^2}} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\frac{\boxed{x^2-1}}{\boxed{x^2+1}}} \end{pmatrix}}.$$

Buenos procesadores de texto[26] podrán hacer estos alineamientos automáticamente. Otros no. En todo caso las matrices y otros arreglos similares requieren paciencia y tino.

---

[25] Un cuadratín, digamos, en la dirección horizontal, dos puntos en la dirección vertical.

[26] ... como TEX suplementado por el *Fácil* TEX de Max Díaz ...

3.3.8.3 Formas equivalentes

Los vectores columna y las matrices grandes generan mucho espacio en blanco, especialmente en sus versiones de $N \times N$. Por ello conviene desplegarlos con parsimonia. Los vectores columna se pueden escribir como sus vectores renglón *transpuestos*,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}.$$

Existen otros símbolos para indicar transposición, incluyendo tildes, barras, etc., que son menos convenientes que un superíndice sencillo como T. Dos clases de matrices permiten ahorros considerables: las matrices *diagonales*

$$\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

y las *circulantes*

$$\operatorname{circ}\{c_1, c_2, \ldots, c_N\} := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \iddots & c_{N-1} & c_N \\ c_N & c_1 & c_2 & \iddots & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_N & c_1 & \iddots & c_{N-3} & c_{N-2} \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \iddots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \iddots & c_N & c_1 \end{pmatrix}.$$

Con las mismas características tipográficas que la matriz, está el ***determinante*** de una matriz. Este es un arreglo delimitado por barras verticales sencillas:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} := \sum_{\substack{\text{permutaciones} \\ \pi \text{ de } 1,2,\ldots,N}} \prod_{k=1}^{N} (-1)^{\pi} A_{k,\pi(k)}.$$

3.3.8.4 Matrices en texto

Los ejemplos de fórmulas con arreglos matriciales dados en esta subsección son todos en estilo desplegado. Ocasionalmente algún autor insiste en poner una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dentro del texto. Si los elementos son sencillos ésta cabrá en estilo de *texto* (T) con los elementos en estilo de índice (I) así: $\left(\begin{smallmatrix} a\,b \\ c\,d \end{smallmatrix}\right)$ —algo chico pero legible.[27]

3.3.9 Espacios

La claridad de las fórmulas depende crucialmente de los espacios. En las subsecciones anteriores hemos utilizado diferentes tipos de espacios —que el lector puede volver a hojear. La claridad que dan los espacios en las fórmulas es sintáctica; recoge las pausas naturales de la mente en procesar el hilo lógico del escrito. La estructuración de estas reglas sólo sigue los usos y costumbres que hay al respecto. Aquí resumimos esa información.

Tenemos los siguientes espacios:[28]

$$\begin{aligned} \text{espacio delgado} &= \tfrac{1}{6} \text{ de cuadratín,} \\ \text{espacio grueso} &= \tfrac{5}{18} \text{ de cuadratín,} \\ \text{espacio de texto} &= \tfrac{2}{9} \text{ de cuadratín,} \\ \text{cuadratín} &= \text{ancho de la ``M'',} \\ \text{doble cuadratín} &= 2 \text{ cuadratines.} \end{aligned}$$

Sus marcas en galeras están dados en el apéndice F.

3.3.9.1 Espacio nulo

No se deja espacio en los siguientes casos:

---

[27] En notas al pie requeriríamos estilo II, y esto se traduciría en $\left(\begin{smallmatrix} a\,b \\ c\,d \end{smallmatrix}\right)$, lo cual ya es ridículo.

[28] Esto es aparte del *espacio nulo*. TEX cuenta con *diez* tipos diferentes de espacio incluyendo los aquí listados; tiene, por ejemplo, espacios *condicionales* que desaparecen en estilos I e II, y espacios *negativos*.

- Entre literales y/o delimitadores en producto: $2x+abc+mc^2$, $(ax+b)(c+dx)$.
- Entre símbolos y sus índices: $A_k e^{2\pi imn/N}$, $\lim_{\epsilon\to 0^+}\Gamma(\epsilon)$.
- Entre delimitadores y símbolos en su interior: $f(x+y)+|g(x)+h(\sin y)|$.
- Entre símbolos y la puntuación que les sigue: (f,g), $a_1, a_2, a_3, \ldots$.
- Entre funciones y los delimitadores de su argumento, entre funciones y sus evaluadores: $\cos(x\pi+z)$, $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$, $f(x)|_{x=0}$.
- Entre un signo *no* precedido por símbolo y el símbolo que le sucede: -7.8, $+\sqrt{x}$, $\pm x^2$.

