Theoretical and Mathematical Physics, Vol. 129, No. 2, pp. 1501–1503, 2001

GRAF'S ADDITION THEOREM OBTAINED FROM $SO(3)$ CONTRACTION

P. Winternitz,[1] K. B. Wolf,[2] G. S. Pogosyan,[3] and A. N. Sissakian[4]

We show that Graf's addition theorem for Bessel functions is obtained by contraction of the composition formula for $SO(3)$ rotations.

1. Graf's addition theorem for Bessel functions (see Sec. 7.6.2, Eq. (6) on p. 44 in [1]) relates the terms of the polar expansion of a function on the plane around two centers separated by a distance z. Let P be a point with the coordinates (r, ϕ) with respect to the center O and the coordinates (r', ϕ') with respect to O' (see Fig. 1). Then

$$J_{m'}(r')\, e^{im'\phi'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m'-m}(z)\, J_m(r)\, e^{im\phi}, \tag{1}$$

where (from plane trigonometry)

$$r \sin\phi = r' \sin\phi', \qquad r\cos\phi = r'\cos\phi' - z. \tag{2}$$

For integer m', this formula also has a clear group theory meaning: it determines the matrix elements of translations within the standard (k=1) irreducible representation of the Euclidean group $ISO(2)$ [2].

The purpose of this note is to derive Graf's formula (1), (2) by contraction of the product of two rotations in the group $SO(3)$,

$$\mathbf{R}(\psi', \theta', \phi') = \mathbf{R}(\psi, \theta, \phi)\, \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{3}$$

which are related by

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\cos(\phi - \alpha),$$

$$\cot(\phi' + \gamma) = \cot(\phi - \alpha)\cos\beta - \frac{\cot\theta\sin\beta}{\sin(\phi - \alpha)}.$$

2. The $SO(3)$ unitary irreducible representation matrix elements of (3) result in the well-known expansion formula for spherical harmonics [2], [3]:

$$Y_{\ell,m'}(\theta', \phi') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta, \phi)\, D^{\ell}_{m,m'}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{4}$$

[1]Centre de Recherches Mathématiques and Départment de Mathématiques et Statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada.

[2]Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos, México.

[3]Centro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos, México; Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Oblast, Russia, e-mail: pogosyan@fis.unam.mx.

[4]Bogoliubov Laboratory for Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow Oblast, Russia.

Translated from Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika, Vol. 129, No. 2, pp. 227–229, November, 2001.

0040-5779/01/1292-1501\$25.00

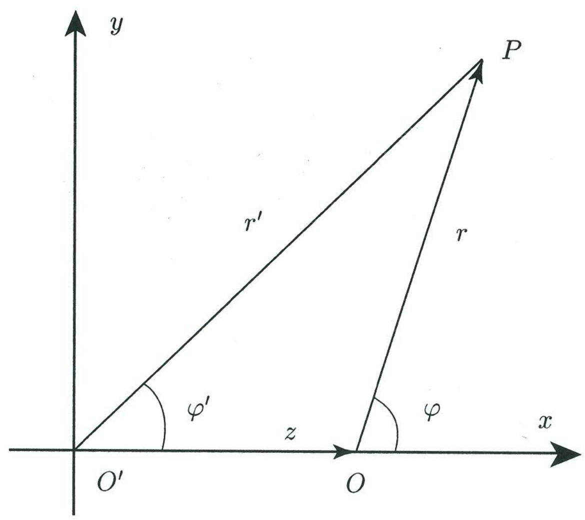


Fig. 1

where we have the Wigner D-functions,

$$D^{\ell}_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\alpha}\, d^{\ell}_{m,m'}(\beta)\, e^{-im'\gamma},$$

$$d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = \frac{(-1)^{m-m'}}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(\ell+m)!\,(\ell-m')!}{(\ell-m)!\,(\ell+m')!}}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\ell-m+m'}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'} \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(m-\ell,\ -m'-\ell; m-m'+1; -\tan^2\frac{\beta}{2}\right) \qquad (5)$$

and the spherical harmonics are

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = D^{\ell}_{0,m}(\psi,\theta,\phi)$$

in the initial and rotated coordinate systems.

We use the Hamilton theory of turns (see Chaps. 4 and 5 in [4]) to assign a triangle of arrows on great circles of the sphere to the product of rotations (3) as in Fig. 1, where the turns (directed segments) PO corresponding to $\mathbf{R}(\psi,\theta,\phi)$ and OO' corresponding to $\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ yield PO' corresponding to $\mathbf{R}(\psi',\theta',\phi')$.