3.3.9.2 Espacio delgado

- Entre funciones *romanas* o entre éstas y literales, como $\exp a$, $2x\tan x$, $\operatorname{erfc} x$, $xy\log\log z$, $d\limsup b$.
- Entre puntuación y símbolos:[29] $\{x, y, \ldots, z\}$, ${}_2F_1(a, b; c; z)$.
- Entre colectivizadores y símbolos $xy\prod b_n$, $X\bigcup Y$.
- En una integral, entre la diferencial y el resto del integrando: $\int dx\, f(x)$, $\int dr\, \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, f(r,\vartheta,\varphi)$.
- A ambos lados de funciones como el *factorial* $n!$, que fácilmente se confunden con otros factores: $2\,n!\,xz$, o funciones con descendientes anteriores, como $2x\,{}_pF_q(z)$.

3.3.9.3 Espacio grueso

- Entre operadores o relaciones binarias y los símbolos que éstos relacionan:[30] $a+b-(c\times d\pm e)$, $a \mid b$.
- En relaciones de congruencia: $x\equiv y \pmod{x}$.

---

[29] Este espacio delgado desaparece en estilos I e ii: $a_{i,j,k}$.

[30] Aquí seguimos el ***modus operandi*** de TEX; el manual *Mathematics into Type* de E. Swanson, comisionado por la American Mathematical Society (1979) prefiere espacios *delgados* en este lugar, pero reconoce que esta ha sido una manzana de discordia entre editores y permite prácticas alternativas.

▶ En condiciones matemáticas en el texto: $a_n,\ n = 1, 2, \ldots, N$.

3.3.9.4 Otros espacios

El *espacio de texto* $\boxed{\ }$ es el que normalmente aparece entre símbolos o fórmulas cuando están escritos en texto, como «cuando $x \to 0$ entonces $f(x)$ tenderá a π si el límite es por la derecha, y a $-\pi$ cuando es por la izquierda».

En **máquina de escribir** tenemos, en realidad, sólo el espacio de texto. Una estrategia congruente es traducir *cualquier* espacio, delgado o grueso, en un espacio de texto. Una táctica conveniente es eliminar los espacios delgados en índices. Esto no librará al autor o tipógrafo de eventuales escaramuzas para ganar claridad.

3.3.9.5 El cuadratín y doble cuadratín

El cuadratín y el doble cuadratín se utilizan sólo en estilo desplegado, para separar dos o más fórmulas desplegadas en la misma línea. El cuadratín, como los demás espacios *sin unidades* expresados en cuadratines, crece y decrece con el texto. Así, podemos hablar de composición de fórmulas que, en principio, son de diez puntos, pero que podrían escribirse de 12, 18 ó 40 puntos o, en estilos I e II, de ocho y seis puntos, respectivamente.

▶ Se coloca un cuadratín entre dos expresiones cuando una es subordinada a la otra:

$$\boxed{a_n = \sum_{m=1}^{N} A(m,n)}, \quad \boxed{n = 1, 2, \ldots, N}.$$

▶ Se coloca un doble cuadratín entre expresiones de la misma valía. Por ejemplo,

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}mv^2}, \qquad \boxed{E = h\nu}, \qquad \boxed{E = mc^2}.$$

3.3.10 Puntuación

Hay que distinguir claramente entre la puntuación que es *parte del lenguaje* y la puntuación que es *parte de las matemáticas*. Cuando hablamos de

a, b, c y d, las comas pertencen semánticamente al lenguaje castellano y siguen las reglas especificadas en el capítulo 2. En cambio, cuando escribimos $x_{\mathrm{max}} = 28.3\mathrm{cm}$, $\{f, g\}$ o ${}_2F_1(a, b; c; z)$, la puntuación dentro de los delimitadores o entre los dígitos es parte de las *matemáticas.*

El espacio que sigue a la puntuación lingüística es la normal en texto. En cambio, en estilo D o T el espacio que sigue a un símbolo de puntuación (excepto el *punto*) es un espacio *delgado* ▯ [marcado con *coma* ( ) en la ecuación (3.3)]. En estilos I e II éste *desaparece.* Así, $r_{0.15}$, $A_{i,j,k}$ y $e^{iG(x,y,z;t)}$.

Un punto a cuidar en buena tipografía son los *puntos suspensivos*... Los hay de varios tipos:

Enumerativos: $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (tres puntos seguidos de un espacio delgado); van entre comas, en una sucesión finita donde se enumeran elementos. Lo mismo se aplica cuando la sucesión es infinita, como en $x_1, x_2, x_3, \ldots$. El último punto es ortográfico.

Multiplicativos: $x_1 x_2 \ldots x_N$ (tres puntos precedidos y seguidos por un espacio delgado); toman el lugar de los elementos suprimidos en una multiplicación.

Centrados: $x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ (tres puntos centrados con signos como $+$, $-$, $\times$, $=$, etc. *sin* espacios alrededor pero respetando el espacio grueso que requiere el operador binario $+$); toman el lugar de los elementos suprimidos en una sucesión finita donde hay una operación. Cuando la sucesión es infinita y sigue un signo de puntuación lingüístico, se agrega un espacio delgado al final, como en $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$.

En **`máquina de escribir`** no hay más opción que el espacio normal ▯, de modo que los espacios delgados entre puntuación matemática se suprimen: `x1,x2,...,xN`, `x1x2...xN` o `x1 + x2 + ··· + xN` (los puntos centrales requieren de tino para levantar el rodillo), pero `x1,x2,x3,...`.

3.4 Cómo cortar fórmulas

3.4.1 ¿Qué cortamos?

A menudo el tipógrafo se encontrará con el problema de una expresión matemática que no cabe en una línea de texto y que hay que cortar en dos o más partes. Debe poder decidir dónde hacer el corte, sin tener que consultar al autor (el cual probablemente tampoco sepa con precisión) y probablemente deba cambiar el texto alrededor de la fórmula cuando ésta no admita cortes.

Cortamos palabras cuando éstas no caben en la línea; la primera regla —obvia— es que no se debe cortar una letra en dos. El ojo distingue con dificultad un fragmento de carácter alfabético. Recaemos entonces en la segunda regla, la cual dice, básicamente,[31] que se debe cortar según sílabas. Es la *sílaba* y no la letra la que constituye el fonema que hace inteligible el habla humana. Los fonemas alfabéticos que han sido cortados pierden su representación fonética para el lector. Idealmente, la tipografía debiera ser tal que no se cortasen palabras. Si tuviésemos por unidad irreducible el *concepto* y no el fonema o la palabra, el cortar un texto escrito sería más complicado —tal vez cortaríamos como cortan líneas los poetas de verso libre. Así tenemos que cortar las fórmulas matemáticas.

El fonema mínimo en matemáticas corresponde a una expresión con una cierta unidad lógica que es o actúa como sustantivo: n, a_n, $\log x$, $\sin \pi x$, $\forall z$, $f(x+y)$, $\sum_{n=1}^{m} 2^n$, $\int_0^\infty dx\, f(x+a)e^{inx}$. Esto incluye adjetivos y conjunciones subordinadas *entre delimitadores.* No debemos cortar los sustantivos. Estos elementos se constituyen en fórmulas mediante *verbos* y *conjunciones* **no** subordinadas: $n = n_1 + n_2$, $\log x = y \Rightarrow x = e^y$, $az^2 + bz + c = 0 \Rightarrow z = -b/2a \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$. Ahí sí podemos cortar.[32]

En texto de lenguaje natural, el corte entre fonemas se indica por un guión (-) para alertar al lector que la palabra continúa. En matemáticas no ponemos guiones, pero tenemos que alertar al lector que la fórmula continúa. En fórmulas desplegadas, la siguiente línea de la fórmula salta a la vista y lo que importa es precederla del verbo que la une al siguiente sustantivo. Después de un corte en una fórmula desplegada, pues, la nueva línea comienza con un *verbo* o una *conjunción* no subordinada, que precede al siguiente sustantivo. Para fórmulas en *texto,* en cambio, lo que conviene hacer es *prevenir* al lector del corte; esto se logra dejando el verbo o conjunción *antes* del corte. Una frase con verbo al final seguramente continúa.[33] Cuando la conjunción donde se corta

[31] La legislación completa sobre el corte de palabras en castellano puede verse en la Sección **2.3**.