3. There are several ways to contract the rotation group $SO(3)$ to the Euclidean group $ISO(2)$ [5]–[8]. Spherical coordinates yield the Cartesian or the polar coordinates on the plane. We use the latter contraction, which is best known as the Inönü–Wigner contraction [9]. We thus consider a "radius" parameter R that increases without bound and determines the rate of increase and decrease of the representations and angles in (4) by

$$\ell \simeq kR, \qquad \theta \simeq \frac{r}{R}, \qquad \theta' \simeq \frac{r'}{R}, \qquad \beta \simeq \frac{z}{R},$$

where k, r, and r' are finite numbers. Using an asymptotic formula for the hypergeometric function in (5), we obtain

$$\lim_{R\to\infty} d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = J_{m-m'}(kz),$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R}}\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = (-1)^m\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, J_m(kr)\, e^{im\phi}.$$

With these results, the limit of (4) as $R \to \infty$ yields Graf's addition theorem (1), as was stated at the beginning.

Acknowledgments. The authors thank Dr. A. A. Izmest'ev (JINR, Dubna) for the fruitful discussions and G. Krötzsch (CCF-UNAM) for the preparation of the figure.

This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant No. 00-02-81023, G. S. P. and K. B. W.), the DGAPA-UNAM (Grant No. IN112300, G. S. P. and K. B. W.), the NSERC of Canada (P. W.), and the FCAR of Quebec (P. W.).

REFERENCES

1. A. Erdélyi et al., eds., *Higher Transcendental Functions* (Based on notes left by H. Bateman), Vol. 2, McGraw-Hill, New York (1953).
2. N. Ya. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, Kluwer, Dordrecht (1991).
3. D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum* [in Russian], Nauka, Leningrad (1975); English transl., World Scientific, Singapore (1988).
4. L. C. Biedenharn and J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1981).
5. A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, and P. Winternitz, *J. Phys. A*, **29**, 5940–5962 (1996).
6. A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, and P. Winternitz, *Int. J. Mod. Phys. A*, **12**, 53–61 (1997).
7. E. G. Kalnins, W. Miller Jr., and G. S. Pogosyan, *J. Phys. A*, **32**, 4709–4732 (1999).
8. A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, and P. Winternitz, *J. Math. Phys.*, **40**, 1549–1573 (1999).
9. E. Inönü and E. P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39**, 510–524 (1953).

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА

ЕТИЧЕСКАЯ
.ТЕМАТИЧЕСКАЯ
ІКА
29, № 2
ь, 2001

01 г.

П. Винтерниц*, К. Б. Вольф†,
Г. С. Погосян‡, А. Н. Сисакян§

ВЫВОД ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ ГРАФА ПУТЕМ КОНТРАКЦИЙ ГРУППЫ $SO(3)$

Показано, что теорема сложения Графа для функций Бесселя может быть получена іутем контракций формулы для произведения вращений группы $SO(3)$.

Теорема сложения Графа для функций Бесселя (см. п. 7.6.2, формула (6) на с. 54 е [1]) связывает члены полярного разложения функции на плоскости вокруг двух чных центров, находящихся на расстоянии z друг от друга. Пусть P – точка с інатами (r, ϕ) относительно центра O и координатами (r', ϕ') относительно O' (см. эк). Тогда

$$J_{m'}(r')\, e^{im'\phi'} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{m'-m}(z)\, J_m(r)\, e^{im\phi}, \tag{1}$$

ік это следует из плоской тригонометрии,

$$r\sin\phi = r'\sin\phi', \qquad r\cos\phi = r'\cos\phi' - z. \tag{2}$$

ілых m' эта формула имеет также ясный теоретико-групповой смысл: она опреде-атричные элементы оператора сдвига в стандартном ($k = 1$) неприводимом пред-іии евклидовой группы $ISO(2)$ [2].

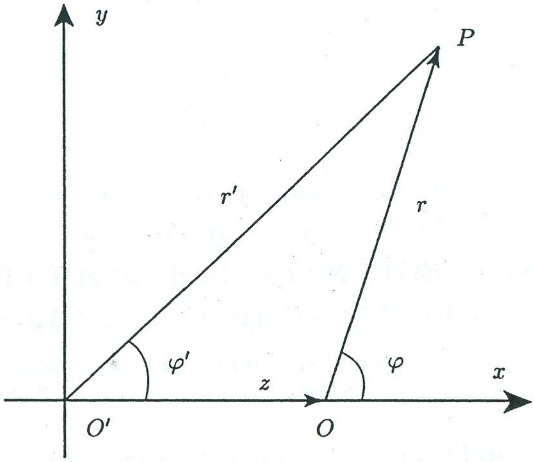
ь настоящей заметки – получить формулу Графа (1), (2) путем контракций про-ния двух вращений группы $SO(3)$,

$$\mathbf{R}(\psi', \theta', \phi') = \mathbf{R}(\psi, \theta, \phi)\, \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{3}$$