[32] TEX corta automáticamente en estos lugares sin necesidad de que se lo recuerde el tipógrafo, como lo hizo en la línea precedente.

[33] Excepto en alemán. Entre este idioma y otros sin esta peculiaridad, las discusiones diplomáticas por traducción simultánea son particularmente difíciles. El folclor sobre maletendidos abunda al respecto.

la fórmula es la multiplicación *no* indicada (como xy o $2\pi i$) o la indicada por punto (como $x \cdot y$) ésta debe hacerse visible por una $\times$.

En base a los roles que los símbolos tienen en la fórmula, se dan abajo las reglas básicas. Denotamos por "$|$" un lugar permisible para cortar una fórmula, por "$\Vert$" un lugar preferible para cortar y —cuando se aplique— por "$|||$" un lugar óptimo. Alrededor de estos signos se han suprimido los espacios, pues así es como aparecerán escritas con el $|$ siendo el margen derecho e izquierdo. Cortes que **no** deben hacerse están indicados por "$*$".

3.4.2 Fórmulas en texto

- Las fórmulas en texto se pueden cortar *después* de una *operación binaria* que *no esté encerrada por delimitadores*. Así, escribimos $A ={}^{|||}B +{}^{\Vert}C \times {}^{|}(D+E)$, pero *no* $A = B + C^{*}(D +^{*} E)$. La operación de división en x/y no se incluye en esta regla, pero puede ser reemplazada por $x \div^{|} y$ o por $x \times^{|} y^{-1}$.
- Las fórmulas en texto se pueden cortar dondequiera que aparezca un espacio de texto o mayor (como entre una fórmula y sus condiciones): $\Vert A_{jk}\Vert,{}^{|||}j = {}^{\Vert}1,{}^{|}2,\ldots,{}^{|}N,{}^{|||}\ k ={}^{\Vert}1,{}^{|}2,\ldots,{}^{|}N$.
- **No** se admiten cortes entre delimitadores algebraicos. Los delimitadores lógicos a menudo llegan a estar muy distanciados el uno del otro y presentan varios lugares donde se pueden cortar. Volvamos al ejemplo dado en la ecuación (3.1a), esta vez en texto: $f \in^{\Vert} C \Leftrightarrow^{|||}\{\forall\epsilon >^{|}0,{}^{|}\exists\delta \mid {}^{\Vert}|x - x'| <^{|}\delta \Rightarrow {}^{\Vert}|f(x) - f(x')| <^{|}\epsilon\}$. Tampoco se admiten cortes entre un colectivizador y su sujeto. Las integrales *no* se deben separar de sus integrandos, ni separar su integrando entre dos líneas.[34]

3.4.3 Fórmulas en desplegado

- Todas las reglas anteriores se aplican a fórmulas desplegadas, *con la modificación que* el operador binario ($+$, $-$, $\times$ —pero no $\div$) sea puesto al inicio de la *segunda* línea.[35] Los espacios de uno o dos cuadratines son los mejores lugares para cortar.

[34] Excepto en casos **desesperados**.

[35] Esta es la diferencia crucial con la forma en que cortamos fórmulas en *texto*.

$$
\begin{aligned}
E_{n,l} = {} & \underbrace{-\tfrac{1}{2}I\omega^2}_{\text{cinética}} + \underbrace{\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega}_{\text{vibracional}} + \underbrace{\left(l+\tfrac{1}{2}\right)^2\tfrac{\hbar^2}{2I}}_{\text{rotacional}} \\
& \underbrace{-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\tfrac{3\hbar^2}{2I}}_{\text{corr. anarmónico}} \underbrace{-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\left(l+\tfrac{1}{2}\right)^2\tfrac{3\hbar^2}{2I^2\omega}}_{\substack{\text{acoplamiento}\\ \text{vibr-rot}}} + \cdots, \qquad (3.8) \\
& n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

▶ Las fórmulas merecen desplegarse cuando son muy complejas y no ajustan en el texto. Cortarlas en desplegado puede significar todavía *tener* que cortarlas en *algún* lado, y esto lleva por lo general a escoger las conjunciones subordinadas. Relajando una de las reglas anteriores, se permite entonces el corte *dentro* de un par de delimitadores. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\psi_2(k,\mu; z\,e^{i\pi n}) &= e^{-i\pi n}\Bigl(\psi_2(k,\mu;z) \\
&\qquad + (e^{4i\pi nk}-1)\frac{\Gamma(1-2k)}{\Gamma(1-k-\mu)}\psi_1(k,\mu;z)\Bigr), \qquad (3.9a) \\
\psi_2(k,\mu; z\,e^{\pm i\pi n/2}) &= e^{\mp i\pi n/4}\Bigl(e^{\pm i\pi nk}\frac{\Gamma(1-2k)}{\Gamma(1-k-\mu)}\psi_1\bigl(k,(-1)^n\mu;z\bigr) \\
&\qquad + e^{\pm i\pi n(1-k)}\frac{\Gamma(2k-1)}{\Gamma(k-\mu)} \qquad (3.9b) \\
&\qquad\qquad \times \psi_1\bigl(1-k,(-1)^n\mu;z\bigr)\Bigr).
\end{aligned}
$$

▶ Fórmulas largas se pueden también cortar en dos, colocando el primer trozo a un cuadratín del margen derecho y el segundo trozo a un cuadratín del margen izquierdo, sin insistir en el alineamiento de los trozos evidente en los ejemplos anteriores. Como variante, presentamos la siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\psi_1(k,\mu;z)}{\Gamma(2k)} = \Biggl[& \frac{e^{z^2/2}z^{-2\mu-1/2}}{\Gamma(k-\mu)}\Biggl(\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(k+\mu)_n\,(1-k+\mu)_n}{n!\,z^{2n}} + O(|z|^{-2S})\Biggr) \\
& + \frac{e^{\pm i\pi(k-\mu)}e^{-z^2/2}z^{2\mu-1/2}}{\Gamma(k+\mu)}\Biggl(\sum_{n=0}^{R-1}\frac{(k-\mu)_n\,(1-k-\mu)_n}{n!\,(-z^2)^n} + O(|z|^{-2R})\Biggr)\Biggr]
\end{aligned}
$$

3.5 Alineamientos de fórmulas

Por necesidad, esta sección trata sólo con fórmulas en desplegado, donde se presentan situaciones de tener un arreglo de fórmulas que conviene alinear de algún modo para realzar su estructura. Cuando la expresión desplegada es una fórmula que cabe con facilidad en una línea, ésta simplemente se centra en la página, con un espacio vertical de una línea arriba y abajo.[36]

Cuando aparecen sucesivamente dos o más fórmulas similares sin texto intermedio, es estéticamente mejor *alinearlas* en forma vertical. Algunos ejemplos están dados en las ecuaciones precedentes. Otro es:

$$\begin{aligned}
\psi_1(k,\mu;z) &= z^{-1/2} M_{\mu,k-1/2}(z^2) \\
&= e^{-z^2/2} z^{2k-1/2} M(k-\mu, 2k, z^2), && (3.10a) \\
\psi_2(k,\mu;z) &= z^{-1/2} W_{\mu,k-1/2}(z^2) \\
&= e^{-z^2/2} z^{2k-1/2} U(k-\mu, 2k, z^2) \\
&= \frac{\Gamma(1-2k)}{\Gamma(1-k-\mu)} \psi_1(k,\mu;z) && (3.10b) \\
&\quad + \frac{\Gamma(2k-1)}{\Gamma(k-\mu)} \psi_1(1-k,\mu;z), \\
&= \psi_2(1-k,\mu;z).
\end{aligned}$$

La regla es esta:

- Ecuaciones sucesivas suficientemente similares se alinean en forma vertical haciendo que coincidan respecto al primer *verbo*, es decir, operador binario de igualdad (como $=$, $\approx$, $\simeq$, $\not\equiv$, etc.) Si no hay tal, alineamos respecto de operadores binarios de relación (como $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\ll$, $\gg$, $\subset$, $\supset$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\prec$, $\succ$, $\preceq$, $\succeq$, $\leftarrow$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $|$, $\|$, $:$, $\perp$, $\mapsto$, $\in$, $\notin$, etc.)