---

ntre de Recherches Mathématiques and Départment de Mathématiques et Statistique, Uni-de Montréal, Montréal, Québec, Canada
ıtro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos,

ıtro de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Autónoma de México, Cuernavaca, Morelos, ; Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядер-ледований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pogosyan@fis.unam.mx
боратория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных ваний, Дубна, Московская обл., Россия



которые связаны соотношениями

$$\cos\theta' = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta\cos(\phi-\alpha),$$
$$\operatorname{ctg}(\phi'+\gamma) = \operatorname{ctg}(\phi-\alpha)\cos\beta - \frac{\operatorname{ctg}\theta\sin\beta}{\sin(\phi-\alpha)}.$$

2. Переход в равенстве (3) к матричным элементам унитарно-неприводимого представления группы $SO(3)$ приводит к хорошо известной формуле разложения для сферических гармонических функций [2], [3]:

$$Y_{\ell,m'}(\theta',\phi') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell,m}(\theta,\phi)\, D^{\ell}_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{4}$$

в которую входят D-функции Вигнера

$$D^{\ell}_{m,m'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im\alpha}\, d^{\ell}_{m,m'}(\beta)\, e^{-im'\gamma},$$

$$d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = \frac{(-1)^{m-m'}}{(m-m')!}\sqrt{\frac{(\ell+m)!\,(\ell-m')!}{(\ell-m)!\,(\ell+m')!}}\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\ell-m+m'}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m-m'}\times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(m-\ell,\, -m'-\ell;\, m-m'+1;\, -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\right) \tag{5}$$

и сферические гармонические функции

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = D^{\ell}_{0,m}(\psi,\theta,\phi)$$

в исходной и повернутой системах координат.

Используем гамильтонову теорию поворотов (см. гл. 4 и 5 в книге [4]), чтобы поставить в соответствие произведению вращений (3) треугольник, сторонами которого являются векторы на больших кругах сферы, как показано на рисунке, где векторы PO и OO', соответствующие поворотам $\mathbf{R}(\psi,\theta,\phi)$ и $\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma)$, в сумме дают вектор PO', соответствующий повороту $\mathbf{R}(\psi',\theta',\phi')$.

3. Существует несколько способов контракций группы вращений $SO(3)$ до евклидс вой группы $ISO(2)$ [5]–[8]. Сферические координаты дают декартовы или полярные кс ординаты на плоскости. Контракции, которые мы используем далее, известны как конт ракции Иноню–Вигнера [9]. Рассмотрим поэтому "радиальный" параметр R, которы неограниченно возрастает и определяет скорости роста и убывания для представлени и углов в формуле (4) следующим образом:

$$\ell \simeq kR, \qquad \theta \simeq \frac{r}{R}, \qquad \theta' \simeq \frac{r'}{R}, \qquad \beta \simeq \frac{z}{R},$$

где k, r и r' – конечные числа. Используя асимптотическую формулу для гипергеомет рической функции в равенстве (5), получаем

$$\lim_{R\to\infty} d^{\ell}_{m,m'}(\beta) = J_{m-m'}(kz),$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{R}} Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\, J_m(kr)\, e^{im\phi}.$$

Переход в (4) к пределу $R \to \infty$ с использованием этих результатов дает, как это был указано вначале, теорему сложения Графа (1).

Благодарности. Авторы благодарят А. А. Изместьева (ОИЯИ, Дубна) за плодс творные обсуждения и Г. Крошна (CCF-UNAM) за подготовку рисунка. Работа поддер жана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-02-81023, Г.С.П и К.Б.В.), DGAPA-UNAM (грант № IN112300, Г.С.П. и К.Б.В.), NSERC Канада (П.В. и FCAR Квебек (П.В.).

Список литературы

[1] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функци параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966.

[2] *N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk*. Representation of Lie Groups and Special Functions. Dordrecht Kluwer, 1991.

[3] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский*. Квантовая теория углового мо мента. Л.: Наука, 1975.

[4] *L. C. Biedenharn, J. D. Louck*. Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Applica tion. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981.

[5] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz*. J. Phys. A. 1996. V. 29 P. 5940–5962.

[6] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997 V. 12. P. 53–61.

[7] *E. G. Kalnins, W. Miller Jr., G. S. Pogosyan*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 4709–4732.

[8] *A. A. Izmest'ev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz*. J. Math. Phys. 1999. V. 40 P. 1549–1573.

[9] *E. Inönü, E. P. Wigner*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 510–524.