Las ecuaciones alineadas pueden ser también pasos sucesivos en un desarrollo, donde no es necesario repetir el miembro izquierdo en cada ecuación, sino sólo comenzar cada línea nueva con un signo de igualdad, como en[37]

---

[36] Cuando después de una fórmula desplegada sigue punto y aparte, se deja una línea más el espacio normal entre párrafos.

[37] Nótese que damos un solo número a todo el conjunto de líneas que constituyen una ecuación cortada.

$$
\begin{aligned}
M(\alpha,\beta,z) &= {}_1F_1(\alpha\,;\beta;z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n}\frac{z^n}{n!} \\
&= e^z\, M(\beta-\alpha,\beta,-z).
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Existen situaciones en que hay que considerar más de un eje de alineamiento vertical. Por ejemplo, los valores en cero de las primeras funciones de Bessel son:

$$
\begin{aligned}
J_0(0) &= 1, & J_0'(0) &= 0, & J_0''(0) &= -1, \qquad (3.12a)\\
J_1(0) &= 0, & J_1'(0) &= 1/2, & J_1''(0) &= 1, \qquad (3.12b)\\
J_2(0) &= 0, & J_2'(0) &= 0, & J_2''(0) &= 1/2. \qquad (3.12c)
\end{aligned}
$$

- Cuando se alinean más de una columna de fórmulas (respecto a sus relaciones binarias), se deja un doble cuadratín entre los márgenes exteriores de las columnas alineadas.[38]

Cuando cortamos una fórmula en desplegado, también es indispensable alinear los trozos, que por lo general son de largos diferentes. Un ejemplo de esto puede verse en las ecuaciones (3.8) y (3.9). Aquí las reglas son:

- Se alinean todos los *primeros* operadores binarios *de igual valía* que aparecen en cada línea de texto.[39] Estos son de *igualdad* (*verbos*) por lo general.
- Operadores binarios subordinados (*conjunciones* como $+$, $\times$, etc., donde se eligió cortar la fórmula) van precedidos a la derecha por un cuadratín. Así,[40]

$$
\begin{aligned}
U(\alpha,\beta,z) &= \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}M(\alpha,\beta,z) \\
&\qquad - \frac{z^{1-\beta}}{1-\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}M(1+\alpha-\beta,2-\beta,z) \\
&= z^{1-\beta}U(1+\alpha-\beta,2-\beta,z),
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

[38] Es decir, *no* se trata de un *arreglo* o *matriz* de expresiones pues en ellas, como vimos antes, los elementos constituyentes se *centran* verticalmente. Aquí se *alinean*.

[39] Recordemos que el operador binario *precede* a cada línea de un desplegado.

[40] Nótese que el signo $-$ guarda el espacio grueso con el siguiente sustantivo característico de una conjunción. Este *no* se ha transformado en un *adjetivo*, como lo es en $-x$.

- Cuando hemos agotado nuestras baterías de espacio y cortamos entre dos delimitadores que contienen una conjunción, como en (3.9*b*), debemos tratar que la conjunción quede un cuadratín a la derecha del delimitador izquierdo que la subordina. Véase (3.9) como ejemplo.
- La última recomendación respecto a distribuir fórmulas complicadas en un desplegado es que siempre aparecerán expresiones *irrompibles* que hay que escribir de manera más sencilla. Esto es trabajo del autor.

3.6 Enunciados distinguidos

Hemos indicado que las fórmulas tienen muchos elementos sintácticos del idioma hablado. Los matemáticos más puristas, en cambio, tratan de llevar el idioma de sus artículos a una sucesión de expresiones que podríamos llamar *desplegados de texto*. La idea es segmentar el texto según su función y etiquetar a ésta claramente como DEFINICIÓN, PROPOSICIÓN, HIPÓTESIS, LEMA, TEOREMA, DEMOSTRACIÓN, COROLARIO, COMENTARIO, CONJETURA y OBITUARIO. Cada segmento termina con punto y aparte, y su principio lleva el nombre correspondiente en VERSALITAS por lo general.

Queremos *realzar* los teoremas u otros resultados importantes. Esto se logra poniendo todo el enunciado en una fuente distinta, en *bastardillas* por lo general.[41] El estilo que portan los enunciados distinguidos depende del editor y/o de la editorial. Para textos donde sólo por excepción se presentan estos enunciados, un formato común que puede servir de base es el siguiente:

Teorema 3.2 (de Navarro–Wolf, 1984). *Sea* $\varsigma(\mathbf{q})$ *una función con gradiente continuo. Entonces,*

$$\hat{R}_{\varsigma,n} : \begin{cases} \mathbf{q} \mapsto \overline{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varsigma(\overline{\mathbf{q}})\, p/\sqrt{n^2 - p^2}, \\ \mathbf{p} \mapsto \overline{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \sqrt{n^2 - p^2}\, \nabla\varsigma(\overline{\mathbf{q}}), \end{cases}$$

es una transformación localmente canónica en todos sus puntos de continuidad. Las subvariedades de singularidad de la transformación son aquellos donde $\mathbf{p}\boldsymbol{\cdot}\nabla\varsigma(\overline{\mathbf{q}}) = \sqrt{n^2 - p^2}$.

[41] Se evitan las ***cursivas*** pues se pueden confundir con las literales matemáticas en el texto.

Dejamos un renglón de más entre el texto y el teorema. Sin dejar sangría, escribimos en **negritas** el nombre "Teorema" (con mayúscula) seguido de su número[42] y —si lo hay— del nombre de los descubridores (por modestia no usamos negritas). Punto y cuadratín. Sigue el teorema. Punto final. Seguimos un enunciado distinguido con un espacio vertical respetable.

Corolario. *Una superficie entre dos medios con distinto índice de refracción produce una transformación del espacio fase óptico que es canónica.*

Demostración. Según vimos en el teorema **3.1**, la transformación $\hat{S}_{\varsigma,n\mapsto n'}$ producida por la superficie refractante se factoriza como $\hat{R}_{\varsigma,n} \circ (\hat{R}_{\varsigma,n'})^{-1}$. La inversión local de una transformación canónica no singular es localmente canónica y la composición de dos transformaciones localmente canónicas es localmente canónica. *Q.E.D.*

Las demostraciones no se numeran y no se ponen en *bastardillas*. No son lo suficientemente distinguidas. Como éstas a veces son largas —varias páginas— conviene alertar al lector que la demostración ha terminado. Aquí lo hicimos con el formalismo ***Quod Erat Demostrandum***, *lo cual era el sujeto de la demostración*, justificado a la derecha. Otros autores ponen un • o un ▮, a un cuadratín de distancia del término de la demostración o, para mejorar su visibilidad, justificado a la derecha.

Los libros también suelen tener **ejemplos** para entretener a los lectores. Conviene numerarlos, pues probablemente haya muchos, indicar con claridad el final de cada ejemplo, pues de otra manera el resto del libro se vuelve un **ejemplo**, y reducir a nueve o a ocho puntos el tamaño de los caracteres de modo que el texto del ejemplo se perciba como subordinado al hilo de la exposición. Los editores pueden probar su ingenio diseñando formatos atractivos. Por ejemplo:[43]

Ejemplo 3.140. Se desea saber si las funciones

$$f(k) = k, \quad \text{y} \quad g(k) = k^2, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

son linealmente independientes. El Casorati de estas funciones es

$$\begin{vmatrix} f(k) & g(k) \\ f(k+1) & g(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k^2 \\ k+1 & (k+1)^2 \end{vmatrix} = k(k+1)^2 - k^2(k+1) = k^2 + k.$$

[42] Si hay muchos teoremas conviene numerarlos. Si no, podemos llamarlo simplemente "**Teorema.**" ¡y punto!

[43] Tomado del libro *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias*, de Próspero García Márquez y Carlos de la Lanza, Facultad de Ingeniería, UNAM.

Por lo tanto, para $k = 1, 2, \ldots$ el Casorati de las funciones es diferente de cero y, según el teorema **3.3**, esto es condición suficiente para que las funciones sean linealmente independientes. Esta conclusión se puede verificar formando la combinación lineal

$$c_1 k + c_2 k^2, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

e igualándola a cero. Esta ecuación se satisface sólo para $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Lo mismo se aplicará a problemas, ejercicios y soluciones.